Lösungen zur Experimentalphysik III

Wintersemester 2008/2009

Prof. Dr. L. Oberauer | Blatt 3 | 03.11.08

Aufgabe 1:

a) Die Feldstärke des Protons im Abstand des Elektrons ergibt sich aus dem Coulomb Gesetz:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r^2} = 5.76 \cdot 10^{11}\frac{V}{m}$$

Im Vergleich zum Laser:
Wir hatten auf Blatt 1 bereits gefunden, dass für die Intensität einer elektromagnetischen Welle gilt:

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2$$

$$\Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2p}{A\epsilon_0 c}} = 4.9 \cdot 10^3\frac{V}{m}$$

wobei p die angegebene Leistung und A die Fläche des Lichtbündels ist. Das Feld des Protons ist also um einen Faktor 10^8 größer!
Die maximale Kraft auf das Elektron aufgrund dieses elektrischen Feldes ist:

$$F_{el} = eE_0 = 8 \cdot 10^{-16} N$$

Für das Magnetfeld und damit für die maximale Kraft auf das Elektron aufgrund der Lorentzkraft:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 1.6 \cdot 10^{-5}\frac{N}{Am}$$

$$\Rightarrow F_L = evB_0 = \frac{v}{c}F_{el} = 5.8 \cdot 10^{-18}$$

Hierbei wurde verwendet, dass für die Geschwindigkeit des Elektrons auf der Bohrschen Bahn $\frac{v}{c} = \alpha = \frac{1}{137}$ gilt.

b) Für eine homogene Ladungsverteilung in einer Kugel mit Radius R zu einem Punktladungspotential $\sim \frac{1}{r}$ gilt, dass der Beitrag des Feldintegrals für alle Raumpunkte auf einer

Kugel mit Radius r außerhalb von r verschwindet, während der Beitrag innerhalb von r der im Zentrum zusammengefassten Teilladung entspricht:

$$q(r) = e \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Hieraus ergibt sich eine (lineare) Rückstellkraft von:

$$F_R = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e \cdot q(r)}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^3} \cdot r$$

b) Bei der zweiten Möglichkeit lässt man das Elektron im Feld des Protons kreisen und hält den Drehimpuls konstant: Hierfür betrachtet man die klassische Gesamtkraft F_{ges} auf das Elektron:

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_{Coulomb} + F_{Zentrifugal} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \end{aligned}$$

wobei L = mvr der Drehimpuls des Elektrons ist. Diese Kraft soll im stationären Fall 0 sein und somit erhalten wir einen Abstand a von:

$$F_{ges}(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{me^2}$$

Um kleine Verschiebungen gegen diese Ruhelage zu betrachten, benutzen wir eine Taylorentwicklung um a, wobei L konstant gehalten wird. Da die Verschiebung (r-a) klein ist, reicht eine Entwicklung um a bis zum ersten Glied:

$$\begin{aligned} F(r) &= \underbrace{F(a)}_{=0} + (r-a)F'(a) \\ &= (r-a)\left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} - \frac{3L^2}{ma^4}\right) \\ &= \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} - \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}\right)(r-a) \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}(r-a) \end{aligned}$$

Die Kraft geht also linear mit der Auslenkung.

c) Die Bewegungsgleichung eines getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators setzt sich zusammen aus:

- $m\ddot{x}$ = Trägheitskraft
- $k\dot{x}$ = Reibungskraft

- Dx = Rückstellkraft
- $F_0 \cos(\omega t)$ = treibende Kraft

Für unseren Fall ergibt sich:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

d) Wir wählen den Ansatz:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{i(w' t+\theta)} \\ \rightarrow \dot{x} &= x_0 i\omega' e^{i(w' t+\theta)} \\ \rightarrow \ddot{x} &= -x_0 \omega'^2 e^{i(w' t+\theta)} \end{aligned}$$

Damit lautet die Differentialgleichung:

$$-\omega'^2 + i\omega'\gamma + \omega_0^2 = \frac{F_0}{x_o m} e^{i((\omega-\omega')t-\theta)}$$

