Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

Übungsblatt 2 - 1. November 2010

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

Aufgabe 1 ($\bigstar$)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $F(k)$ der Funktion

$$f(x) = e^{-|x|}$$

und skizzieren Sie $f(x)$.

Lösung:

$$F(f(x))(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-ikx)} e^{(-|x|)} dx$$

Die Integration wird aufgeteilt:

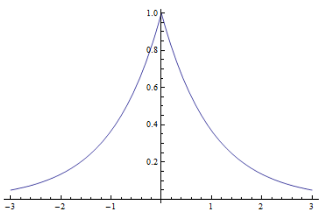
$$F(f(x))(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(-ikx+x)} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{(-ikx-x)} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(x(1-ik))} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{(-x(1+ik))} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-ik} [e^{(x(1-ik))}]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+ik} [e^{-x(1+ik)}]_{0}^{\infty} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+k^2}$$

Skizze von f(x):



Aufgabe 2 (★★)

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $E(\omega)$ einer Gaußschen Funktion $E(t) = e^{(-\frac{t^2}{2\sigma^2})}$ und skizzieren Sie beide Funktionen für $\sigma = 2$. Welche Aussagen können Sie über die Eigenschaften der Fouriertransformierten machen? Welche Halbwertsbreite haben die beiden Funktionen?

Lösung:

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} \cos(\omega t) dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} \sin(\omega t) dt =$$

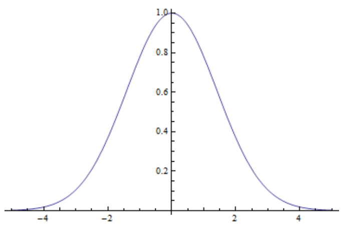
Der zweite Ausdruck entfällt, da die Integration über den gesamtent Bereich bei einer ungeraden Funktion 0 ist. Also:

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} \cos(\omega t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} \cos(\omega t) dt =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{2\sigma^2 \pi} e^{-\frac{\omega^2 2\sigma^2}{4}} =$$

$$\sigma e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}}$$

Für $\sigma = 2$ ist $E(t)$:



Die Halbwertsbreite (FWHM = Full Width at Half Maximum) lässt sich wie folgt bestimmen: Das Maximum für $E(t)$ liegt bei t=0. Daher:

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

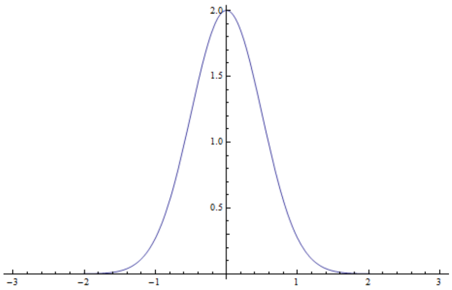
$$-\ln(2) = -\frac{t^2}{2\sigma^2}$$

$$t = \pm\sigma\sqrt{2\ln(2)} \rightarrow FWHM = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma$$

Für $\sigma = 2$: FWHM = 4,72

Für $\sigma = 2$ ist $E(\omega)$:

Für die Fouriertransformierte $E(\omega)$ liegt das Maximum bei $\omega = 0$. Daher:



$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \sigma e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}} \\
\ln(2\sigma) &= \frac{\omega^2\sigma^2}{2} \\
\omega &= \pm\frac{\sqrt{2\ln(2\omega)}}{\omega} \rightarrow FWHM = 2\frac{\sqrt{2\ln(2\omega)}}{\omega}
\end{aligned}
$$

Für $\sigma = 2$: FWHM = 1,67

Aufgabe 3 (★★)

Um die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zu veranschaulichen, ist der einfache Fall zweier sich überlagender Wellen nützlich: Gegeben sind zwei Wellen ψ_1 und ψ_2 mit ähnlicher Wellenlänge:

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \sin((k - \Delta k) - (\omega - \Delta\omega)t) \\
\psi_1 &= \sin((k + \Delta k) - (\omega + \Delta\omega)t)
\end{aligned}
$$

a) Zeigen Sie, dass die Welle $\psi = \psi_1 + \psi_2$ durch $\psi = 2\sin(kx - \omega t)\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$ gegeben ist.

