Lösungen zur Experimentalphysik III

Wintersemester 2008/2009

Prof. Dr. L. Oberauer — Blatt 11 — 19.01.09

Aufgabe 1:

a) Die Bedingung für ein Maximum erster Ordnung am Gitter ist:

$$sin\alpha = \frac{\lambda}{b}$$

$$\text{mit} \quad b = \frac{10^{-3}}{570}m = 1.754 \cdot 10^{-6}m$$

Die Quecksilberlinien liegen zwischen $\lambda_{min} = 404.7\,\text{nm}$ und $\lambda_{max} = 579.1$ nm, womit wir für den Winkelbereich erhalten:

$$sin\alpha_{min} = \frac{404.7 \cdot 10^{-9}}{1.754 \cdot 10^{-6}} = 0.2307$$

$$\Rightarrow \alpha_{min} = 13.34°$$

$$sin\alpha_{max} = \frac{579.1 \cdot 10^{-9}}{1.754 \cdot 10^{-6}} = 0.3302$$

$$\Rightarrow \alpha_{max} = 19.28°$$

b) Da die Grenzwellenlänge für die verwendete Kalium-Kathode 551 nm beträgt, tritt der Photoeffekt nur für die Linien auf, deren Wellenlänge unter 551 nm liegt (Die Energie der Strahlung ist dann größer als die Austrittsarbeit). Dies sind die Linien (in nm): 546.1, 491.6, 435.8, 407.8, 404.7 .

c) Die entstehende Spannung ist die zum eingestellten Winkel - und somit zur Wellenlänge - passende Gegenspannung. Die freigewordenen Elektronen bewegen sich zu der, der Photoschicht gegenüber liegenden, Ringelektrode und laden diese negativ auf, was ein Gegenfeld aufbaut. Die ausgeschlagenen Photoelektronen haben maximal eine kinetische Energie, die der Photonenergie minus der Austrittsarbeit der Kathode entspricht. Das Gegenfeld wird solange aufgebaut, bis keine Elektronen mehr zur Ringanode gelangen können, da auch die schnellsten Elektronen abgebremst werden. Für die maximale kinetische Energie der

Elektronen gilt also:

$$W_{kin} = W_{Photon} - W_{Austritt} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{Grenz}}$$

$$\text{mit} \quad \lambda = b\, sin\alpha = 407.8\, nm$$

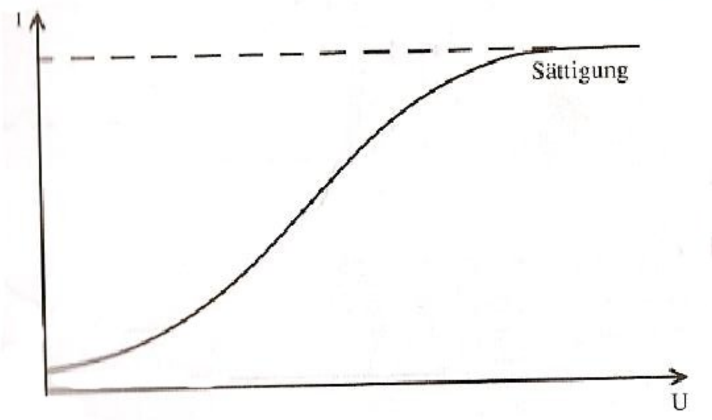
$$\Rightarrow W_{kin} = 3.05\, eV - 2.25\, eV = 0.8\, eV$$

Die Gegenspannung ist also 0.8 V.

d) Wir suchen also den Winkel α_2 für das Maximum zweiter Ordnung am Gitter für die Wellenlänge 407.8 nm:

$$b\, sin\alpha_2 = 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 27.70°$$

e) Das UI-Diagramm zeigt die typische Sättigungseigenschaft: Zwar steigt anfangs der Strom bei steigender Spannung, da mehr Elektronen zur Anode gelangen können, jedoch nähert er sich dann der Sättigungsgrenze, da nicht mehr als die durch den Photoeffekt freigewordenen Elektronen abgesaugt werden können.



f) Die absorbierte Leistung ist:

$$P = 20\frac{W}{m^2} \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 10\% = 10^{-4}\, W$$

Diese Leistung verteilt sich auf die Anzahl N aller Atome in dem bestrahlten Volumen V $= 0.5\, \text{cm}^2 \cdot 10\, \text{nm}$:

$$N = \frac{\rho V}{m_{Kalium}} = 6.6 \cdot 10^{15}$$

Die gesamte in der Zeit t eingestrahlte Energie $P \cdot t$ muss ausreichen, um pro Atom die Austrittsarbeit überwinden zu können:

$$\begin{aligned} \frac{Pt}{N} &= W_a \\ \Rightarrow t = &= \frac{NW_a}{P} = 24\,s \end{aligned}$$

g) Der Photoeffekt tritt eben nicht erst nach einer halben Minute sondern sofort ein. Man wendet sich beim Photoeffekt vom Wellenbild des Lichts ab und interpretiert Licht als Strom von Photonen, also Teilchen. Diese Teilchen werden beim Photoeffekt von einzelnen Atomen absorbiert, was zur Emission der Elektronen führt.