Die linke Seite ist von t unabhängig. Somit muss die rechte dies auch sein, was zur Folge hat, dass $\omega' = \omega$. Die erzwungene Schwingung hat also die gleiche Frequenz wie die treibende Kraft. Mit Zerlegung in Real- und Imaginärteil folgt wegen $e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta$:

$$\begin{aligned} cos\theta &= \frac{x_0 m}{F_0}(\omega_0^2 - \omega^2) \\ sin\theta &= \frac{-x_0 m}{F_0}\omega\gamma \\ \Rightarrow tan\theta &= \frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (1) \end{aligned}$$

aus $sin^2 + cos^2 = 1$ folgt für die Amplitude:

$$x_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \qquad (2)$$

e) Aus der Abbildung erkennt man, dass bei kleinen Erregerfrequenzen die erzwungene Schwingung in Phase mit der treibenden Schwingung ist. Bei der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ (in der Zeichnung ist $\omega_0 = 3$ und $\gamma = 1$) ist die erzwungene Schwingung genau um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben und hat die höchste Amplitude. Danach fällt die Amplitude wieder ab, da

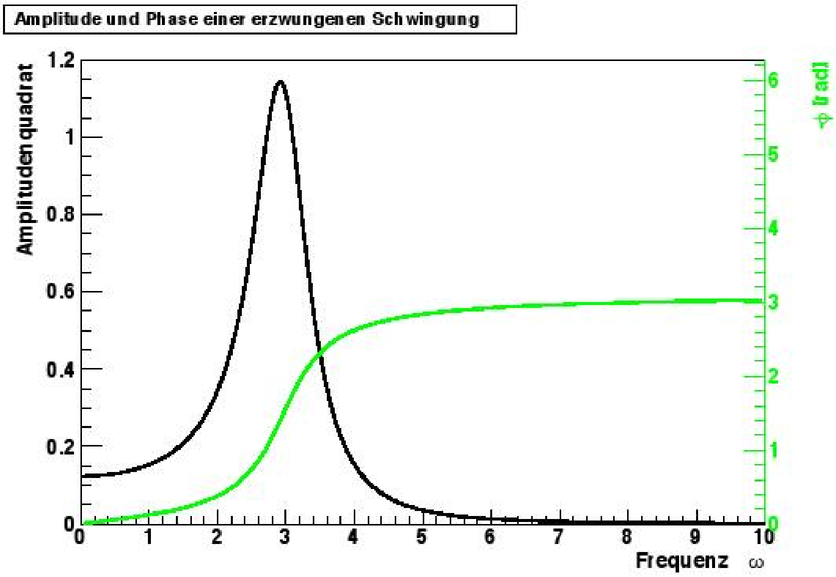


Abbildung 1: Erzwungene Schwingung mit $\omega_0 = 3, \gamma = 1$

der Oszillator der Erregerfrequenz nicht folgen kann, und es stellt sich eine Phasenverschiebung von π ein.

f) Wirkt auf ein Elektron die Kraft eines harmonisch variierenden elektrischen Feldes $F(t) = -eE(t) = -eE_0 cos(\omega t)$, so gilt für die Auslenkung wie vorhin gezeigt:

$$x(t) = \frac{-eE_0}{m_e\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} cos(\omega t + \varphi)$$

wobei φ durch Gleichung 1 in d) gegeben ist. Die dielektrische Verschiebung ergibt sich somit zu:

$$D(t) = \epsilon_0 E(t) + P(t) = E_0 \left(\epsilon_0 \cdot cos(\omega t) + \frac{\frac{Ne^2}{m_e} cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \right)$$

D(t) ist ein Feld, das mit der gleichen Frequenz wie E(t) und x(t) harmonisch variiert mit einer Phasenverschiebung φ' gegenüber E(t) und einer modifizierten Amplitude. Wegen der Phasenverschiebung kann man den Zusammenhang von D(t) und E(t) nicht als Faktor beschreiben. Allerdings hilft der Übergang zur Fourierdarstellung:

$$\begin{aligned} D(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} D(t) dt \\ &= \epsilon_0 E(\omega) + E_0 \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} cos(\omega' t + \varphi) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Hier wurde die Plasmafrequenz $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}$ definiert. Mit (siehe Anhang)

