Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

3. Übungsblatt - 8.November 2010

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

Aufgabe 1 (★) (2 Punkte)

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses:

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{für } |x| < a \\ C/2 & \text{für } |x| = a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

Lösung:

Die Fourier-Transformation $F(y)$ der Funktion $f(x)$ lautet

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-ixy}\, dx$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ixy}\, dx = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ixy}}{-iy}\Big|_{-a}^{a} = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iay} - e^{-iay}}{iy}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C \sin(ay)}{y}\ , \text{ für } y \neq 0. \tag{1}$$

[1]

Die letzte Umformung ergibt sich unter Verwendung von $e^{ix} = cosx + i \sin x$. Um den Wert $F(0)$ zu ermitteln, kann man für den Sinus die Kleinwinkel-Näherung benutzen. Somit gilt:

$$F(0) = \sqrt{2}\frac{Ca}{\sqrt{\pi}}$$

[1]

Dies entspricht gerade der Formel für die Amplitude bei der Beugung an einem Spalt der Breite $2a$.

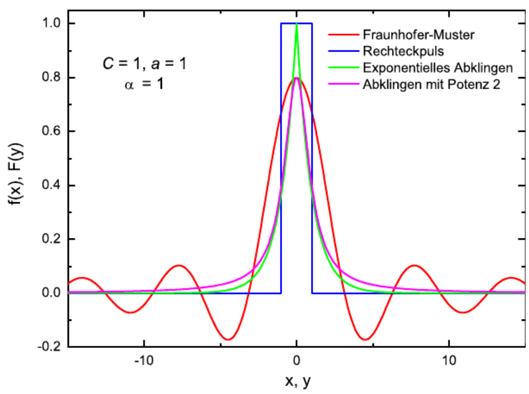


Figure 1: Fourier-Transformierte.

Aufgabe 2 (★★) (11 Punkte)

Freie Atome in einem verdünnten Gas werden durch ein äußeres elektrisches Feld polarisiert, d.h. der Schwerpunkt der elektronischen Ladungsverteilung verschiebt sich gegenüber dem Kern. Aus der dadurch entstehenden makroskopischen Polarisation ergibt sich die Dielektrizitätskonstante.

a) Schätzen Sie die elektrische Feldstärke ab, die ein Proton eines Wasserstoffatoms am Ort des Elektrons erzeugt, wobei der wahrscheinlichste Abstand Proton - Elektron durch den Bohrschen Radius $a_B = 0,5 \times 10^{-10} m$ gegeben sei. Vergleichen Sie dies mit elektrischen Feldstärken, die durch Licht verursacht werden, z.B. durch einen $100 mW$ Laser, der einen divergenzfreien Lichtstrahl von $2 mm$ Durchmesser emittiert. Zeigen Sie, dass die Kraft durch das magnetische Feld der Lichtwelle vernachlässigt werden kann.

Lösung:

Die Feldstärke des Protons im Abstand des Elektrons ergibt sich aus dem Coulomb Gesetz:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{r^2} = 5.76 \cdot 10^{11}\frac{V}{m} \tag{2}$$

Im Vergleich zum Laser:
Für die Intensität einer elektromagnetischen Welle gilt:

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2P}{A\epsilon_0 c}} = 4.9 \cdot 10^3 \frac{V}{m} \tag{3}$$

wobei P die angegebene Leistung und A die Fläche des Lichtbündels ist. Das Feld des Protons ist also um einen Faktor 10^8 größer!

[1]

Die maximale Kraft auf das Elektron aufgrund dieses elektrischen Feldes ist:

$$F_{el} = eE_0 = 8 \cdot 10^{-16} N \tag{4}$$

Für das Magnetfeld und damit für die maximale Kraft auf das Elektron aufgrund der Lorentzkraft:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 1.6 \cdot 10^{-5} \frac{N}{Am} \Rightarrow F_L = evB_0 = \frac{v}{c} F_{el} = 5.8 \cdot 10^{-18} N \tag{5}$$

Hierbei wurde verwendet, dass für die Geschwindigkeit des Elektrons auf der Bohrschen Bahn $\frac{v}{c} = \alpha = \frac{1}{137}$ gilt.

