Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

Anwesenheitsübung - 25.Oktober 2010

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

Aufgabe 1 (★)

Welche der folgenden Funktionen beschreibt eine fortschreitende Welle? (A, B und C sind Konstanten.)

$$a)\ \psi(z,t) \;=\; Aexp(2z+3t)^2$$

Lösung:

Eine dispersionsfreie Welle in einer Dimension muss die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \;=\; 0$$

erfüllen. Das heißt, sie muss mindestens zweimal nach Ort und Zeit ableitbar sein, ohne identisch zu verschwinden. Die Ableitungen können explizit berechnet werden:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 4(2z+2t)\mathrm{Aexp}(2z+3t)^2$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 6(2z+2t)\mathrm{Aexp}(2z+3t)^2$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 8\mathrm{Aexp}(2z+3t)^2 + 16(2z+3t)^2\mathrm{Aexp}(2z+3t)^2$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 18\mathrm{Aexp}(2z+3t)^2 + 36(2z+3t)^2\mathrm{Aexp}(2z+3t)^2$$

Setzt man dies in die Wellengleichung ein, so erhält man:

$$4(2+4(2z+3t)^2) = \frac{1}{v^2}9(2+4(2z+3t)^2)$$

$$\rightarrow v = \left|\frac{3}{2}\right|$$

Es handelt sich also um eine fortschreitende Well mit Geschwindigkeit $v = \left|\frac{3}{2}\right|$.
Alternativ kann man fordern, dass die Ausbreitung in ±z-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit

v erfolgt und die Welle zeitlich unverändert erscheint, wenn man sie aus einem Bezugssystem betrachtet, das sich mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt:

$$\psi(z,t) = \psi(z \pm vt, 0)$$

Die Gleichung kann nun umgeschrieben werden zu:

$$\psi(z,t) = \mathrm{Aexp}(2z+3t)^2 = \mathrm{Aexp}(4(z+\frac{3}{2}t)^2)$$

sodass sich sofort ergibt, dass sich die Welle mit Geschwindigkeit $v = \frac{3}{2}$ in die negative z-Richtung fortbewegt.

b) $\psi(z,t) \;=\; A(z+t+B$

Lösung:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = A$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = A$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

Die Gleichung verschwindet identisch in der zweiten Ableitung; es handelt sich also nicht um eine fortschreitende Welle.

c) $\psi(z,t) \;=\; AsinB(z^2 - Ct^2)$

Lösung:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \mathrm{2ABzcosB}(z^2 - Ct^2)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \mathrm{-2ABCtcos}(z^2 - Ct^2)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \mathrm{2ABcosB}(z^2 - Ct^2) - \mathrm{A(2Bz)^2sinB}(z^2 - Ct^2)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \mathrm{-2ABCcosB}(z^2 - Ct^2) - \mathrm{A(2BCt)^2sinB}(z^2 - Ct^2)$$

Setzt man dies in Wellengleichung ein, wird schnell klar, dass es sich hier nicht um eine fortschreitende Welle handelt.

Aufgabe 2 (★★)

a) Finden Sie einen Ausdruck für das Profil einer harmonischen Welle $\psi(x, t = 0)$, welche sich derart ausbreitet, dass $\psi(0, 0)$= 10, $\psi(\frac{\lambda}{6}, 0)$= 20 und $\psi(\frac{5\lambda}{12}, 0)$= 0.

Lösung:

Eine harmonische Welle kann durch eine Sinusfunktion dargestellt werden:

$$\psi(x,t) = \mathrm{Asin}(kx - \omega t + \epsilon)$$

Hier ist ϵ ein beliebiger Phasenfaktor, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist die Wellenzahl und ω die Kreisfrequenz. Zur Zeit t ist dann gegeben:

$$\psi(x,0) = \mathrm{Asin}(kx + \epsilon)$$

Nun kann man die angegebenen Werte einsetzen:

$$\begin{aligned} \psi(0,0) &= \mathrm{Asin}(\epsilon) = 10 \\ \psi(\frac{\lambda}{6},0) &= \mathrm{Asin}(\frac{\pi}{3} + \epsilon) = 20 \\ \psi(\frac{5\lambda}{12},0) &= \mathrm{Asin}(\frac{5\pi}{6} + \epsilon) = 0 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt:

$$\sin(\frac{\pi}{3} + \epsilon) = 2\sin(\epsilon)$$

Beim Lösen für ϵ verwendet man das Additionstheorem:

$$\begin{aligned} \sin(\frac{\pi}{3})\cos(\epsilon) + \cos(\frac{\pi}{3})\sin(\epsilon) &= 2\sin(\epsilon) \\ \tan(\epsilon) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{2 - \cos(\frac{\pi}{3})} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dies ergibt $\epsilon = \frac{\pi}{6}$ und A = 20. Die 3. Gleichung ist zur Berechnung von A nicht notwendig, muss aber erfüllt sein. Damit hat das Wellenprofil die Form:

$$\psi(x,0) = 20\sin(kx + \frac{\pi}{6})$$

b) Wie lautet die Gleichung der entsprechenden Welle, die sich mit Geschwindigkeit v = $2\,\frac{m}{s}$ in positiver x-Richtung fortbewegt?

Lösung:

Hierzu ersetzt man einfach x durch $x \pm vt$, oder in diesem Fal durch $x - 2t$. Dann:

$$\psi(x,t) = 20\sin(kx - 2kt + \frac{\pi}{6})$$