Lösungen zur Experimentalphysik III

Wintersemester 2008/2009

Prof. Dr. L. Oberauer — Blatt 1 — 20.10.08

Vorüberlegung:

Überlegt man sich im Vorfeld eine allgemeine Formel für $\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2}$, lassen sich die ersten beiden Aufgaben in zwei Zeilen lösen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(u)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u)}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Der zweite Term wird für lineare Funktionen der Form u = x ± vt immer Null.

Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -E_0 sin(k(x-ct)) \cdot k^2 \\
\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= -E_0 sin(k(x-ct)) \cdot k^2 c^2 \\
&\Rightarrow \surd \qquad (2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x \pm vt)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f(x \pm vt)}{\partial (x \pm vt)^2} \\
\frac{\partial^2 f(x \pm vt)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 f(x \pm vt)}{\partial (x \pm vt)^2} \cdot (\pm v)^2 \\
&\Rightarrow \surd \qquad (3)
\end{aligned}$$

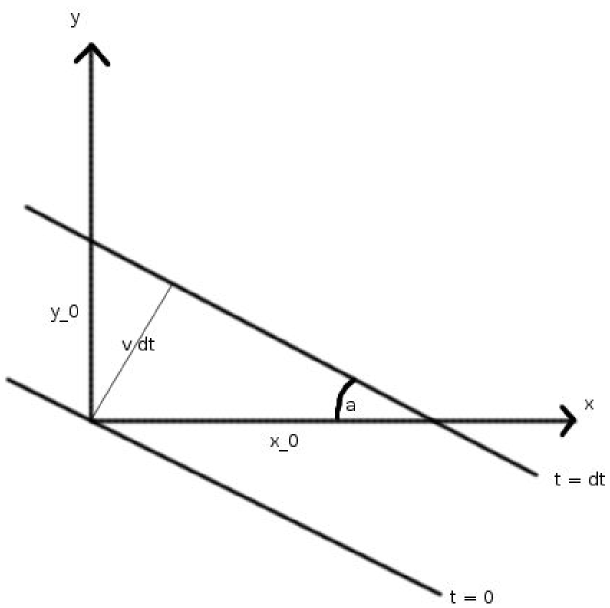
Aufgabe 3:

a) Wir betrachten die Orte gleicher Phase der Welle:

$$\begin{aligned} t = 0: &\qquad -k_x x - k_y y = 0 \;\rightarrow y = -\frac{k_x}{k_y}x \\ t = dt: &\qquad \omega dt - k_x x - k_y y = 0 \rightarrow y = -\frac{k_x}{k_y}x + \frac{\omega}{k_y}dt \end{aligned} \tag{4}$$

Die Achsenabschnitte x_0 und y_0 berechnen sich für t = dt zu:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\omega}{k_x}dt \\ y_0 &= \frac{\omega}{k_y}dt \end{aligned} \tag{5}$$



Die Fortpflanzungsrichtung der Welle ist senkrecht zur Ebene gleicher Phase und somit folgt:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$$

Aus der Zeichnung kann man direkt ablesen:

$$sin\alpha = \frac{vdt}{\frac{\omega}{k_x}dt} = \frac{vk_x}{\omega}$$
$$cos\alpha = \frac{vdt}{\frac{\omega}{k_y}dt} = \frac{vk_y}{\omega} \tag{6}$$

Daraus folgt wegen $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$:

$$1 = \frac{v^2}{\omega^2}(k_x^2 + k_y^2)$$
$$v = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

Das Ergebnis kann man natürlich auch direkt hinschreiben, wenn man die Relation $v = \frac{\omega}{k}$ auswendig weiß.

b) Wir können s(x,y,t) einfacher schreiben, wenn man folgende Relation benutzt:

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sin\alpha \cdot sin\beta$$

$$\Rightarrow \quad cos(\omega t - k_x x \mp k_y y) = cos(\omega t - k_x x)cos(k_y y) \pm sin(\omega t - k_x x)sin(k_y y)$$

$$\Rightarrow \quad s(x,y,t) = 2cos(\omega t - k_x x)cos(k_y y)$$

Wir erhalten also einen zeitabhängigen Teil, der eine in x-Richtung laufende Welle beschreibt, und einen zeitunabhängigen Teil, der eine stehende Welle in y-Richtung darstellt. Die Amplitude der Welle in x-Richtung ist also moduliert mit der stehenden Welle.

Aufgabe 4:

Die Definition der Intensität ist: $I =< |\vec{S}| >$
Somit folgt mit:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= c^2\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 cos(kx - \omega t) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 cos(kx - \omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

direkt die Formel für die Intensität:

$$\begin{aligned} I = <|\vec{S}|> &= c^2\epsilon_0 \cdot |\vec{E}_0 \times \vec{B}_0| \cdot < cos^2(kx-\omega t) > \\ &= c\epsilon_0 E_0^2 \cdot < cos^2(kx-\omega t) > \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $< cos^2(kx-\omega t) >= \frac{1}{2}$. Dazu mitteln wir das Integral über den cos (Die Zeit T erstreckt sich hierbei über mehrere Perioden):

$$\begin{aligned} < cos^2(kx-\omega t) > &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} cos^2(kx-\omega\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{1}{2}(1+cos(2kx-2\omega\tau))d\tau \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega T}(sin(2kx-2\omega(t+T)) - sin(2kx-2\omega t)) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im ersten Schritt verwendet, dass $cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+cos(2\alpha))$ und im letzten Schritt, dass $T\omega \gg 1$ (da wir für eine Mittelung ja mehrere Perioden lang mitteln). Somit gilt also:

$$I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 \tag{8}$$

Aufgabe 5:

Also: Welche Zeit braucht das Licht für 6 km?

$$t = \frac{s}{c} = 20\mu s \tag{9}$$

Das ist übrigens um einen Faktor 10^4 kleiner als die menschliche Reaktionszeit von 0.2 s.