Lösung:

$$\psi_1 + \psi_2 = \sin((k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t) + \sin((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t)$$

Um die Summe zu eliminieren, verwendet man das Additionstheorem:

$$\sin(\alpha + \beta) = 2\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

Daraus ergibt sich:

$$\psi = 2\sin(\frac{2(kx - \omega t)}{2})\cos(\frac{-2(\Delta kx - \Delta\omega t)}{2}) =$$

$$2\sin(kx - \omega t)\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$$

b) Welcher Teil dieser Gleichung bestimmt die Grundschwingung, welcher die Wellenpakete?

Lösung:

$\sin(kx - \omega t)$ ist für die Grundschwingung verantwortlich, $\cos(\delta kx - \Delta\omega t)$ für die Wellenpakete.

c) Gegeben sei k $= 12m^{-1}$, $\Delta k = 0,3m^{-1}$, $\omega = 5s^{-1}$, $\Delta\omega = 0,18s^{-1}$.Skizzieren Sie ψ_1, ψ_2, ψ für t = 0. Skizzieren Sie ψ für t = 5, 12, 18 s. (Benutzen Sie dafür Mathematica o.ä.) Bestimmen Sie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit von ψ.

Lösung:

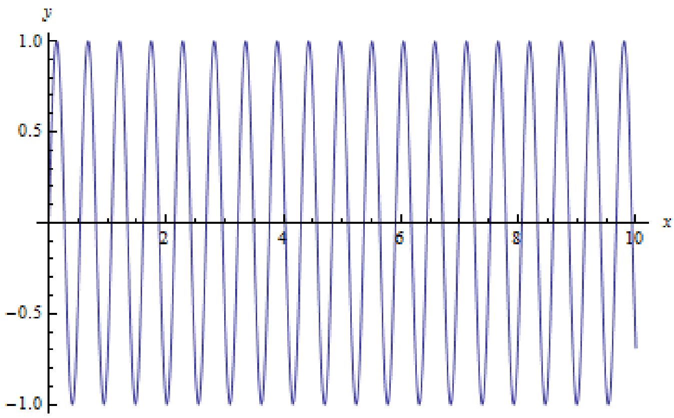
Die Gruppengeschwindigkeit ist gegeben durch:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{0,18s^{-1}}{0,3m^{-1}} = 0,6\frac{m}{s}$$

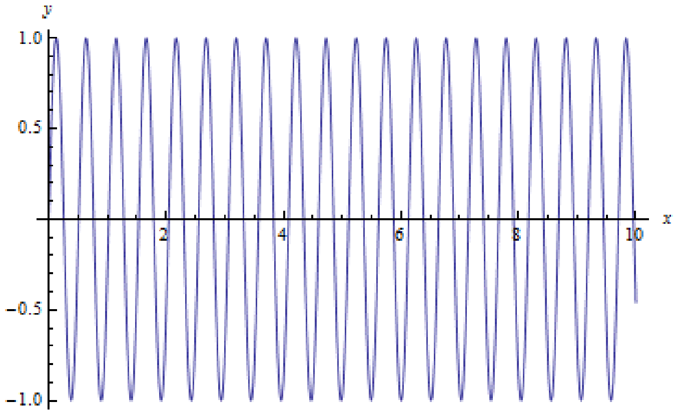
Die Phasengeschwindigkeit ist gegeben durch:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{5s^{-1}}{12m^{-1}} = 0,42\frac{m}{s}$$

