# Übungen zur Experimentalphysik 3

**Prof. Dr. L. Oberauer**

**Wintersemester 2010/2011**

**4. Übungsblatt - 15.November 2010**

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

## Aufgabe 1 (★) (3 Punkte)

Welche Brechzahl muss ein zylindrischer Stab mindestens haben, wenn alle in seine plane Grundfläche eintretenden Strahlen(aus Luft) durch Totalreflexion weitergeleitet werden sollen? Wie groß ist der maximale Eintrittswinkel bei n = 1.33?

## Lösung:

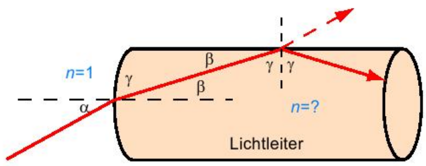



Figure 1: Strahlengang im Lichtleiter

Wir benutzen zweimal das Snellius'sche Brechungsgesetz, einmal für den Eintritt aus Luft in das Medium und einmal für die Reflexion an der Innenseite. Hierfür benutzen wir auch gleich die Totalreflexion an der Innenseite und dass $\beta = 90° - \gamma$.

$$\sin(\alpha) = n\sin(\beta) \tag{1}$$
$$n\sin(\gamma) = n\cos(\beta) = 1 \tag{2}$$
$$\text{mit } \cos^2 + \sin^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \sqrt{n^2 - 1} \tag{3}$$

**[1]**

Wenn alle einfallenden Strahlen weitergeleitet werden sollen, so auch für $\alpha = 90°$. Also folgt, dass n > 1.414 erfüllt sein muss.

**[1]**

Sei n = 1.33, so bekommt man aus der letzten Gleichung $\alpha = 61.3°$.

**[1]**

## Aufgabe 2 (★) (7 Punkte)

Sie (170 cm groß) liegen flach auf dem horizontalen Boden eines Schwimmbeckens gefüllt mit Wasser (n = 1.33).

### Lösung:

*a*) Wenn Sie schräg nach oben schauen, sehen Sie mit Ihren Augen (10 cm unter Ihrem Scheitel) gerade noch Ihre Zehenspitzen gespiegelt an der Wasseroberfläche. Wie tief liegen Ihre Augen und die auf gleicher Höhe liegenden Zehenspitzen unter Wasser?

Die Zehen werden unter dem Winkel der Totalreflexion gesehen; der kritische Winkel $\epsilon_c$ für Totalreflexion lässt sich aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz berechnen:

$$\sin(\epsilon_c) = \frac{n_{Luft}}{n_{Wasser}} \rightarrow \epsilon_c = 48.8^\circ \tag{4}$$

[**1**]

Um die Tiefe $T$ zu berechnen, hält man sich vor Augen, dass der Strahlengang zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke bildet, mit einer Kathete als dem halben Abstand $l/2$ zwischen Auge und Zehe und der anderen Kathete der gesuchten Tiefe $T$. Der Winkel, unter dem die Zehen gesehen werden, ist der oben berechnete Winkel der Totalreflexion $\epsilon_c$:

$$\tan(\epsilon_c) = \frac{l/2}{T} \tag{5}$$

[**1**]

Mit $l/2 = (170\text{cm} - 10\text{cm})/2 = 80\text{cm}$ bekommt man schließlich

$$T = 70.1\text{cm} \tag{6}$$

[**1**]

### Lösung:

*b*) Wieso sehen Sie den auf Sie zuschießenden Hau ohne Taucherbrille nur verschwommen?

### Lösung:

Ihr Auge ist so gebaut, dass es Gegenstände scharf sehen kann, wenn das umgebende Medium Luft ist. Mit Wasser verringert sich die Brechkraft der Linse, d.h. man wird kurzsichtig.

[**1**]

*c*) Wie groß ist der maximale Winkel zur Vertikalen, unter dem von Aussen Geräusche auf die Wasseroberfläche treffen dürfen, so daß Sie diese noch wahrnehmen können?

## Lösung:

Hier ist zu beachten, daß Luft für Schall das akkustisch dichtere Medium ist. Luft habe den Index 2, Wasser Index 1. Der größte Winkel, unter dem man noch Geräusche hören kann, ist der Grenzwinkel der Totalreflexion $\epsilon_{2,gr}$. $\epsilon_1$ ist natürlich in diesem Fall gerade $90°$.

