
Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

Anwesenheitsübung - 1. November 2010

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

Aufgabe 1 (★) (2 Punkte)

Eine harmonische elektromagnetische Welle im Vakuum hat die Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t). \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass für die Intensität

$$I = \left(\frac{c\epsilon_0}{2}\right) E_0^2 \quad (2)$$

gilt.

Lösung:

Die Definition der Intensität ist

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle. \quad (3)$$

Somit folgt mit

$$\mathbf{S} = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t) \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(kx - \omega t) \quad (6)$$

direkt die Formel für die Intensität:

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = c^2 \epsilon_0 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle \quad (7)$$

[1]

Es bleibt also zu zeigen, dass $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$. Dazu wird das Integral über den cos gemittelt; die Zeit T erstreckt sich hierbei über mehrere Perioden:

$$\begin{aligned} \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(kx - \omega\tau) d\tau = & (8) \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{2} (1 + \cos(2kx - 2\omega\tau)) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega T} (\sin(2kx - 2\omega(t+T)) - \sin(2kx - 2\omega t)) = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im ersten Schritt verwendet, dass $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ und im letzten Schritt, dass $T\omega \gg 1$, da für eine Mittelung ja über mehrere Perioden gemittelt wird. Somit gilt:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad (9)$$

q.e.d.

[1]

Aufgabe 2 (★) (4 Punkte)

Eine transversale elektromagnetische Welle im Vakuum sei zirkular polarisiert:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 (\cos(kz - \omega t) \mathbf{e}_x + \sin(kz - \omega t) \mathbf{e}_y) \quad (10)$$

und breite sich in z-Richtung aus. Berechnen Sie für diese Welle die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, den Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ und den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel θ gegen die Ausbreitungsrichtung geneigte, total absorbierende Ebene.

Lösung:

Man verwendet die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11)$$

Damit ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \quad (12)$$

$$E_0 \begin{pmatrix} -k \cos(kz - \omega t) \\ -k \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -k \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Integration nach t liefert dann für die magnetische Induktion:

$$\mathbf{B} = E_0 \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -\sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}). \quad (13)$$

[1]

Der Poynting-Vektor \mathbf{S} gibt die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes an:

$$\mathbf{S} = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} =$$

$$\frac{k E_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{k E_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2(kz - \omega t) + \sin^2(kz - \omega t) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{k E_0^2}{\mu_0 \omega} \mathbf{e}_z = \epsilon_0 c E_0^2 \mathbf{e}_z = \text{const.} \quad (14)$$

Im Gegensatz zu einer linear polarisierten Welle oszilliert die Energiestromdichte einer zirkular polarisierten Welle nicht.

[1]

Nun betrachten wir eine Fläche, deren Normale mit der Ausbreitungsrichtung der Welle einen Winkel θ einschließt (siehe Abbildung).

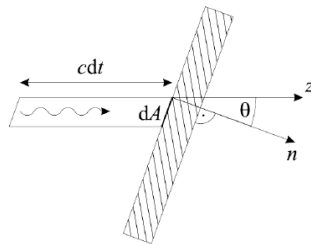


Figure 1: Strahlungsdruck einer elektromagnetischen Welle auf eine schiefe Ebene.

Die Feldimpulsdichte der elektromagnetischen Welle ist

$$\begin{aligned}\vec{\pi}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \\ \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S} &= \frac{1}{c^2} \mathbf{S}\end{aligned}\tag{15}$$

[1]

Alle Wellenfronten in dem schiefen Zylinder mit Volumen $dV = cdt \cos \theta dA$ erreichen in der Zeit dt das Flächenelement dA . Der Feldimpuls beträgt daher

$$\begin{aligned}d\mathbf{p} &= \vec{\pi} dV = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} dA_{\perp} cdt = \\ \epsilon_0 E_0^2 dA \cos(\theta) dt \mathbf{e}_z\end{aligned}\tag{16}$$

Die Ebene sei vollständig absorbierend, d.h. der Strahlungsdruck ist

$$p_s = \frac{d\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{dA},\tag{17}$$

wobei $d\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ die Normalkomponente der auf die Ebene ausgeübten Kraft

$$d\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 dA \cos(\theta) \mathbf{e}_z\tag{18}$$

ist. Dafür folgt für den Strahlungsdruck:

$$p_s = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\theta).\tag{19}$$

[1]