[**1**]

b) Zeigen Sie, daß auf Grund der kleinen zu erwartenden Auslenkung der Elektronenwolke das Atom für typische Lichtquellen als harmonischer Oszillator (lineare Rückstellkraft mit Federkonstante $k = m\omega_0^2$) betrachtet werden kann. (Hinweis: 2 Argumentationen sind möglich. Entweder man berechnet die rücktreibende Kraft auf ein positiv geladenes Teilchen, das in einer als homogen angenommenen elektrischen Ladungsverteilung kleine Verschiebungen erfährt. Oder man betrachtet das Elektron als klassischen Massenpunkt, der sich im Zentralfeld des Protons auf einer stationären Kreisbahn bewegt, wobei der Gesamtdrehimpuls erhalten bleibt.)

Lösung:

Für eine homogene Ladungsverteilung in einer Kugel mit Radius R zu einem Punktladungspotential $\sim \frac{1}{r}$ gilt, dass der Beitrag des Feldintegrals für alle Raumpunkte auf einer Kugel mit Radius r außerhalb von R verschwindet, während der Beitrag innerhalb von R der im Zentrum zusammengefassten Teilladung entspricht:

$$q(r) = e \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \tag{6}$$

[**1**]

Hieraus ergibt sich eine (lineare) Rückstellkraft von:

$$F_R = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \cdot q(r)}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^3} \cdot r \tag{7}$$

[**1**]

Alternativ:
Bei der zweiten Möglichkeit lässt man das Elektron im Feld des Protons kreisen und hält den Drehimpuls konstant: Hierfür betrachtet man die klassische Gesamtkraft F_{ges} auf das Elektron:

$$F_{ges} = F_{Coulomb} + F_{Zentrifugal} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \tag{8}$$

wobei L = mvr der Drehimpuls des Elektrons ist. Diese Kraft soll im stationären Fall 0 sein und somit erhalten wir einen Abstand a von:

$$F_{ges}(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{me^2} \tag{9}$$

[**1**]

Um kleine Verschiebungen gegen diese Ruhelage zu betrachten, benutzen wir eine Taylorentwicklung um a, wobei L konstant gehalten wird. Da die Verschiebung (r-a) klein ist, reicht eine Entwicklung um a bis zum ersten Glied:

$$F(r) = \underbrace{F(a)}_{=0} + (r-a)F'(a)$$

$$= (r-a)\left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} - \frac{3L^2}{ma^4}\right) = \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} - \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}\right)(r-a)$$

$$= \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}(r-a) \tag{10}$$

Die Kraft geht also linear mit der Auslenkung.

[**1**]

c) Wie lautet die Bewegungsgleichung eines mit der Konstanten γ gedämpften Oszillators unter Einwirkung einer harmonischen erregenden Kraft $F_0 e^{(i\omega t)}$ (Begründung der Terme)? (Lsg:$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$)

Lösung:

Die Bewegungsgleichung eines getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators setzt sich zusammen aus:

- $m\ddot{x}$ = Trägheitskraft
- $k\dot{x}$ = Reibungskraft
- Dx = Rückstellkraft
- F_0 cos(ωt) = treibende Kraft

Für unseren Fall ergibt sich:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \tag{11}$$

[**1**]

d) Bestimmen Sie die Lösung für den stationären Fall (Hinweis: Zunächst Exponentialschreibweise verwenden, dann den Realteil berechnen und in die Form $x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ bringen).