h) Die Rate n der pro Sekunde absorbierten Photonen beträgt:

$$n = \frac{P}{E_{Ph}} = \frac{P}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{P\lambda}{hc}$$

wobei $P = 10^{-4}$ W die absorbierte Leistung ist. Die Anzahl der pro Sekunde freigesetzten Elektronen n_{frei} ist:

$$n_{frei} = \frac{n}{10^4}$$

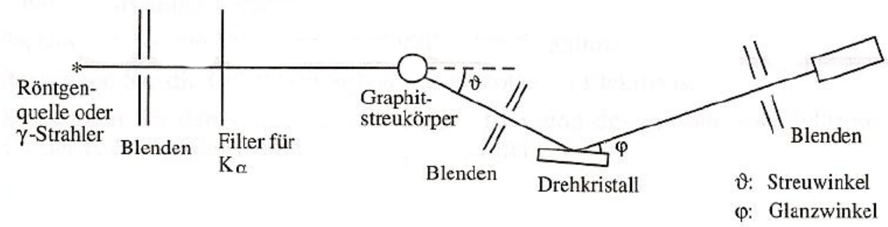
Für den Strom gilt dann:

$$J = n_{frei} \cdot e = 3.3\,nA$$

wobei e die Elementarladung ist.

Aufgabe 2:

a)



Trifft Röntgenstrahlung auf einen Streukörper (z.B. Graphit oder Plexiglas), so kann unter verschiedenen Winkeln zur ursprünglichen Richtung Strahlung nachgewiesen werden, deren Wellenlänge um einen gewissen Wert $\Delta\lambda$ größer ist als die ursprüngliche Strahlung. Mit zunehmendem Streuwinkel ϑ nimmt auch $\Delta\lambda$ zu. Die Wellenlängenänderung ist unabhängig vom Streumaterial. Die Wellenlängenmessung des Streulichtes erfolgt zum Beispiel mit der Drehkristallmethode nach Bragg.

b) Die Compton-Beziehung lautet:

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - cos\vartheta)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - cos90°) = \lambda_c$$

mit der Comptonwellenlänge[1] des Elektrons $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$. Die Wellenlänge der einfallenden Strahlung wird nach der Aufgabenstellung verdoppelt:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + \Delta\lambda = 2\lambda \\ \Rightarrow \lambda &= \Delta\lambda = \lambda_c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{3 \cdot 10^8}{2.42 \cdot 10^{-12}} \, Hz = 1.2 \cdot 10^{20} \, Hz$$

[1] Die Comptonwellenlänge eines Teilchens eintspricht der Wellenlänge, die ein Photon hat, wenn es als Energie die Ruheenergie des entsprechenden Teilchens trägt.

c) Es sei m_0 im Folgenden immer die Ruhemasse des Elektrons. Das einfallende Photon hat die Energie E, die Streustrahlung die Energie E':

$$\begin{aligned} E &= \frac{hc}{\lambda_c} \\ E' &= \frac{hc}{2\lambda_c} \end{aligned}$$

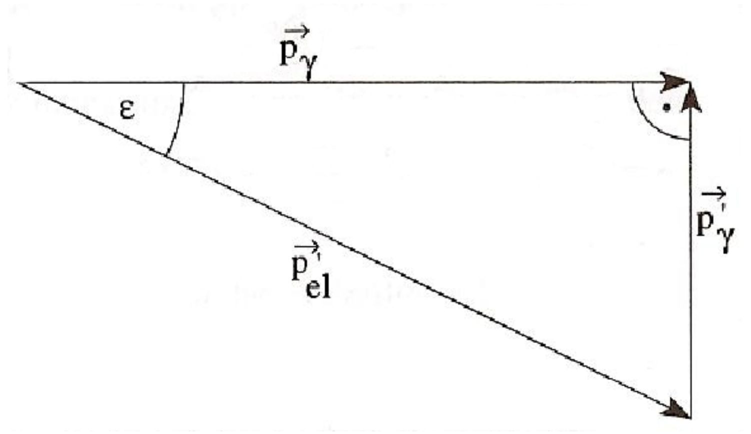
Die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß (vorher ruhend) ist:

$$W_{kin} = E - E' = \frac{1}{2}\frac{hc}{\lambda_c} = \frac{1}{2}m_0c^2 = \frac{1}{2}\cdot 511\,keV \tag{1}$$

