Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

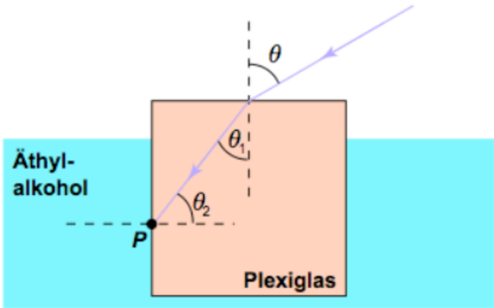
5. Übungsblatt - 22.November 2010

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

Aufgabe 1 (★) (8 Punkte)

Ein Lichtstrahl treffe aus Luft (n_{Luft}=1) auf einen Plexiglasquader ($n_P = 1.491$), der fast vollständig in Äthylalkohol ($n_A = 1.3641$) eingetaucht ist:



a) Berechnen Sie den Winkel θ für den sich am Punkt P Totalreflexion ergibt.

Lösung:

Für die erste Brechung gilt:

$$\sin(\theta) = n_P \sin(\theta_1) \tag{1}$$

Für die zweite Brechung:

$$n_P \sin(\theta_2) = n_A \sin(\theta_3) \tag{2}$$

[1]

Für den Fall der Totalreflexion ist $\theta_3 = 90°$. Außerdem ist $\theta_2 = 90° - \theta_1$. Damit wird Gleichung (2):

$$n_P \cos(\theta_1) = n_A \tag{3}$$

Also ist $\theta_1 = 23.8°$.

[**1**]

Somit kann Gleichung (1) nach θ aufgelöst werden und es ergibt sich:

$$\theta = \arcsin(1.491 \cdot \sin(23.8°)) = 37° \tag{4}$$

[**1**]

b) Wenn der Äthylalkohol entfernt wird, ergibt sich dann auch mit dem in a) berechneten Winkel θ am Punkt P Totalreflexion? Begründung!

Der kritische Winkel für Totalreflexion für Äthylalkohol liegt bei

$$\theta_c = \theta_2 = 90° - \theta_1 = 66.2° \tag{5}$$

Für Luft hingegen ist

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_{Luft}}{n_P}\right) = 42.1° \tag{6}$$

[**1**]

Also findet immer noch Totalreflexion statt.

[**1**]

Lösung:

c) Beschreiben Sie den Strahlengang ab dem Punkt P für den Fall der Totalreflexion und für den Fall, dass der Winkel kleiner als der Winkel der Totalreflexion ist.

Lösung:

Es gibt im Prinzip immer einen transmittierten und einen reflektierten Strahl.

[**1**]

Für Winkel, die kleiner sind als der Winkel der Totalreflexion, ist der reflektierte Strahl sehr schwach. Am Winkel der Totalreflexion läuft der transmittierte Strahl parallel zur Oberfläche, seine Intensität ist null; die Intensität steckt also im reflektierten Strahl.

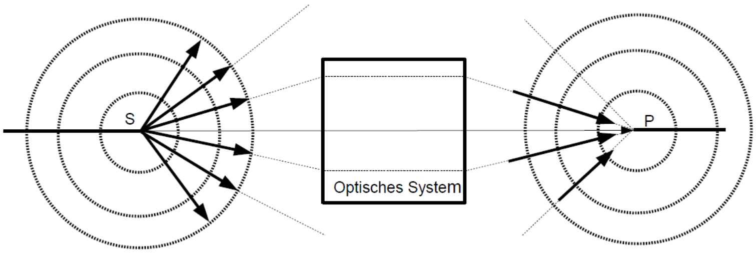
[**1**]

Bei einer weiteren Brechung an der unteren Fläche wird der Winkel für Totalreflexion aber nicht erreicht und es ergibt sich ein Strahlenweg analog zum einfallenden Licht.

[**1**]

Aufgabe 2 (★★) (8 Punkte)

a) Eine Kugelwelle breitet sich von einem Punkt S aus und tritt in ein nicht näher definiertes optisches System ein (siehe Abbildung). Aus diesem tritt es als auf Punkt P konvergierende Welle wieder aus. Was sagt das Fermatsche Prinzip über die optischen Wege für die Strahlen von S nach P aus?



Lösung:

Es ist anzunehmen, dass die Strahlen von S nach P viele verschiedene Wege durch das System nehmen. Man macht nun die Annahme, dass einer dieser Wege dem minimalen optischen Weg W zwischen S und P entspricht. Das Fermatsche Prinzip besagt, dass das Licht dieses minimale W wählt und kein anderes.