Lösung:

Wir wählen den Ansatz:

$$x(t) = x_0 e^{i(w't+\theta)} \rightarrow \dot{x} = x_0 i\omega' e^{i(w't+\theta)} \rightarrow \ddot{x} = -x_0 \omega'^2 e^{i(w't+\theta)} \tag{12}$$

Damit lautet die Differentialgleichung:

$$-\omega'^2 + i\omega'\gamma + \omega_0^2 = \frac{F_0}{x_0 m} e^{i((\omega-\omega')t-\theta)} \tag{13}$$

[1]

Die linke Seite ist von t unabhängig. Somit muss die rechte dies auch sein, was zur Folge hat, dass $\omega' = \omega$. Die erzwungene Schwingung hat also die gleiche Frequenz wie die treibende Kraft. Mit Zerlegung in Real- und Imaginärteil folgt wegen $e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta$:

$$cos\theta = \frac{x_0 m}{F_0}(\omega_0^2 - \omega^2) \tag{14}$$

$$sin\theta = \frac{-x_0 m}{F_0}\omega\gamma \Rightarrow tan\theta = \frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{15}$$

Aus $sin^2 + cos^2 = 1$ folgt für die Amplitude:

$$x_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \tag{16}$$

[1]

e) Stellen Sie das Quadrat der Amplitude und den Phasenverlauf als Funktion der Erregerfrequenz ω graphisch dar und diskutieren Sie diese.

Lösung:

Aus der Abbildung erkennt man, dass bei kleinen Erregerfrequenzen die erzwungene Schwingung in Phase mit der treibenden Schwingung ist. Bei der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ (in der Zeichnung ist $\omega_0 = 3$ und $\gamma = 1$) ist die erzwungene Schwingung genau um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben. Danach fällt die Amplitude wieder ab, da der Oszillator der Erregerfrequenz nicht folgen kann, und es stellt sich eine Phasenverschiebung von π ein.

[1]

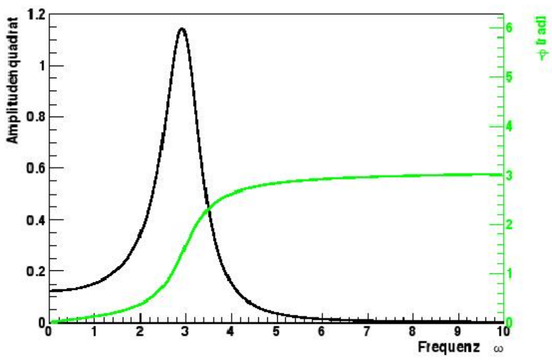


Figure 2: Erzwungene Schwingung mit $\omega_0 = 3, \gamma = 1$

[1]

Aufgabe 3 (★★) (7s Punkte)

In einer 1 cm Küvette befindet sich flüssiger Chlorwasserstoff HCl mit der Dichte ρ=1,1$\frac{\text{g}}{\text{mL}}$. Ein vereinfachtes Modell beschreibt das Molekül als ein positiv geladenes Proton, das elastisch

(Federkonstante D=700 N/m) an ein negatives Zentrum (Schwerpunkt im Chlorkern) gebunden ist. Harmonische Schwingungen des Protons um seine Ruhelage werden durch die Stöße mit benachbarten Molekülen gedämpft ($t_{\text{Stoß}} = 1$ps, d.h. $\gamma = \frac{1}{t_{\text{Stoß}}}$).

a) Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω_0 des harmonischen Oszialltors, sowie die entsprechende Wellenlänge des Lichtes.

Lösung:

Bei der linearen Federschwingung handelt es sich um eine harmonische Schwingung. Deshalb ist die Kreisfrequenz w_0 gegeben durch

$$w_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 6,47 \times 10^{14}\text{s}^{-1} \tag{17}$$

Die Wellenlänge ist dann

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 2,9 \times 10^{-6}\text{m} \tag{18}$$

[**1**]

b) Die Schwingung wird durch einen linear polarisierten Laser mit der Intensität 1 W/cm^2 resonant erregt. Berechnen Sie die Amplitude der Auslenkung der Protonen, sowie der makroskopischen Polarisation P. (1/3 der Moleküle sind parallel zur Polarisation ausgerichtet.)