Die kinetische Energie des Elektrons ist also in der gleichen Größenordnung wie die Ruhemasse! Da wir es somit mit Energien zu tun haben, bei denen wir nicht mehr klassisch, also nicht-relativistisch ($p = \sqrt{2mE}$), rechnen dürfen, müssen wir die genaue relativistische Energiebeziehung verwenden und können aus der Gesamtenergie die Geschwindigkeit berechnen (siehe hierzu auch im Anhang):

$$\begin{aligned} E - E_0 &= E_{kin} \\ mc^2 - m_0c^2 &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}m_0c^2 \\ \gamma m_0c^2 - m_0c^2 &= \frac{1}{2}m_oc^2 \\ \gamma &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \beta &= \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \Rightarrow v &= \frac{\sqrt{5}}{3}c = 2.2\cdot 10^8\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

d)



Aus der Impulserhaltung folgt:

$$\vec{p_\gamma} \quad = \quad \vec{p}_{\gamma'} + \vec{p}_{e'}$$

$$\Rightarrow tan\epsilon \quad = \quad \frac{p_{\gamma'}}{p_\gamma} = \frac{\frac{h}{\lambda'}}{\frac{h}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

$\epsilon = 27°$

Aufgabe 3:

a) Wir verwenden das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$R = \frac{P}{A} \quad = \quad \sigma T^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \cdot (3000\, K)^4 = 4.59 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$$

Wobei A die Oberfläche des Sterns ist. Verwenden wir für eine Abschätzung als Radius eines Roten Riesen eine astronomische Einheit AE (mittlere Entfernung Sonne-Erde), was in etwa der Ausdehnung der Sonne entsprechen wird, wenn sie dem Ende ihres Lebens näher kommt. $1\,\mathrm{AE} = 15 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$. Als Gesamtleistung P erhalten wir somit ungefähr:

$$R \cdot 4\pi r^2 \quad = \quad 1.30 \cdot 10^{30}\, W$$

Die Strahlungsleistung der Sonne beträgt übrigens etwa $3.8 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$.

b) Die maximale Wellenlänge λ_{max} berechnet sich über das Wiensche Gesetz:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{2.9 \cdot 10^{-3}\, Km}{3000\, K} = 967\, nm$$

c) Der Bruchteil der Strahlung im sichtbaren Licht sei r:

$$r = \frac{R_{Licht}}{R}$$

Die Integration des Planckschen Strahlungsgesetzes über den sichtbaren Spektralbereich liefert den Wert für R$_{Licht}$:

$$R_{Licht} = \int_{300\,nm}^{700\,nm} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda \tag{2}$$

Im Nenner können wir die 1 weglassen, da:

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 3 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{7 \cdot 10^{-7}\,m \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 3000\,K} = 6.8$$

$$\text{da} \quad e^{6.8} \approx 900 \gg 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \approx e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}$$

$$\Rightarrow R_{Licht} = \int_{300\,nm}^{700\,nm} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}} d\lambda$$

Wir substituieren nun:

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} = x$$

$$d\lambda = -\frac{hc}{k_B T x^2} dx$$

$$\Rightarrow R_{Licht} = -2\pi \frac{k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_{12}^{7} \frac{x^3}{e^x} dx$$

Dieses Integral kann man mit folgender Formel lösen:

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^{n+1}} \left[(ax)^n - n(ax)^{n-1} + n(n-1)(ax)^{n-2} - ... + (-1)^n n! \right] \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

$$\Rightarrow R_{Licht} = -2\pi \frac{k_B^4 T^4}{h^3 c^2} e^{-x} \left[x^3 + 3x^2 + 6x + 6 \right]_{12}^{7} = 0.3339 \cdot 10^6 \, \frac{W}{m^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{R_{Licht}}{R} = 7.3\,\%$$

Zusatz: Relativistische Kinematik II

Auf einem der vorigen Übungsblatter haben wir einen kleinen Exkurs in die relativistische Energie-Impuls-Beziehung gemacht. Hier folgt noch ein kleiner Zusatz, der direkt an das Thema anknüpft.

In Aufgabe 2 haben wir eine relativistische Beziehung verwendet, die euch bislang vermutlich unbekannt war:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

m_0 ist hierbei die Ruhemasse des Teilchens und m die relativistische Masse. Bei hohen Geschwindigkeiten (als Faustregel gilt etwa ab 1 % der Lichtgeschwindigkeit) geht nicht mehr die volle zugeführte Energie (sei es durch ein beschleunigendes elektrisches Feld o.Ä.) in die Geschwindigkeit, sondern ebenso in eine Erhöhung der Masse des Teilchens! Schnelle Teilchen haben also eine Masse m, die größer ist, als ihre Ruhemasse m_0. Dies beschreibt der Faktor γ. Berechnen lässt sich γ über eine weitere Hilfsvariable β:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta &= \frac{v}{c} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{aligned}$$

Die Variable β beschreibt also die Geschwindigkeit des Teilchens relativ zum Lichtgeschwindigkeit.
Damit kann man sich übersichtsweise im allgemeinen relativistischen Fall aufschreiben:

$$E = E_0 + E_{kin} = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2 c^4} = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} m_0 c^2$$