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(\omega' t + \varphi) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} cos(\omega' t) e^{-i\omega t} e^{-i\varphi} dt$$

folgt:

$$D(\omega) = \epsilon_0 \left(E(\omega) + \frac{\omega_p^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} E(\omega) e^{-i\varphi} \right)$$

Man kann nun $D(\omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) E(\omega)$ mit einer komplexen Dielektrizitätskonstante ansetzen:

$$D(\omega) = \epsilon_0 E(\omega) \left(1 + \omega_p^2 \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \right)$$

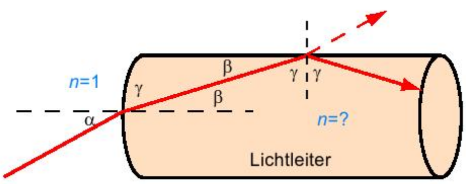
Trennt man wieder Real- und Imaginärteil und setzt die Gleichungen für x_0 und φ aus Teil d) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} Re(\epsilon(\omega)) &= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \\ Im(\epsilon(\omega)) &= \frac{\omega_p^2 \omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \end{aligned}$$

g) Die Atome im Festkörper können nicht unabhängig voneinander behandelt werden, wie für das dünne Gas geschehen. Das heißt, benachbarte Dipole beeinflussen sich gegenseitig. Die Schwingungen der Elektronen können an die Festkörperstruktur übertragen werden und das einfallende Licht somit in Wärme umgewandelt werden.

Aufgabe 2:

Wir benutzen wieder zweimal das Snellsche Brechungsgesetz, einmal für den Eintritt in



das Medium und einmal für die Reflexion an der Innenseite. Hierfür benutzen wir auch gleich die Totalreflexion an der Innenseite und dass $\beta = 90° - \gamma$.

$$1) \quad sin\alpha = nsin\beta$$

$$2) \quad nsin\gamma = ncos\beta = 1$$

$$mit \ \ cos^2 + sin^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad sin\alpha = \sqrt{n^2 - 1}$$

Wenn alle einfallenden Strahlen weitergeleitet werden sollen, so auch für $\alpha = 90°$. Also folgt, dass n > 1.414 erfüllt sein muss. Sei n = 1.33, so bekommt man aus der letzten Gleichung $\alpha = 61.3°$.
Die numerische Apertur ist gegeben durch nsinα, wobei α der Winkel zwischen der optisen Achse und dem Randstrahl des Lichtkegels ist, der noch in den Lichtleiter einzutreten vermag. Also ist die numerische Apertur in unserem Fall $1 \cdot sin\alpha = 0.877$. Man sieht, dass man die numerische Apertur erhöhen kann, wenn man ein Material mit n > 1 vorschaltet. Dies ist wichtig, da die numerische Apertur direkt mit dem Auflösungsvermögen zusammenhängt über $x_{min} = \frac{\lambda}{nsin\alpha}$. Wir werden uns auf den folgenden Übungsblättern noch mit Auflösungsverhalten von optischen Instrumenten beschäftigen.

Aufgabe 3:

a) Der Streuquerschnitt an den einzelnen Luftmolekülen hat eine Frequenzabhängigkeit, die der Diploschen Strahlungscharakteristik entspricht und ist somit proportional zu $\omega^4 sin^2\vartheta$. Daher wird blaues Licht in trockener Luft stärker gestreut als rotes.
Die Streuung an Wassertropfen folgt dieser Charakteristik nicht. Vielmehr ist dies eine diffuse Streuung an den verschieden großen Wassermolekülen. Die stärkere Streuung des blauen Lichts ist hier nicht mehr gegeben.

b) Licht ist eine rein transversale Welle und regt dementsprechend nur Schwingungn transversal zur Einfallsrichtung an ($sin^2\vartheta$). Das ausgesendete Licht hat keine Komponente in der ursprünglichen Einfallsrichtung. Somit hat das Streulicht, dessen Richtung mit der Sonnenrichtung einen 90° Winkel bildet, eine lineare Polarisation senkrecht zur Streuebene.

c) Bei sehr schrägem Einfall des Sonnenlichts in der Dämmerung wird das Licht zum optisch dichteren Medium hingebeugt, und zwar das rote Licht stärker als das blaue. Da der Effekt mit dem Untergehen zunimmt, erscheint die Sonne abgeplattet. Zusätzlich wird der blaue Anteil stärker herausgestreut.