Lösung:

Die Schwingungsgleichgung mit Dämpfung ist gegeben durch

$$m\ddot{x} + \frac{m}{t_{\text{Stoß}}}\dot{x} + \omega_0^2 x = eE_0 \tag{19}$$

Die Amplitude für diese Gleichung wurde bereits in Aufgabe 2 berechnet. Die maximale Amplitude gilt für den Resonanzfall, $\omega = \omega_0$. Dann wird Gleichung (16) zu

$$x_0 = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma} = \frac{eE_0 t_{\text{Stoß}}}{\omega_0 m} \tag{20}$$

E_0 lässt sich aus der Intensität des Lasers berechnen:

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} \tag{21}$$

Damit ergibt sich für x_0

$$x_0 = 4,06 \times 10^{-16}\text{m} \tag{22}$$

[1]

Die Polarisation oszilliert, d.h. $P(t)$. Für die Amplitude der Polarisation gilt:

$$P_0 = \frac{1}{3} N e x_0 \tag{23}$$

Hier ist N die Teilchendichte, also die Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit:

$$N = \frac{\rho_{HCl}}{\mu} N_A \tag{24}$$

mit μ als Molekülmasse:

$$\mu = \mu_{Wasserstoff} + \mu_{Chlor} = 1,008\text{u} + 35,45\text{u} \tag{25}$$

Also ist N:

$$N = 1,82 \times 10^{28} \text{m}^{-3} \tag{26}$$

[1]

Daher ergibt sich für die Polarisation der Wert

$$P = 3,94 \times 10^{-7} \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \tag{27}$$

[1]

c) Berechnen und skizzieren Sie den Real- und Imaginärteil von ϵ als Funktion von $\omega' = \frac{\omega}{\omega_0}$ für $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$, $\omega = \infty$, $\omega = 0,99\omega_0$ und $\omega = 1,01\omega_0$

Lösung:

Der Brechungsindex ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} n^2(\omega) = \epsilon(\omega) = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E} = \\ 1 + \frac{e^2 N}{3\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) \end{aligned} \tag{28}$$

(Eine genauere Herleitung ist im Vorlesungsskript gegeben.)

Zur Vereinfachung der Berechnungen schreibt man:

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{29}$$

$$\frac{e^2 N}{3\epsilon_0 m \omega_0^2} = 2,5 \times 10^{-2} \tag{30}$$

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = 1,55 \times 10^{-3} \tag{31}$$

Dann ist:

$$\epsilon(\omega') = 1 + \frac{2,5 \times 10^{-2}}{1 - \omega'^2 + 1,55 \times 10^{-3} i\omega'} \tag{32}$$

$$\epsilon_R(\omega') = 1 + \frac{2,5 \times 10^{-2}(1 - \omega'^2)}{(1 - \omega'^2)^2 + 2,4 \times 10^{-6}\omega'^2} \tag{33}$$

[**1**]

$$\epsilon_I(\omega') = \frac{-3,9 \times 10^{-5}\omega'}{(1 - \omega'^2)^2 + 2,4 \times 10^{-6}\omega'^2} \tag{34}$$

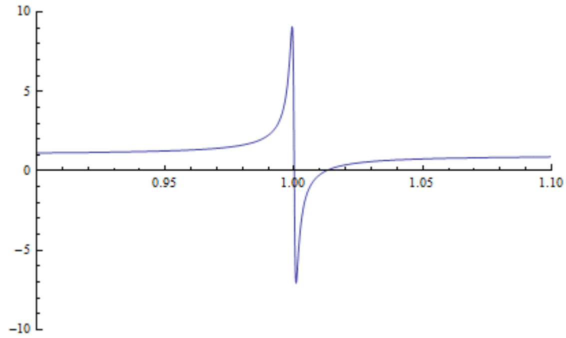
[**1**]

So kann man eine Tabelle mit Werten erstellen:

ω'	$\epsilon_R(\omega')$	$\epsilon_I(\omega')$
0	1,025	0
1	1	-16,3
∞	1	0
1,01	-0,238	-0,097
0,99	2,25	-0,097

[**1**]

Skizze für $\epsilon_R(\omega')$:



Skizze für $\epsilon_I(\omega')$: