

# Übungen zur Astroteilchenphysik 1

Wintersemester 2010/2011

Dr. B. Majorovits/  
Dr. J.-C. Lanfranchi

Blatt 3

17.11.2010

---

## Aufgabe 1: Kosmologische Konstante und Vakuumenergie

Die *Einstein-Gleichungen* mit kosmologischer Konstante  $\Lambda$  lauten

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi G \cdot T_{\mu\nu} \quad (1)$$

mit dem *Ricci-Tensor*  $R_{\mu\nu}$ , dem *Ricci-Skalar*  $R$  und dem metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$ . Der Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  ist gegeben durch

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \quad , \quad (2)$$

wobei  $u_\mu$  die Vierergeschwindigkeit des betrachteten Raumelements ist.

- Bringen Sie den Term mit der kosmologischen Konstanten  $\Lambda$  auf die Form von  $T_{\mu\nu}$  und bestimmen Sie dadurch  $\rho_\Lambda$  und  $p_\Lambda$ . Wie lautet folglich die Zustandsgleichung für die Vakuumenergie?
- Betrachten Sie den Spezialfall  $T_{\mu\nu} = 0$  und  $\Lambda \neq 0$ .  $T_{\mu\nu} = 0$  bedeutet, dass in der modifizierten zweiten Friedmann-Gleichung (Gleichung (4) weiter unten auf diesem Blatt) sowohl die Dichte  $\rho$  als auch der Druck  $p$  verschwinden. Ermitteln Sie daraus die zeitliche Evolution des Skalenfaktors  $R(t)$ . Diskutieren Sie insbesondere die Fälle  $\Lambda > 0$  (de-Sitter-Kosmos) und  $\Lambda < 0$ .

## Aufgabe 2: Friedmann-Universum mit Vakuumenergie

In der letzten Übung wurden die Friedmann-Gleichungen ohne kosmologische Konstante  $\Lambda$  betrachtet. Implementiert man letztere, so lauten die beiden Friedmann-Gleichungen jetzt:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho) + \frac{\Lambda}{3} \quad (4)$$

- a) Was folgt aus diesen Gleichungen nun für das Schicksal des Universums in den Fällen  $k=0$ ,  $k<0$  und  $k>0$ ?
- b) Zeigen Sie, dass für diese modifizierten Friedmann-Gleichungen weiterhin die Fluidgleichung in ihrer ursprünglichen Form gilt!
- c) Lösen Sie die Fluidgleichung für die drei Fälle Materie, Strahlung und Vakuumenergie! Welches seltsame zeitliche Verhalten hat die Dichte der Dunkeln Energie also? Was bedeutet das für die Zukunft unseres Universums?

**Übungstermin:**

Montag, 23.11.2010, 16 Uhr, E15 Seminarraum