Anhang:
Zu Aufgabe 1f) Dieser Schritt des Integralübergangs ist durch eine Substitution $\omega' t + \varphi = \omega' t^*$ einfach nachzuvollziehen, aber nur wenn $\omega = \omega'$. Denn es folgt (unter Vernachlässigung

aller Vorfaktoren):

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(\omega' t + \varphi) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\varphi \frac{\omega}{\omega'}} \int_{-\infty}^{\infty} cos(\omega' t^*) e^{-i\omega t^*} dt^*$$

Das Ergebnis gilt also wirklich nur, wenn $\omega = \omega'$. Man kann allerdings zeigen, dass das Integral sich als Deltafunktion schreiben lässt und somit nur $\omega = \omega'$ physikalisch Sinn macht:

$$\begin{aligned}
\int cos(\omega' t + \varphi) e^{-i\omega t} dt &= \int (e^{i(\omega' t + \varphi)} + e^{-i(\omega' t + \varphi)}) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int e^{i(\omega' - \omega)t} e^{i\varphi} dt + \int e^{-i(\omega' + \omega)t} e^{-i\varphi} dt \\
&= e^{i\varphi} \delta(\omega' - \omega) + e^{-i\varphi} \delta(\omega' + \omega)
\end{aligned}$$

Die beiden Lösungen sind übrigens äquivalent, da der cos symmetrisch ist und somit das Paar (ω, φ) das gleiche Ergebnis ergibt, wie das Paar $(-\omega, -\varphi)$.

Zu Aufgabe 1b) Ich bin von mehreren Leuten gefragt worden, warum es einen Unterschied von einem Faktor 2 macht, ob man die Ladungsverteilung $q(r) = e\frac{r^3}{R^3}$ in die Kraft einsetzt

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)e}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^3} r$$

im Vergleich dazu, wenn man q(r) in das bekannte Coulombpotential

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r}$$

einsetzt und dann mit $F(r) = -e\nabla V(r)$ die Kraft ableitet.
Die Sache ist die, dass man bei der Kraft ganz explizit sagen kann, dass alle Kräfte sich aufheben, die außerhalb der Kugelschale liegen und somit in der Kraft einfach nur die Teilladung ansetzen darf. Das Coulombpotential mit dieser Teilladung zu verwenden ist aber erstmal nicht richtig. Um auf das richtige Potential zu kommen muss man die Poissongleichung für die Ladungsdichte lösen. Die Poissongleichung lautet:

$$\triangle V(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r)$$

wobei $\rho(r)$ die Ladungsdichte ist. Da wir aber die Ladung e konstant auf die gesamte Elektronenwolke verteilen ist $\rho(r) = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ und somit unabhängig von r. Damit können wir die Gleichung lösen:

$$\begin{aligned}
\triangle V(r) &= -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{3e}{4\pi R^3} \\
\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rV(r)) &= -\frac{3e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\
\frac{d^2}{dr^2}(rV(r)) &= -\frac{3er}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\
\frac{d}{dr}(rV(r)) &= -\frac{3er^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} \\
rV(r) &= -\frac{er^3}{8\pi\epsilon_0 R^3} \\
V(r) &= \frac{e}{8\pi\epsilon_0 R^3}r^2
\end{aligned}$$

Hier seht ihr, dass das Potential, was man für diesen Fall verwenden muss aben genau den Faktor 2 noch im Nenner stehen hat (nämlich ein 8π und kein 4π).