[**1**]

Aber es ist offensichtlich, dass es auch noch andere Wege gibt, da die Strahlen S in viele verschiedene Richtungen verlassen. Daraus folgt, dass es kein *einzigartes* minimales oder maximales W gibt.

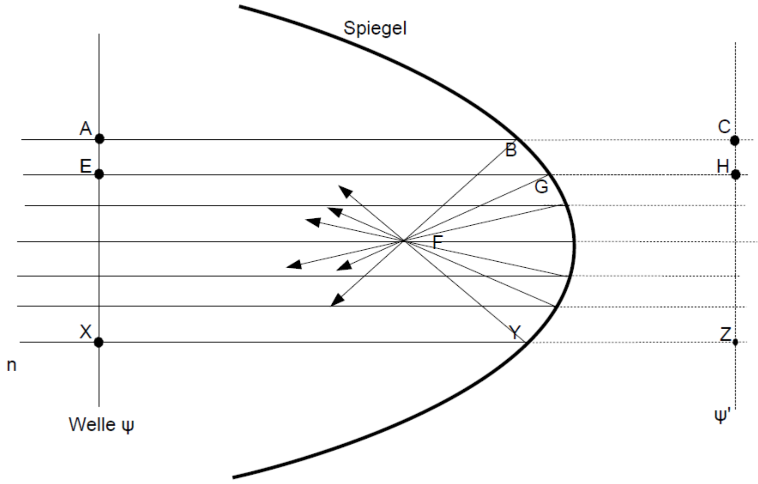
[**1**]

Anders ausgedrückt: Alle Strahlen von S durch das System nach P müssen identische optische Weglängen zurücklegen. Dies ist tatsächlich der Fall für alle möglichen optischen Systeme wie z.B. Linsen und Spiegel.

b) Ein gebündelter Lichtstrahl trifft parallel zur Symmetrieachse auf einen konkaven Spiegel und wird in einen konvergierenden Strahl gespiegelt. Benutzen Sie das Fermatsche Prinzip, um zu zeigen, dass es sich um einen Parabolspiegel handelt.

Lösung:

Zur Verdeutlichung der Geometrie dient die folgende Abbildung:



Hier treffen parallele Strahlen, die einer ebenen Welle ψ entsprechen, auf einen Spiegel. Die reflektierten Strahlen konvergieren auf einen Punkt F. Von Teil a) ist bekannt, dass alle optischen Weglängen zu F identisch sein müssen. Vergleicht man dies mit der Anordnung aus Teil a), so ist $S = \infty$ und $P = F$.

[**1**]

Daraus folgt:

$$n(\overline{AB} + \overline{BF}) = n(\overline{EG} + \overline{GF}) = ... = n(\overline{XY} + \overline{YF}) \tag{7}$$

[**1**]

Nun verlängert man die Streckenstücke $\overline{AB}$, $\overline{EG}$, ...,$\overline{XY}$ durch den Spiegel zu den Punkten C, H, ..., Z, die so gewählt sind, dass

$$\overline{BC} = \overline{BF}, \overline{GH} = \overline{GF}, ..., \overline{YZ} = \overline{YF} \tag{8}$$

[**1**]

Daraus lässt sich schließen, dass

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{EG} + \overline{GH} = ... = \overline{XY} + \overline{YZ} \tag{9}$$

[**1**]

Das heißt, dass der Abstand zwischen ψ und die Linie ψ', die durch C, H,...,Z geht, konstant ist. Daher wurde eine Linie ψ' so konstruiert, dass die Punkte auf dem Spiegel äquidistant von ψ' und F sind. Daher ist der Spiegel per Definition eine Parabel mit Brennpunkt F und Leitgerade ψ'.

[**1**]

Aufgabe 3 (★) (5 Punkte)

a) Ausgehend von der Gleichung

$$\sin(\frac{\alpha + \delta_{min}}{2}) = n \sin(\frac{\alpha}{2})$$

aus der Vorlesung für die symmetrische Durchstrahlung eines Prismas zeigen Sie, dass für kleine Winkel α folgt, dass $\delta \approx (n-1)\alpha$.

Lösung:

Wenn α sehr klein ist, ist auch δ_{min} sehr klein. Daher wird die angegebene Gleichung durch die Kleinwinkelnäherung zu:

$$\frac{\alpha + \delta_{min}}{2} \approx n\frac{\alpha}{2} \tag{10}$$

und dies ist

$$\delta_{min} \approx (n-1)\alpha \tag{11}$$

[**1**]

b) Ein Prisma hat einen Brechungsindex von n=1.60 und ist so positioniert, dass einfallendes Licht minimal abgelenkt wird. Finden Sie den minimalen Ablenkwinkel δ_{min} für einen Scheitelwinkel $\alpha = 45°$.

Lösung:

$$\sin(\frac{\alpha + \delta_{min}}{2}) = n \sin(\frac{\alpha}{2}) \tag{12}$$

$$\sin(\frac{\alpha + \delta_{min}}{2}) = 0.61 \tag{13}$$

$$\rightarrow \delta_{min} = 30.51° \tag{14}$$

[**1**]

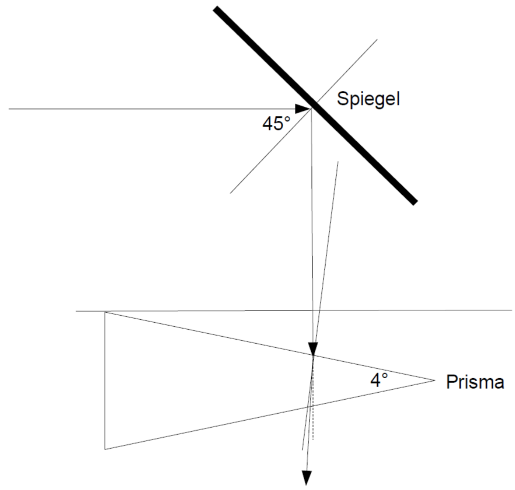
c) Ein Lichtstrahl fällt durch ein Prisma mit Scheitelwinkel $\alpha = 50°$. Durch Drehen des Prismas wird der Strahl unterschiedlich stark abgelenkt; das Minimum liegt hier bei 30°. Bestimmen Sie den Brechungsindex des Prismas.

$$n = \frac{\sin(\frac{\alpha+\delta_{min}}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})} = 1.52 \tag{15}$$

[**1**]

Lösung:

d) Ein Lichtstrahl trifft auf einen ebenen Spiegel mit einem Winkel von 45° (siehe Abbildung). Nach der Spiegelung verläuft der Strahl durch ein Prisma mit Brechungsindex n=1.50 und Scheitelwinkel $\alpha = 4°$. Um welchen Winkel muss der Spiegel gedreht werden, wenn die Gesamtablenkung 90° betragen soll?



Lösung:

Weil α klein ist, kann man das Prisma auch als Keilplatte sehen. Die Ablenkung ist dann gegeben durch

$$\delta = (n-1)\alpha = 2° \tag{16}$$

[**1**]

Der Spiegel selbst bewirkt bereits eine Ablenkung des Strahls um 90°, also muss er gedreht werden, um die 2° Ablenkung auszugleichen. In diesem Fall muss der Spiegel also um $\frac{1}{2}(2°) = 1°$ gedreht werden; für die Anordnung in der Abbildung gegen den Uhrzeigersinn.

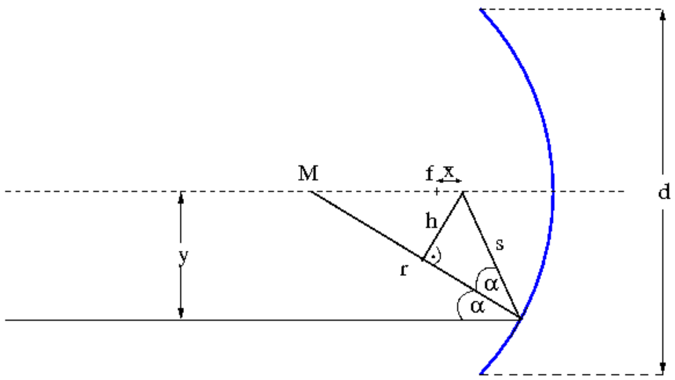
[**1**]

Aufgabe 4 (★) (3 Punkte)

Auf einen sphärischen Konkavspiegel mit einem Durchmesser von 40cm und einem Krümmungsradius von 60cm falle ein Lichtbündel parallel zur optischen Achse. Reflektierte Strahlen schneiden die optische Achse nicht genau im Brennpunkt. Den Abstand dieses Schnittpunktes zum Brennpunkt nennt man sphärische Längenaberration.

a) Bestimmen Sie die Längenaberration als Funktion des Einfallwinkels α (Winkel zwischen einfallendem Strahl und Einfallslot).

Lösung:



Aus der Abbildung erkennt man, dass $\cos\alpha = \frac{r}{2s}$. Benutzt man, dass für einen sphärischen Spiegel die Brennweite f gegeben ist durch $f = \frac{r}{2}$, folgt direkt:

[**1**]

$$x = s - f = s - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \tag{17}$$

Für $\alpha \to 0$ folgt auch $x \to 0$.

[**1**]

b) Die Breite des Lichtbündels sei größer als der Durchmesser des Spiegels. Berechnen Sie die größte vorkommende Längenaberration.

Lösung:

x steigt mit wachsendem α und ist somit begrenzt durch den Spiegeldurchmesser:

$$\alpha_{max} = \arcsin\left(\frac{d}{2r}\right) \approx 19.5° \tag{18}$$

$$\Rightarrow x_{max} = 1.83\text{cm} \tag{19}$$

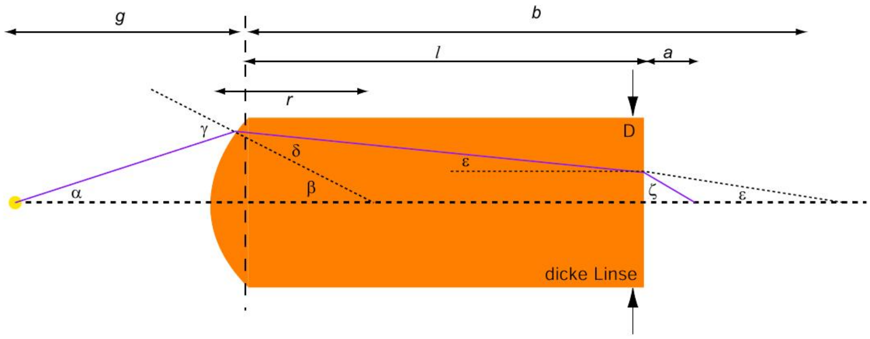
[**1**]

Aufgabe 5 (★★) (4 Punkte)

Ein dünner Glasstab habe die Länge $l = 30cm$, die Brechzahl $n = 1.5$, und werde durch ein planes und ein sphärisch konvexes Ende mit Krümmungsradius $r = 10cm$ abgeschlossen. Außerhalb des Stabes, im Abstand $g = 60cm$ vor der sphärischen Fläche, befinde sich auf der Symmetrieachse des Stabes eine punktförmige Lichtquelle Q.
Skizzieren Sie den Verlauf der von Q ausgehenden Lichtstrahlen. Gibt es einen Punkt, in dem

sich die Strahlen wieder treffen? Und wenn ja: wo? Unter welchem Winkel ξ treffen sich Strahlen, die bei Q mit einem Winkel α auseinander gelaufen sind?

Lösung:



Da $D \ll g$ können wir die Näherungen für kleine Winkel verwenden:

$$\sin(\alpha) = \tan(\alpha) = \alpha. \tag{20}$$

Außerdem gilt $d \ll r$. Es gelten also folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} g \cdot \tan\alpha = r \cdot \tan\beta \rightarrow \beta &= \frac{g}{r}\alpha && (21)\\ \gamma &= \alpha + \beta && (22)\\ \frac{\gamma}{\delta} &= n && (23)\\ \epsilon &= \beta - \delta && (24) \end{aligned}$$

[**1**]

Nach ϵ aufgelöst ergibt sich:

$$\epsilon = \beta - \frac{\gamma}{n} = \frac{(n-1)\frac{g}{r} - 1}{n}\alpha \tag{25}$$

Benutzt man $b \cdot \tan\epsilon = g \cdot \tan\alpha$ so erhält man unter Einsetzen von ϵ die Gleichung für die Brechung an einer Kugelschale:

$$\frac{n}{b} + \frac{1}{g} = \frac{n-1}{r} \tag{26}$$

[**1**]

Mit den angegebenen Werten erhält man $b = 45cm$, was allerdings länger ist, als der Stab selbst. Mit den Winkeldefinitionen aus der Zeichnung ergibt sich:

$$\frac{\zeta}{\epsilon} = n \tag{27}$$

$$a = (b-l)\frac{\epsilon}{\zeta} = 10cm \tag{28}$$

[**1**]

Die Strahlen treffen sich also $10cm$ hinter der planen Abschlussfläche. Die Winkelvergrößerung beträgt:

$$\frac{\zeta}{\alpha} = (n-1)\frac{g}{r} - 1 = 2 \tag{29}$$

[**1**]