Lösungen zur Experimentalphysik III

Wintersemester 2008/2009

Prof. Dr. L. Oberauer | Blatt 10 | 14.01.09

Aufgabe 1:

a) Da der erste Polarisator jegliche Komponente entfernt, die den zweiten Polarisator passieren könnte, ist die Intensität nach den beiden Polarisatoren Null.

b) Sei die Feldstärke nach dem ersten Polarisator E_0.
Nach dem zweiten Polarisator verbleibt nur noch die Komponente E', die parallel zur Durchlassrichtung stand: $E' = E_0 \cos\alpha$.
Nach dem dritten Polarisator erhält man E'':

$$\begin{aligned} E'' &= E' \, cos(90^\circ - \alpha) = E_0 \, cos\alpha \, sin\alpha \\ \Rightarrow I'' &\sim E_0^2 \, cos^2\alpha \, sin^2\alpha = I_0 \, cos^2\alpha \, sin^2\alpha \end{aligned}$$

wobei I_0 die Intensität nach dem ersten Polarisator ist. Das Einführen eines weiteren Polarisators kann also die Lichtintensität erhöhen!

Aufgabe 2:

Zerlegen wir den Feldvektor in seine Komponenten parallel zur optischen Achse des Mediums (außerordentlich) und senkrecht dazu (ordentlich), so erhalten wir:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)e^{i\omega t}$$

wobei $\vec{e}_{x,y}$ die Einheitsvektoren in x- und y-Richtung sind und die optische Achse des Doppelbrechers in y-Richtung zeigen soll.
Wir erhalten für die beiden Komponenten verschiedene Phasenverschiebungen beim Durchgang durch das Plättchen:

$$\text{außerordentliches Bündel} \quad : \quad \varphi_{ao} = \frac{2\pi}{\lambda} d n_{ao}$$

$$\text{ordentliches Bündel} \quad : \quad \varphi_o = \frac{2\pi}{\lambda} d n_o$$

$$\Rightarrow \quad \delta\varphi = \varphi_o - \varphi_{ao} = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_o - n_{ao})$$

Nach Durchgang durch das Plättchen ergibt sich als Feldvektor also:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \left(\vec{e}_x e^{i\varphi_0} + \vec{e}_y e^{i\varphi_{ao}} \right)$$

Dieser Feldvektor wird nun durch den schief stehenden Polarisator beeinflusst:

$$\vec{E} = \vec{e}_{Pol} \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \left(e^{i\varphi_o} sin\vartheta + e^{i\varphi_{ao}} cos\vartheta \right) \tag{1}$$

wobei $\vec{e}_{Pol}$ in Richtung der Durchlassrichtung des Polarisators zeigt. Als Intensität erhalten wir also:

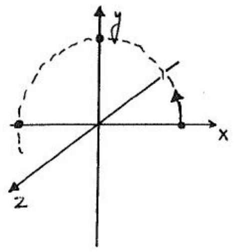
$$\begin{aligned}
I \sim EE^{\star} &= \frac{E_0^2}{2} \left(sin\vartheta e^{i\varphi_o} + cos\vartheta e^{i\varphi_{ao}} \right) \left(sin\vartheta e^{-i\varphi_o} + cos\vartheta e^{-i\varphi_{ao}} \right) \\
&= \frac{E_0^2}{2} \left(sin^2\vartheta + cos^2\vartheta + sin\vartheta cos\vartheta \left(e^{i(\varphi_o - \varphi_{ao})} + e^{-i(\varphi_o - \varphi_{ao})} \right) \right) \\
&= \frac{E_0^2}{2} (1 + 2 sin\vartheta \, cos\vartheta \, cos\delta\varphi) \\
\Rightarrow I &= \frac{I_0}{2} (1 + sin(2\vartheta) \, cos\delta\varphi)
\end{aligned}$$

Für die angegebenen Werte ergibt sich $\delta\varphi = 4.5\pi$. Und wir erhalten für die Intensität einen Wert, der unabhängig von ϑ ist!

$$I = \frac{I_0}{2}$$

Das die Kalkspatplatte verlassende Licht ist zirkular polarisiert. Man nennt ein solches Plättchen auch ein $\frac{\lambda}{4}$-Plättchen.

