Lösungen zur Experimentalphysik III

Wintersemester 2008/2009

Prof. Dr. L. Oberauer | Blatt 6 | 24.11.08

Aufgabe 1:

a) Die Vergrößerung einer Lupe beträgt:

$$v = \frac{s}{f} \qquad \Rightarrow f = \frac{s_0}{v} = 2,5\,cm$$

b) Die Brennweite einer dünnen plankonvexen Linse lässt sich einfach aus der Formel für dünne Linsen berechnen, in der ein Radius gegen unendlich geht:

$$\frac{1}{f_i} = (n-1)\left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}}\right)$$

Die linke Linse (1) hat den Radius $\mathrm{r}_{11} = \mathrm{inf}$ und der zweite Radius ist $\mathrm{r}_{12} = r_1$. Radius r_1 ist hierbei allerdings negativ, was am Ende auch als Ergebnis herauskommen wird. Somit folgt für die erste Linse:

$$\frac{1}{f_1} = -(n-1)\frac{1}{r_1}$$

Bei der zweiten Linse ist es genau umgekehrt; der Radius $\mathrm{r}_{21} = r_2$, welcher positiv ist, und der $\mathrm{r}_{22} = \mathrm{inf}$:

$$\frac{1}{f_2} = (n-1)\frac{1}{r_2}$$

Setzt man dies in die Formel für die Brennweite des Linsensystems ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f} &= -\frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + \frac{(n-1)^2 d}{r_1 r_2} \\
\frac{1}{f} &= (n-1)\left(\frac{-r_2 + r_1 + (n-1)d}{r_1 r_2}\right) \\
f &= \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1 - r_2 + (n-1)d)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Die Änderung der Brennweite bei λ_0 für kleine Änderungen soll verschwinden:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{d\lambda} &= 0 \qquad \text{wobei} \;\; n = n(\lambda) \\
\frac{df}{d\lambda} &= -\frac{r_1 r_2}{Nenner^2}\left(r_1 - r_2 + d(n-1) + d(n-1)\right) = 0 \\
&\Rightarrow \;\; r_2 = r_1 + 2(n-1)d
\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung 1 ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f(n-1)(r_1 - r_1 - 2d(n-1) + d(n-1)) = r_1(r_1 + 2d(n-1)) \\
-f(n-1)d(n-1) = r_1^2 + 2d(n-1)r_1 \\
r_1^2 + 2d(n-1)r_1 + fd(n-1)^2 = 0 \\
r_{1_{1,2}} = \frac{-2d(n-1) \pm \sqrt{4d^2(n-1)^2 - 4fd(n-1)^2}}{2}
\end{aligned} \tag{2}$$

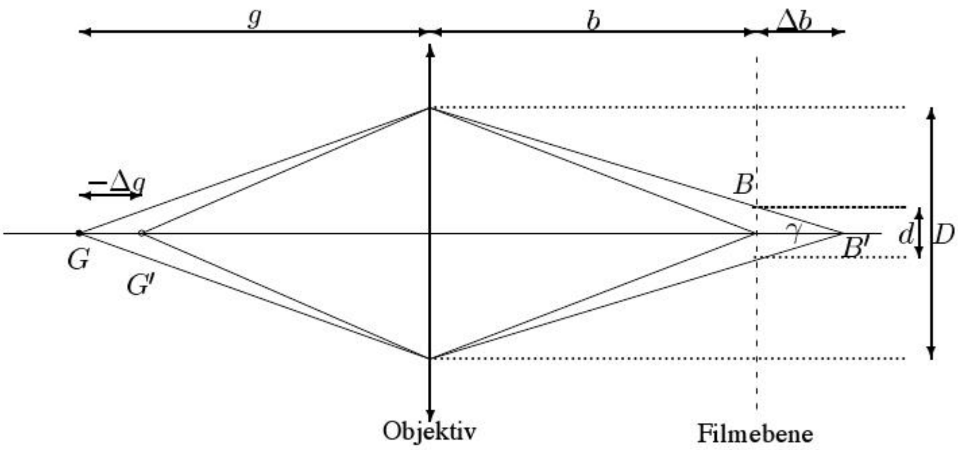
entweder gilt also:

$$\begin{aligned}
r_1 &= -1.25\,cm \\
r_2 &= 0.83\,cm
\end{aligned}$$

oder genau umgekehrt:

$$\begin{aligned}
r_1 &= -0.83\,cm \\
r_2 &= 1.25\,cm
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:



Es sei auf G in 5 m Entfernung fokussiert. Man kann durch einfache Geometrie sehen, dass:

$$tan(\frac{\gamma}{2}) = \frac{\frac{d}{2}}{\Delta b} = \frac{\frac{D}{2}}{b + \Delta b}$$

In erster Näherung b + Δb = b ergibt sich daraus:

$$\Delta b = \frac{bd}{D}$$

Da die Linsengleichung $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ gilt, können wir uns die implizite Funktion h(g,b) definieren:

$$h(g, b) = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} = 0$$

Da h für alle Paare (g,b) gleich null ist, ist auch das totale Differential dh überall null:

$$\begin{aligned} dh &= \frac{\partial h}{\partial g} dg + \frac{\partial h}{\partial b} db = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\Delta b}{b^2} + \frac{\Delta g}{g^2} = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung lösen wir nach -Δg auf und benutzen, dass wegen g ≫ f gilt, dass b ≈ f:

$$-\Delta g = \frac{g^2}{b^2} \Delta b \approx \frac{g^2}{f^2} \Delta b = \frac{g^2}{f^2} \frac{bd}{D} \approx \frac{g^2}{f^2} \frac{f}{D} d = 22.2\, cm$$

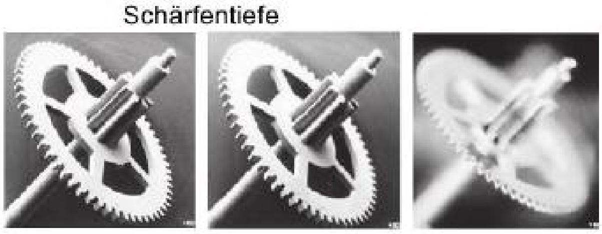
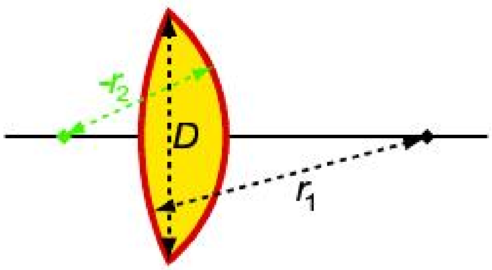


Abbildung 1: *Anschauliche Beispiele zu verschiedenen Schärfentiefen. Benutzt sind Aparturblende bei 100 µm, 200 µm und eine Lupe.*

Aufgabe 3:

a) Nach der bekannten Formel kann man aus den Radien ($r_1 = -r_2$) der Linse und des Brechungsindex des Glases die Brennweite berechnen:



$$f = \frac{1}{n-1}\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 79.8\,mm$$

b) Sei k die Blendenzahl. Das Öffnungsverhältnis ist dann duch $\frac{1}{k} = \frac{D}{f}$ gegeben. Für k = 3.5 und $f_{max} = 210\,$mm ergibt sich:

$$D = \frac{f}{k} = 60\,mm$$

c) Die Brennweiten beider Linsen sind nach Aufgabenstellung gleich, also $f_1 = f_2$. Für eine Linsenkombination mit dem Abstand der Linsen d ergibt sich wie auch schon auf vorigen Übungsblättern die Brennweite zu:

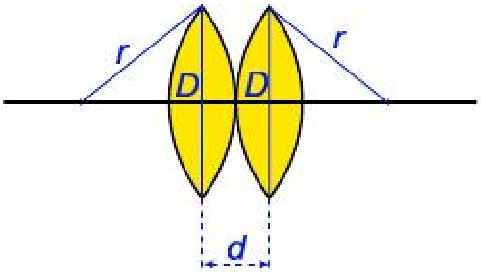
$$\begin{aligned} f &= \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{f_1^2}{2f_1 - d} \\ \Rightarrow d &= \frac{2ff_1 - f_1^2}{f} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$f_{min} = 90\,mm \qquad \Rightarrow \qquad d_{min} = 88.8\,mm$$

$$f_{max} = 210\,mm \qquad \Rightarrow \qquad d_{max} = 129.3\,mm$$

d) Der kleinste Abstand zwischen den beiden Linsen entspricht gerade der Linsendicke.



Nach Pythagoras erhalten wir:

$$\begin{aligned}\left(r - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow d^2 - 4rd + D^2 &= 0 \\ d &= 2r \pm \sqrt{4r^2 - D^2}\end{aligned}$$

Man wählt natürlich die kleinere der beiden Lösungen und erhält somit d = 10.2 mm.
Die kleinste Brennweite ist also:

$$f = \frac{f_1^2}{2f_1 - d} = 42.6\,mm$$