Aufgabe 3 (★★) (6 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass $\psi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, t)$ eine ebene Welle darstellen kann, wobei \mathbf{k} senkrecht zur Wellenfront steht. Lassen Sie dabei die Ortsvektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 zu beliebigen Punkten auf der Ebene laufen und zeigen Sie, dass

$$\psi(\mathbf{r}_1, t) = \psi(\mathbf{r}_2, t).\tag{20}$$

Lösung:

Eine ebene Welle ist eine Welle, bei der alle Flächen mit gleichem Phasenwinkel einen Satz von Ebenen darstellen. Diese Ebenen stehen hier senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} . Wenn wir zwei Vektoren haben, die auf eine solche Ebene zeigen, gilt für den Differenzvektor:

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0.\tag{21}$$

Es muss nun gezeigt werden, dass die gegebene Wellenfunktion für diese beiden Vektoren den gleichen Wert ergibt. Dazu wird die Tatsache verwendet, dass die Phase einer ebenen Welle in der Ebene konstant ist und durch $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ festgelegt ist:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}_1, t) &= \psi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1, t) = \psi(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)), t) = \\ &= \psi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), t) = \\ &= \psi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2, t) = \psi(\mathbf{r}_2, t)\end{aligned}\tag{22}$$

[1]

- b) Wie kann man eine Kugelwelle, wie eine Zylinderwelle beschreiben? Wie entstehen solche Wellen?

Lösung:

Hier sind nun die Flächen mit gleichem Phasenwinkel, also die Wellenfronten, kugel- oder zylinderförmig.

Eine kugelförmige Welle entsteht, wenn man eine punktförmige Anregung vornimmt. Dies kann zum Beispiel ein ins Wasser geworfener Stein sein, der auf der Oberfläche (also im Zweidimensionalen) eine kreisförmige Welle auslöst. Eine zylinderförmige Welle entsteht, wenn man eine ebene Welle durch einen langen, schmalen Spalt schickt. Für die Kugelwelle muss gelten, dass $\psi(\mathbf{r})$ nicht von der Richtung abhängt, also $\psi(|\mathbf{r}|)$. Für eine Zylinderwelle gilt dies nur für zwei Koordinaten.

[1]

- c) Zeigen Sie, dass

$$\psi(r, t) = \frac{f(r - vt)}{r}\tag{23}$$

eine Lösung der Wellengleichung ist und eine kugelförmig fortschreitende Erregung darstellt, deren Zentrum im Ursprung liegt und die sich mit der Geschwindigkeit v nach außen ausbreitet. Dabei ist $f(r - vt)$ eine beliebige zweifach differenzierbare Funktion.

Lösung:

Die Wellengleichung für dispersionsfreie Wellen in drei Dimensionen lautet in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta\psi(\vec{r}, t) = \nabla^2\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Hier ist der Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Wegen der Kugelsymmetrie des Problems liegt es nahe, zu Kugelkoordinaten überzugehen. Die kartesischen Koordinaten transformieren sich dann wie folgt:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

Die Wellenfunktion hängt somit nur noch vom Radius $r = |\vec{r}|$ ab, $\psi(\vec{r}, t) = \psi(r, t)$. Um den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten herzuleiten, schreiben wir für die x-Koordinate

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

und somit für die 2. Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

[1]

Mit $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial(1/r)}{\partial x} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Somit erhält man für die x-Komponente des Laplace-Operators:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

[1]

Für die Ableitungen nach y und z gelten analoge Beziehungen. Der gesamte Laplace-Operator für ein kugelsymmetrisches Problem lautet damit:

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi). \end{aligned}$$

Die Wellengleichung lautet damit (nach Multiplikation mit r):

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi).$$

[1]

Dies ist eine eindimensionale Wellengleichung in der Variablen r für die Funktion $(r\psi)$. Die allgemeine Lösung lautet also

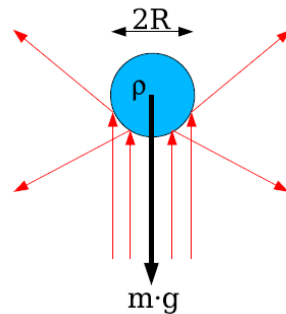
$$\psi(r, t) = C_1 \frac{f(r - vt)}{r} + C_2 \frac{f(r + vt)}{r}.$$

[1]

Aufgabe 4 (★★) (6 Punkte)

Eine kleine Kugel mit Radius R und Dichte ρ soll durch den Strahlungsdruck in einem senkrecht nach oben verlaufenden Laserstrahl gegen die Schwerkraft in der Schwebe gehalten werden (siehe Abbildung).