Aufgabe 3:



Wir betrachten eine ebene Welle in z-Richtung:

$$E \sim e^{i(\omega t - kz)}$$

Bei einer linkszirkular polarisierten Welle hängt die y-Komponente des Feldvektors der x-Komponente um 45° nach, wie oben in der Zeichnung angedeutet. (Bemerkung: Manche Bücher definieren *linkspolarisiert* auf diese Weise, andere genau andersherum. Wir wählen hier die Variante, bei der man in Ausbreitungsrichtung der Welle sieht und eine Linksschraube durchläuft. Man kann aber auch andersherum die Welle auf sich zukommen lassen, dann ergäbe sich eine Rechtsschraube. Wichtig ist hier, dass man konsistent bleibt, alles weitere ist Definitionssache.)
Die y- Komponente ist also um $-\frac{\pi}{2}$ verschoben:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)} + \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})} \\
&= (\vec{e}_x + e^{-i\frac{\pi}{2}} \vec{e}_y) e^{i(\omega t - kz)} \\
&= (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) e^{i(\omega t - kz)}
\end{aligned}$$

Dies ist also der Vektor einer linkszirkular polarisierten Welle (Bei einer rechtszirkular polarisierten Welle ist lediglich das Vorzeichen vor der y-Komponente verschieden). Im Folgenden sei $e^{i(\omega t - kz)}$ weggelassen, da es für die Berechnung keinerlei Rolle spielt.

a)

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{links} &= \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\
\vec{E}_{rechts} &= \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ ergibt sich aus der Normierung:

$$\vec{E}_l \cdot \vec{E}_l^\star = \frac{1}{2}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) = 1$$

Damit folgt aus dem Skalarprodukt die Orthogonalität der beiden Komponenten:

$$\vec{E}_l \cdot E_r^\star = \frac{1}{2}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)(\vec{e}_x - i\vec{e}_y) = 0$$

b) Wir suchen also einen Vektor $E_\perp$, für den gilt:

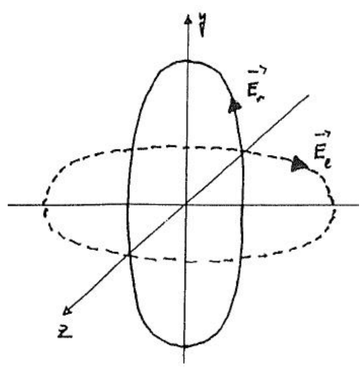
$$\frac{\vec{e}_x - ia\vec{e}_y}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \vec{E}_\perp^\star = 0$$

Wir benutzen den Ansatz:

$$\vec{E}_\perp = \frac{\vec{e}_x + ib\vec{e}_y}{\sqrt{1+b^2}}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{(\vec{e}_x - ia\vec{e}_y)(\vec{e}_x - ib\vec{e}_y)}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \\
0 &= 1 - ab \\
\Rightarrow b &= \frac{1}{a} \\
\Rightarrow \vec{E}_\perp &= \frac{a\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{1+a^2}}
\end{aligned}$$

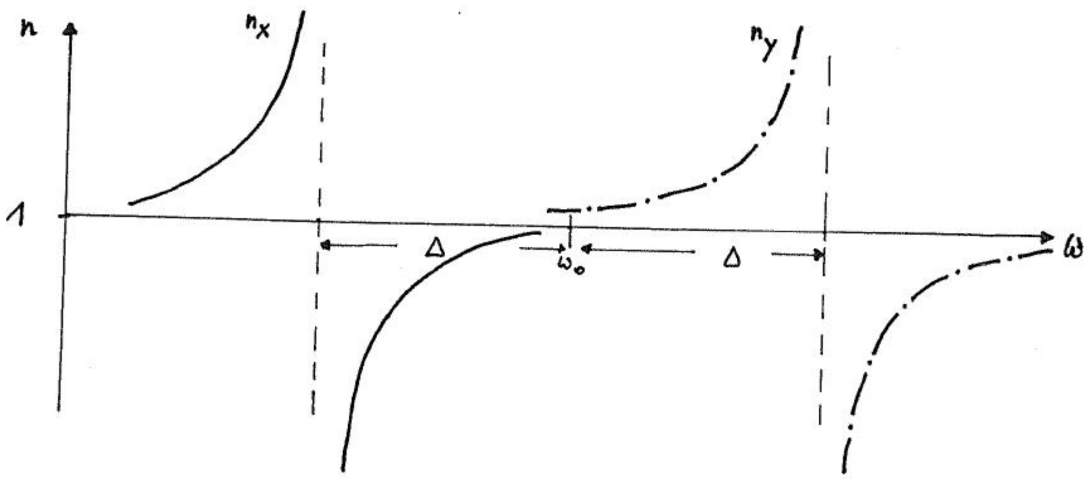


Aufgabe 4:

Hier ist auf dem Aufgabenblatt leider ein Fehler: Es muss in der Aufgabenstellung für die beiden Brechungsindices heißen:

$$n_x = 1 - \frac{a}{(\omega - \omega_0 + \Delta)}$$
$$n_y = 1 - \frac{a}{(\omega - \omega_0 - \Delta)}$$

a) Wir erhalten mit diesen Brechungsindices jeweils eine Resonanz für die verschiedenen Polarisationsrichtungen:



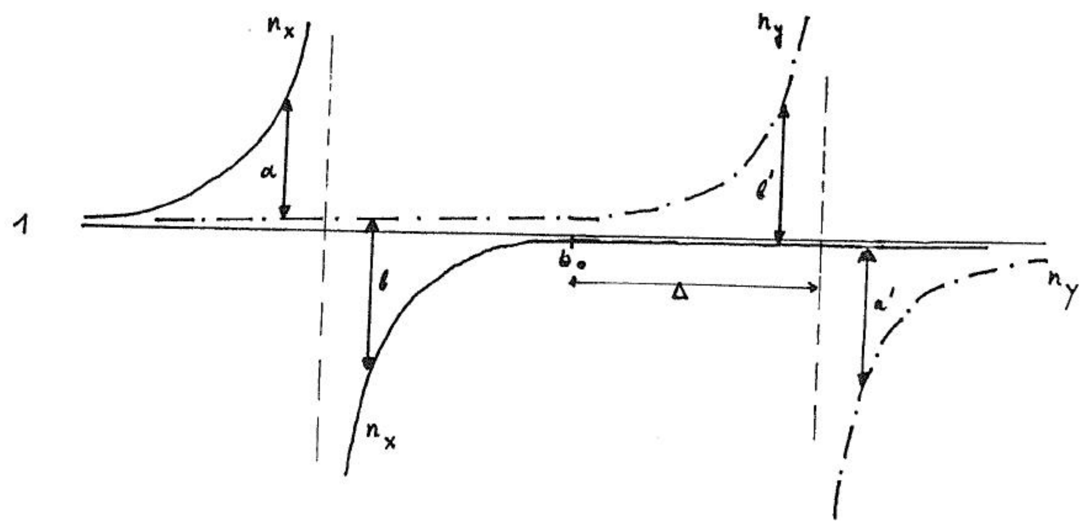
b) Ein Vektor linearer Polarisation im Winkel 45° sieht folgendermaßen aus:

$$\vec{E} = \vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)} + \vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)} \tag{3}$$

Zirkulare Polarisation nach der Platte bedeutet nun für den Phasenunterschied zwischen x- und y- Komponente:

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi_{y-x} &= -kdn_y - (-kdn_x) \\
&= kd(n_x - n_y) \\
&= kd\left(1 - \frac{a}{\omega_0 + \delta - \omega_0 + \Delta} - \left(1 - \frac{a}{\omega_0 + \delta - \omega_0 - \Delta}\right)\right) \\
&= kda\left(\frac{1}{\delta - \Delta} - \frac{1}{\delta + \Delta}\right) \\
&= \frac{2kda\Delta}{\delta^2 - \Delta^2} \stackrel{!}{=} \begin{cases} +\frac{\pi}{2} + 2n\pi & \text{rechtszirkular} \\ -\frac{\pi}{2} + 2n\pi & \text{linkszirkular} \end{cases} \\
\Rightarrow \delta &= \pm\sqrt{\Delta^2 + \frac{2kda\Delta}{(2n \mp \frac{1}{2})\pi}}
\end{aligned}
$$

wobei n = 0, ±1, ...



Die Lösungen häufen sich also um Werte nahe Δ. Zudem sind die Lösungen symmetrisch verteilt (z.B. zu a gehört a′, zu b gehört b′).