[**1**]

Das Brechungsgesetz liefert wegen $n = \frac{c}{v}$ die Beziehung

$$\frac{\sin \epsilon_1}{\sin \epsilon_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{7}$$

In unserem Fall gilt also:

$$\sin \epsilon_{2,gr} = \frac{v_2}{v_1} \sin 90° = \frac{340 \frac{m}{s}}{1500 \frac{m}{s}} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon_{1,gr} \approx 13.1° \tag{9}$$

[**1**]

Dies ist dann auch umgekehrt der größte Winkel unter dem Schall aus dem Wasser ausdringen kann.

*d*) Es wird Nacht und Sie sind immer noch am Boden des Schwimmbeckens. Sie sehen den Mond unter einem Winkel von 45° zur Vertikalen, dann tauchten Sie auf. Unter welchem Winkel erscheint Ihnen jetzt der Mond?

## Lösung:

Im Falle von Licht liefert das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \epsilon_1}{\sin \epsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad \sin \epsilon_2 = n \sin \epsilon_1 = 1.33 \sin 45° \tag{11}$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon_2 \approx 70.1° \tag{12}$$

[**1**]

Nach dem Auftauchen sieht er den Mond unter dem Winkel von 70.1°.

## Aufgabe 3 (★★) (9 Punkte)

*a*) Betrachten Sie eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika mit Brechungsindizes $n_1$ und $n_2$. Zeigen Sie ausgehend von den Fresnelschen Formeln für senkrechten Einfall einer monochromatischen ebenen Welle, dass die Reflexionskoeffzienten für die Amplituden $r$ und $r'$ für das Durchqueren der Grenzfläche aus beiden Richtungen $r = -r'$ erfüllen, die entsprechenden Transmissionkoeffzienten $tt' = 1 - r^2$.

### Lösung:

Ungestrichene Koeffizienten $r, t$ seien für den Übergang $1 \to 2$, die gestrichenen $r', t'$ dementsprechend für $2 \to 1$. Dann gilt für senkrechten Einfall

$$\begin{aligned} r &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -r' && (13) \\ tt' &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \cdot \frac{2n_2}{n_1 + n_2} = 1 - \frac{(n_1 + n_2)^2 - 4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - r^2 && (14) \end{aligned}$$

**[1]**

*b*) Eine dicke Glasplatte mit Brechungsindex $n_2$ sei mit einer dünnen planparallelen Schicht eines transparenten Dielektrikums mit Brechungsindex $n_1$ und der Dicke $d$ beschichtet, dessen Oberseite wiederum in Kontakt mit Luft sei (Brechungsindex 1). Eine ebene monochromatische Welle mit Wellenlänge $\lambda$ und Amplitude 1 falle senkrecht aus der Luft auf diese Anordnung. Zeigen Sie, dass bei Berücksichtigung von Mehrfachreflexionen in der dünnen Schicht die reflektierte Intensität durch

$$R = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\phi}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\phi}$$

gegeben ist, wobei $r_1$ und $r_2$ die Reflexionskoeffzienten für den Übergang Luft - Dielektrikum bzw. Dielektrikum - Glas seien, und $\phi$ der Phasenunterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden reflektierten Strahlen sei.

### Lösung:

Die Größe des direkt reflektierten elektrischen Feldes ist relativ zur einlaufenden Feldamplitude $a_1 = r_1$. Die Reflexion an der zweiten Oberfläche hat den Faktor $a_2 = t_1 \cdot r_2 \cdot t_1'$.

**[1]**

Weitere Reflexionen in der Beschichtung ergeben $a_{n+2} = t_1 r_2 t_1' (-r_1 r_2)^n$.

**[1]**

Da der Laufzeitunterschied durch das Dielektrikum $\phi$ beträgt, ist die Summe der Amplituden der Realteil der Funktion

$$
\begin{aligned}
a(t) &= a_1 \cdot e^{i\omega t} + a_2 \cdot e^{i(\omega t+\phi)} + a_3 \cdot e^{i(\omega t+2\phi)} + ... && (15)\\
&= e^{i\omega t}(r_1 + t_1 r_2 t_1' e^{i\phi} + t_1 r_2 t_1'(-r_1 r_2)e^{i2\phi} + ...) && (16)\\
&= e^{i\omega t}\left(r_1 + t_1 r_2 t_1' e^{i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (-r_1 r_2 e^{i\phi})^n\right) && (17)\\
&= e^{i\omega t}\left(r_1 + \frac{t_1 r_2 t_1' e^{i\phi}}{1 + r_1 r_2 e^{i\phi}}\right) = e^{i\omega t} \cdot \frac{r_1 + r_1^2 r_2 e^{i\phi} + (1 - r_1^2) r_2 e^{i\phi}}{1 + r_1 r_2 e^{i\phi}} && (18)\\
&= e^{i\omega t} \cdot \frac{r_1 + r_2 e^{i\phi}}{1 + r_1 r_2 e^{i\phi}} && (19)
\end{aligned}
$$

**[1]**

Die relative reflektierte Intensität erhält man als Betragsquadrat

$$
\begin{aligned}
R = a(t) \cdot a^*(t) &= \frac{r_1 + r_2 e^{i\phi}}{1 + r_1 r_2 e^{i\phi}} \cdot \frac{r_1 + r_2 e^{-i\phi}}{1 + r_1 r_2 e^{-i\phi}} && (20)\\
&= \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi})}{1 + r_1^2 r_2^2 + r_1 r_2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi})} = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\phi}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\phi} && (21)
\end{aligned}
$$

**[1]**

*c*) Zeigen Sie, dass unabhängig von der Dicke $d$ der Beschichtung die Transmission $T = 1 - R$ einer beschichteten Glasplatte immer größer als die einer unbeschichteten ist, solange $1 < n_1 < n_2$ gilt. Berechnen Sie die optimale Dicke einer Schicht mit $n_1 = 1.35$ auf Glas mit $n_2 = 1.50$, so dass die Transmission maximal wird. Wie groß ist die relative Erniedrigung der reflektierten Intensität $R$ durch diese Beschichtung im Vergleich zu der einer unbeschichteten Glasplatte?

## Lösung:

$R$ ist, wie man in der Umformung

$$
\frac{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\phi}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\phi} = 1 - \frac{1 + r_1^2 r_2^2 - r_1^2 - r_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\phi} \qquad (22)
$$

leicht sieht, minimal für $\cos\phi = -1$ (und maximal für $\cos\phi = +1$).

**[1]**

Die optimale Dicke für die angegebenen Werte führt zu $r_1 = 0.149$, $r_2 = 0.053$, $R = 0.0094$ (ca. Faktor 4 im Vergleich zur unbeschichteten Platte $r = 0.2$, $R = 0.04$). Weiterhin ist

$$
\begin{aligned}
R_{max} &= \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1r_2} = \left(\frac{r_1 + r_2}{1 + r_1 r_2}\right)^2 && (23)\\
&= \left(\frac{\frac{1-n_1}{1+n_1} + \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}}{1 + \frac{1-n_1}{1+n_1} \cdot \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}}\right)^2 && (24)\\
&= \left(\frac{2n_1\,(1-n_2)}{(n_1 + n_2 + n_1^2 + n_1 n_2) + (n_1 - n_2 - n_1^2 + n_1 n_2)}\right)^2 && (25)\\
&= \left(\frac{1-n_2}{1+n_2}\right)^2, && (26)
\end{aligned}
$$

**[1]**

was genau dem Reflexionsvermögen der unbeschichteten Platte entspricht. Es bleibt die optimale Dicke der Schicht zu bestimmen. Da die Transmission möglichst groß sein soll, muß man den Fall $\cos\phi = -1 \Rightarrow \phi = \pi$ betrachten.

**[1]**

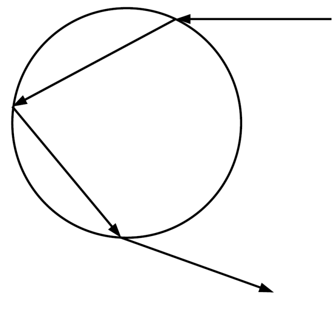
Die Phase der Welle ist gegeben durch $\phi = kx$. Mit $k = \frac{2\pi n_1}{\lambda}$ und $x = 2d$ folgt somit für die Dicke

$$
\begin{aligned}
\frac{2\pi n_1}{\lambda} \cdot 2d &= \pi && (27)\\
\Rightarrow \quad d &= \frac{\lambda}{4n_1} && (28)
\end{aligned}
$$

**[1]**

## Aufgabe 4 (★★) (9 Punkte)

Descartes Theorie von der Bildung eines Regenbogens besagt, dass ein Sonnenstrahl beim Eintritt in einen kugelförmigen Regentropfen gebrochen wird. Danach wird der Strahl einmal intern reflektiert und beim Verlassen des Regentropfens wieder gebrochen. Dies ist in der Skizze gezeigt:



Der Regenbogen wird von denjenigen Strahlen gebildet, deren Ablenkung von der ursprünglichen Richtung entweder ein Minimum oder ein Maximum darstellt. Zeigen Sie, dass der Regenbogen einen Bogen mit Radius 42° um den Punkt gegenüber der Sonne bildet, und dass seine Breite ca. 1.6° betragen sollte, mit dem roten Teil auf der Außenseite. Der Brechungsindex für Wasser im roten Bereich ist n = 1.330 und n = 1.341 für violettes Licht.

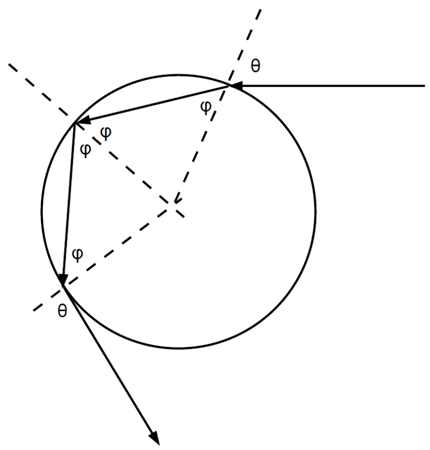
## Lösung:

Der einfallende Strahl bildet einen Winkel $\theta$ mit dem Einfallslot zur Tropfenoberfläche. Der gebrochene Strahl bildet einen Winkel $\phi$; dann wird das Snellius'sche Brechungsgesetzt zu:

$$\sin(\phi) = \frac{\sin(\theta)}{n} \tag{29}$$

[**1**]

wobei $n$ der Brechungsindex des Wassers ist. Das Einfallslot auf eine Kugel muss deren Mittelpunkt passieren. Dadurch bilden sich zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke, wie in der Abbildung gezeigt:




Bei der ersten Brechung wird der Strahl um einen Winkel $\theta - \phi$ gegen den Uhrzeigersinn abgelenkt. Während der internen Spiegelung wird er um $\pi - 2\phi$ in dieselbe Richtung abgelenkt, und bei der zweiten Brechung wird der Strahl wieder um $\theta - \phi$ abgelenkt. Daher beträgt die gesamte Ablenkung $D$

$$D = 2\theta - 4\phi + \pi \tag{30}$$

[**1**]

Um das Extremum zu finden, setzt man $\frac{dD}{d\theta} = 0$:

$$\frac{dD}{d\theta} = 2 - 4\frac{d\phi}{d\theta} = 0 \rightarrow \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{1}{2} \tag{31}$$

[**1**]

Leitet man Gleichung (29) nach $\theta$ ab, so ergibt sich

$$\cos(\phi)\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\cos(\theta)}{n} \tag{32}$$

und mit Einsetzen des Ergebnisses aus Gleichung (31) wird dies zu

$$\cos(\phi) = \frac{2\cos(\theta)}{n} \tag{33}$$

[**1**]

Wir haben nun zwei Gleichungen mit $\phi$ und $\theta$, also können wir einen der beiden Winkel eliminieren um einen Ausdruck für den anderen zu finden. Die einfachste Art besteht darin, sich $\cos^2 + \sin^2 = 1$ zunutze zu machen und die zwei quadrierten Gleichungen zu addieren:

$$\frac{4}{\cos}^{2}(\theta)n^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{n^2} = 1 \tag{34}$$

[**1**]

Um diese Gleichung zu lösen, schreibt man $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$ und formen den Ausdruck um:

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \tag{35}$$

und daher

$$\sin(\phi) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}} \tag{36}$$

[**1**]

Für rotes Licht mit $n$=1.330 ergibt sich

$$\theta = 59.59^\circ \quad , \quad \phi = 40.42^\circ \tag{37}$$

also beträgt die Ablenkung

$$D = 2\theta - 4\phi + 180^\circ = 137.48^\circ. \tag{38}$$

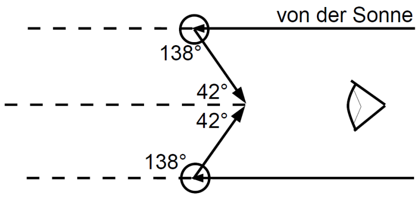
Eine Ablenkung von 180° entspricht der Umkehrung der Richtung des Sonnenlichts. Daher entspricht eine Ablenkung von 137.48° einem Ring von rotem Licht mit Radius $180^\circ - 137.48^\circ = 42.52^\circ$; siehe Abbildung.

[**1**]

Wiederholt man die Berechnung für violettes Licht mit $n$=1.341, so erhält man:

$$\theta = 58.95^\circ \quad , \quad \phi = 39.71^\circ \quad , \quad D = 139.07^\circ \tag{39}$$

[**1**]




Daher bildet sich ein Ring mit Radius 40.93°. Daher hat der Regenbogen einen durchschnittlichen Winkelradius von

$$\frac{42.52^\circ + 40.93^\circ}{2} = 41.7^\circ \tag{40}$$

und eine Winkelbreite von

$$42.52^\circ - 40.93^\circ = 1.6^\circ \tag{41}$$

mit dem roten Teil auf der Außenseite.

[**1**]