Figure 2: Eine Kugel der Dichte ρ und Radius R wird von einem Laserstrahl in der Schwebe gehalten.



- a) Wie groß muss die Intensität des Lasers sein, wenn sie über den Kugelquerschnitt als konstant angesehen werden kann und das Reflexionsvermögen der Kugel 100% beträgt?

Lösung:

Wie schon in vorherigen Aufgaben gezeigt, ist der Poynting-Vektor gegeben durch:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (24)$$

und die Impulsdichte

$$\vec{\pi}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (25)$$

Der mittlere Impulsübertrag auf ein senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ stehendes Flächenelement dA_{\perp} ist bei vollständiger Absorption der elektromagnetischen Welle:

$$d\mathbf{p} = \vec{\pi} dV = \frac{1}{c^2} \langle \mathbf{S} \rangle cdA_{\perp} dt =$$

$$\frac{1}{c^2} I c dA_{\perp} dt \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (26)$$

[1]

Die Kraft auf das Flächenelement ist

$$d\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (27)$$

Im Falle der Kugel muss deren Gewichtskraft mg durch den Lichtdruck kompensiert werden. Wir zerlegen dazu die Kugeloberfläche in Streifen mit konstantem Polarwinkel zur Einfallrichtung z des Lichts (siehe Abbildung).

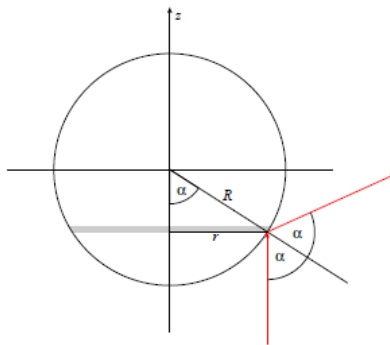


Figure 3: Zum Strahlungsdruck auf eine vollständig reflektierende Kugel

Ein Streifen mit dem Radius $r = R\sin(\alpha)$ hat die Fläche

$$dA = 2\pi r R d\alpha. \quad (28)$$

Die zur Lichtrichtung senkrechte Projektion ist

$$dA_z = dA \cos(\alpha) = 2\pi R^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha. \quad (29)$$

Der Impulsübertrag in z -Richtung bei der Absorption beträgt

$$\frac{dp_z}{dt}_a = \frac{I}{c} dA_z, \quad (30)$$

[1]

derjenige bei der Reflexion

$$\frac{dp_z}{dt}_e = \frac{I}{c} \cos(2\alpha) dA_z \quad (31)$$

[1]

Die x- und y-Komponenten des Impulsübertrags bei der Reflexion heben sich bei der Integration über den gesamten Streifen auf. Integriert man nun über die vom Licht beschienene untere Halbkugel, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{dt} &= \frac{I}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\alpha)) dA_z = \\ 2\pi R^2 \frac{I}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\alpha)) \sin(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha &= \pi R^2 \frac{I}{c} \end{aligned} \quad (32)$$

[1]

Die notwendige Intensität des Lichtes ist daher

$$I = \frac{mgc}{\pi R^2} = \frac{4}{3} R \rho g c \quad (33)$$

[1]

mit der Massendichte $\rho = \frac{m}{V}$ der Kugel.

- b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Strahlung anstatt auf eine Kugel senkrecht auf eine ebene Kreisfläche πR^2 trifft?

Lösung:

Wie man an

$$\frac{dp_z}{dt} = \pi R^2 \frac{I}{c} \quad (34)$$

sieht, ist der auf die Kugel übertragene Impuls genauso groß, als ob die Strahlung senkrecht auf eine vollständig absorbierende Fläche πR^2 treffen würde. Man kann sich überlegen, dass sich der bei der Emission übertragene Impulsübertrag auf die Kugel auch in z -Richtung, da ab einem Winkel $\alpha_i 45^\circ$ der Impulsübertrag in negativer z -Richtung erfolgt.

[1]