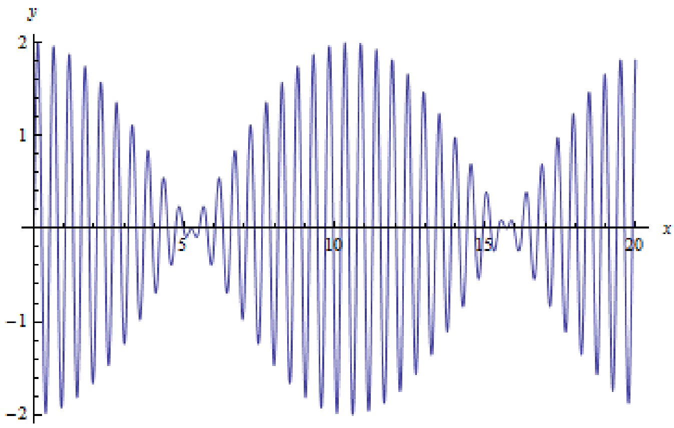
ψ_1 für t = 0s



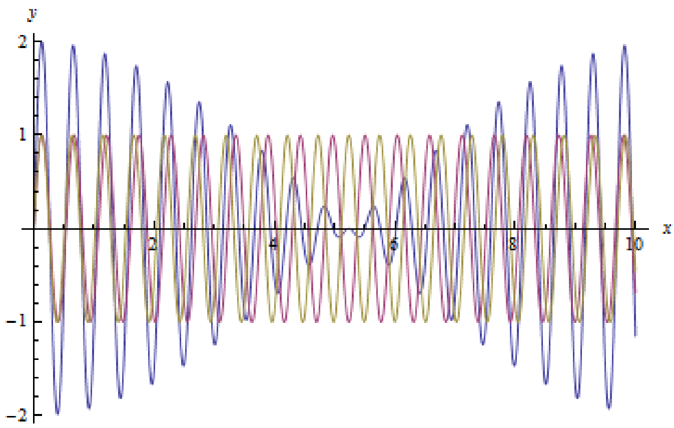
ψ_2 für t = 0s



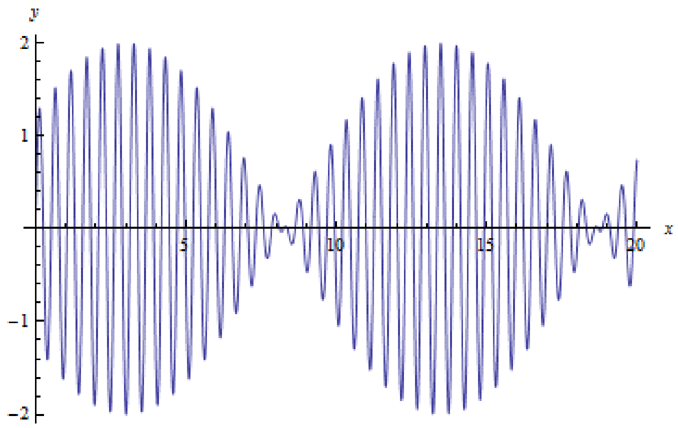
ψ für t = 0s



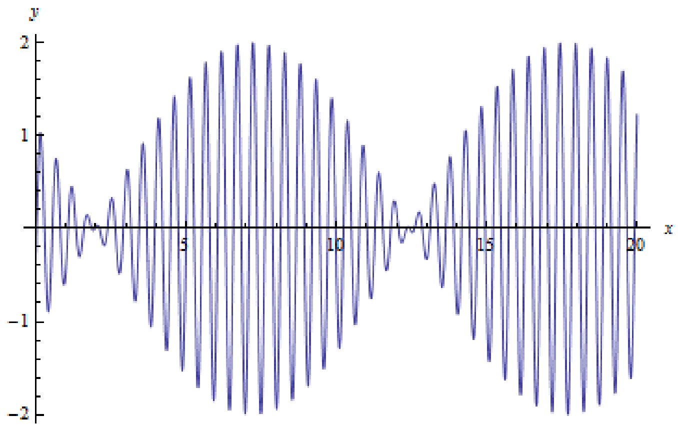
Auf einem Graf:



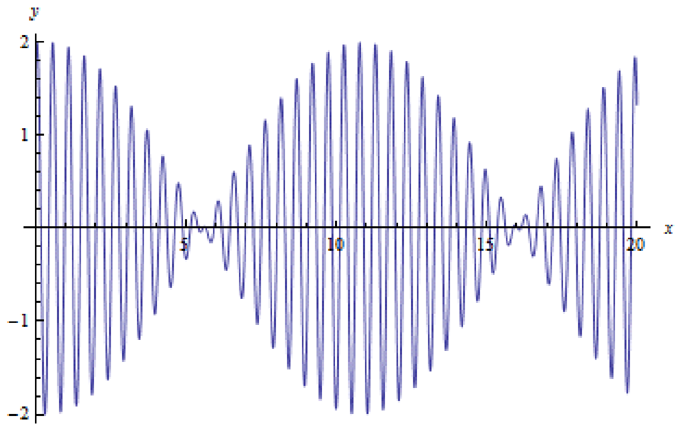
ψ für t = 5s



ψ für t = 12s



ψ für t = 18s



d) Besitzt die Welle $y = A\sin(\omega t)$ Phasen- und Gruppengeschwindigkeit?

Lösung:

Nein, da bei dieser Welle nicht gegeben ist, dass sie sich überhaupt fortbewegt, z.B. in die x-Richtung.

Aufgabe 4 (★★★)

a) Zeigen Sie, dass die Gruppengeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen in einem Medium mit Brechungsindex n durch

$$v_g = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}}$$

gegeben ist. c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Wellen; der Brechungsindex ist gegeben durch $n = c\frac{k}{\omega}$.

Lösung:

Der Brechungsindex ist gegeben durch den Quotienten aus Lichtgeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit. Die Gruppengeschwindigkeit ist gegeben durch

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Da die Antwort $\frac{dn}{d\omega}$ enthält, ist es bequemer, den Umkehrwert von v_g zu berechnen:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\omega}(n\omega) =$$

$$\frac{1}{c}(n + \omega\frac{dn}{d\omega})$$

$$v_g = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}}$$

b) Ein Pulsar ist ein schnell rotierender Neutronenstern, der sehr klare Pulse über einen großen Teil des Radiospektrums aussendet. Diese durchqueren geradlinig das interstellare Medium, bis sie die Erde erreichen. Beobachtungen zeigen, dass die Ankunftszeit eines Pulses bei 400 MHz um 700 ms verglichen mit einem Puls bei 1400 MHz verzögert ist. Diese Information kann man benutzen um die Entfernung des Pulsar zur Erde zu ermitteln.
Der Brechungsindex des interstellaren Mediums ist gegeben durch

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}.$$

e und m sind die Ladung und Masse eines Elektrons, N ist die Elektronendichte: Von dieser ist bekannt, dass sie zwischen dem Pulsar und der Erde einen ungefähr konstanten Wert von $3 \times 10^4 m^{-3}$ hat.
Berechnen Sie die Entfernung der Erde zum Pulsar. Macht diese Antwort Sinn?
Hinweis: Der Ausdruck für $n(\omega)$ kann mittels einer binomischen Erweiterung vereinfacht werden.

Lösung:

Der Puls bewegt sich mit Gruppengeschwindigkeit. Für eine Strecke D benötigt der Puls daher die Zeit

$$t = \frac{D}{v_g} = \frac{D}{c}(n + \omega\frac{dn}{d\omega})$$

n ist gegeben durch:

$$n = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}}$$

Nun kann diese Aufgabe auf zwei Arten gelöst werden: Entweder man benutzt den kompletten Ausdruck für $n(\omega)$; in diesem Fall wird die Rechnung schnell unübersichtlich. Alternativ kann $n(\omega)$ durch eine binomische Erweiterung angenähert werden. Dies ist gerechtfertigt durch die Tatsache, dass $\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}$ für beide Werte von ω sehr klein ist:
Für $\omega_1 = 2\pi \times 4 \times 10^8\ s^{-1}$:

$$\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega_1^2} = 1,51 \times 10^{-11}$$

Für $\omega_2 = 2\pi \times 1,4 \times 10^9\ s^{-1}$:

$$\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega_2^2} = 1,23 \times 10^{-12}$$

Daher ergibt sich für die binomische Erweiterung:

$$n \ \approx\ 1 - \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}$$

$$\frac{dn}{d\omega} \ \approx\ \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^3}$$

Dann ist

$$t = \frac{D}{v_g} \approx \frac{D}{v_g}(1 - \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2} + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}) \approx$$

$$\frac{D}{c}(1 + \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2})$$

Für die Differenz zwischen den Ankunftszeiten ergibt sich dann:

$$\Delta t = \frac{Ne^2 D}{2\epsilon_0 mc}(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2})$$

Für die Entfernung ergibt sich:

$$D = \frac{2\epsilon_0 mc\Delta t}{Ne^2}(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2})^{-1} =$$

$$3,02 \times 10^{19} m\ (\approx\ 3200 ly)$$

Diese Antwort erscheint vernünftig, da der Durchmesser der Milchstraße 75000 Lichtjahre beträgt; der Pulsar befindet sich also in unserer Galaxie.