

---

# Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

7. Übungsblatt - 6. Dezember 2010

Musterlösung

---

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

---

## Aufgabe 1 (★) (8 Punkte)

Optische Systeme, bei denen die chromatische Aberration korrigiert ist, heißen achromatische Systeme oder Achromaten. Beim sog. Fraunhofer-Achromat werden zwei dünne Linsen in vernachlässigbarem Abstand miteinander kombiniert.

- a) Zeigen Sie, dass für die relative Änderung der Brechkraft  $D = 1/f$  einer einzelnen dünnen Linse in Abhängigkeit vom Brechungsindex  $n$

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta n}{n-1}$$

gilt.

### Lösung:

Für die Brechkraft dünner Linsen gilt

$$D = \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1)$$

mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$ . Betrachtet man eine weitere Linse, die die gleichen Radien aber einen anderen Brechungsindex  $n' = n + \Delta n$  besitzt, so kann man den Unterschied in der Brechkraft berechnen:

$$\Delta D = \Delta n \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2)$$

[1]

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta n}{n-1} \quad (3)$$

[1]

- b) Im sichtbaren Wellenlängenbereich wird diese Materialeigenschaft durch die sog. Abbé-Zahl  $\nu_d = (n_d - 1)/(n_F - n_C)$  charakterisiert, wobei  $n$  mit Indizes  $C$ ,  $d$  und  $F$  den Brechungsindex für Licht im roten, gelben und blauen Wellenlängenbereich (Fraunhofer'sche Linien) darstellt. Berechnen Sie  $\nu_d$  für die beiden in der Tabelle angegebenen Glassorten.

$\lambda(\text{nm})$		BK1	F2
656.28	C	1.50763	1.61503
587.56	d	1.51009	1.62004
486.13	F	1.51566	1.63208

### Lösung:

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$\nu_d(BK1) = 63.523 \quad (4)$$

$$\nu_d(F2) = 36.366 \quad (5)$$

[1]

- c) Als Bedingung für den Achromaten wird gefordert, dass  $f_C$  und  $f_F$  identisch sind. Zeigen Sie, dass das Linsensystem die Gleichung

$$f_{d1}\nu_{d1} + f_{d2}\nu_{d2} = 0$$

erfüllen muss.

### Lösung:

Im Folgenden verwendet man die Näherung

$$\nu_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \approx \frac{n - 1}{2\Delta n} = \frac{D}{2\Delta D}. \quad (6)$$

[1]

Für die Brennweite eines Linsensystems gilt bekannter Weise

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (7)$$

Nimmt man nun sehr kleine Linsenabstände an ( $d \approx 0$ ), so erhält man für die Brechkraft des Systems in Näherung

$$D = D_1 + D_2 \quad (8)$$

$$\rightarrow \Delta D = \Delta D_1 + \Delta D_2 \quad (9)$$

[1]

Ferner soll die Brechkraft des Linsensystems für  $n + \Delta n$  gleich sein.

$$\rightarrow \Delta D = 0 \rightarrow 0 = \frac{D_1}{\nu_{d1}} + \frac{D_2}{\nu_{d2}} \quad (10)$$

$$\Rightarrow 0 = f_1 \nu_{d1} + f_2 \nu_{d2} \quad (11)$$

[1]

- d) Welche Form haben die beiden Linsen also? Warum verwendet man zusätzlich verschiedene Gläser mit sehr unterschiedlichen Abbé-Zahlen?

### Lösung:

Da  $\nu_{d1}$  und  $\nu_{d2}$  positiv sind, müssen die beiden Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  unterschiedliche Vorzeichen haben. D.h. der Achromat besteht aus einer Sammell- und einer Zerstreuungslinse.

[1]

Bestünden die beiden Linsen aus Materialien mit ähnlichen Abbé-Zahlen, so müßte man fast identische Brennweiten für die Linsen wählen, um den gewünschten Effekt zu erzielen. Dies hätte jedoch zur Folge, dass die Brechkraft des Systems sehr klein wäre.

Im Idealfall soll die zweite Linse nur die chromatische Aberration kompensieren, die Brechkraft jedoch unverändert lassen. Dies erreicht man am Besten, wenn man Materialien mit möglichst unterschiedlichen Abbé-Zahlen verwendet.

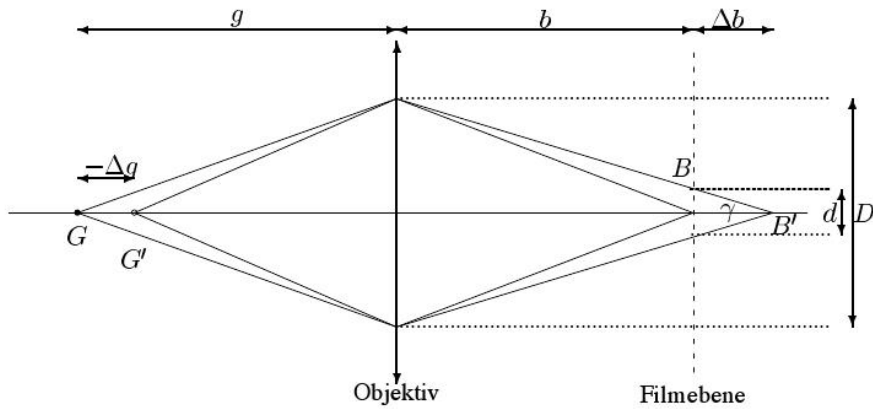
[1]

### Aufgabe 2 (★★) (5 Punkte)

In der Fotografie wird die Blende  $1 : F = D/f$  als Verhältnis zwischen dem Durchmesser  $D$  der Eintrittspupille und der Brennweite eines Objektivs angegeben.

Mit einem Teleobjektiv ( $f = 150$  mm) wird bei Blende  $1 : 4$  auf einen Gegenstand in 5 m Entfernung fokussiert. Berechnen Sie den Schärfentiefenbereich. Nehmen Sie dazu an, dass ein Gegenstand als scharf erscheint, solange er auf dem Film als Kreisscheibe mit einem Durchmesser  $d \leq 0.05$  mm abgebildet wird. Die Skizze hilft Ihnen bei der Orientierung.

(Beachten Sie, daß  $\Delta b \ll b$  und somit  $b + \Delta b \approx b$  folgt. Außerdem gilt  $g \gg f$ .)



### Lösung:

Es sei auf  $G$  in  $5m$  Entfernung fokussiert. Man kann durch einfache Geometrie sehen, dass:

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{d}{2}}{\Delta b} = \frac{\frac{D}{2}}{b + \Delta b} \quad (12)$$

[1]

In erster Näherung  $b + \Delta b \approx b$  ergibt sich daraus:

$$\Delta b = \frac{bd}{D} \quad (13)$$

[1]

Da die Linsengleichung  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$  gilt, können wir uns die implizite Funktion  $h(g, b)$  definieren:

$$h(g, b) = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} = 0 \quad (14)$$

[1]

Da  $h$  für alle Paare  $(g, b)$  gleich null ist, ist auch das totale Differential  $dh$  überall null:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial g} dg + \frac{\partial h}{\partial b} db = 0 \quad (15)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta b}{b^2} + \frac{\Delta g}{g^2} = 0 \quad (16)$$

[1]

Diese Gleichung lösen wir nach  $-\Delta g$  auf und benutzen, dass wegen  $g \gg f$  angenommen werden kann, dass  $b \approx f$ :

$$-\Delta g = \frac{g^2}{b^2} \Delta b \approx \frac{g^2}{f^2} \Delta b = \frac{g^2}{f^2} \frac{bd}{D} \approx \frac{g^2}{f^2} \frac{f}{D} d = 22.2 \text{cm} \quad (17)$$

[1]

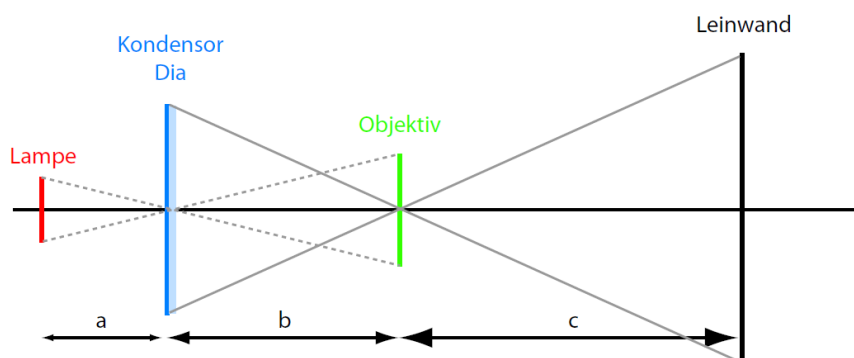
### Aufgabe 3 (★★) (10 Punkte)

Ein Projektor besteht aus Lichtquelle, Kondensator und Objektiv. Der Kondensator dient dazu, das Objektiv optimal auszuleuchten. Das Objektiv bildet dann das Dia auf die Leinwand ab. Zur Vereinfachung darf angenommen werden, dass Kondensator und Objektiv aus dünnen Linsen bestehen, und dass sich das Dia unmittelbar hinter dem Kondensator befindet.

Ein Projektor soll nun ein Kleinbild-Dia ( $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$ ) in einer Entfernung von  $3 \text{ m}$  vom Objektiv auf eine Leinwand der Größe  $1.25 \text{ m} \times 1.25 \text{ m}$  abbilden. Dabei sollen die Leinwand und die Halogenlampe optimal ausgenutzt werden. Die leuchtende Fläche der Halogenlampe beträgt  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ . Das Objektiv hat einen Durchmesser von  $30 \text{ mm}$ .

a) Zeichnen Sie eine Skizze des Projektors.

**Lösung:**



[3]

b) Wie weit ist das Dia vom Objektiv entfernt und welche Brennweite  $f_{\text{Objektiv}}$  hat das Objektiv?

**Lösung:**

Die Entfernung des Dias zum Objektiv ist gegeben durch  $b$  und kann über die transversale Vergrößerung berechnet werden. Diese ist gegeben durch

$$V_T = \frac{1.25\text{m}}{36\text{mm}} = 34.7 \quad (18)$$

[1]

Dann folgt mit  $V_T = \frac{c}{b}$ :

$$b = \frac{3\text{m}}{34.7} = 8.64\text{cm} \quad (19)$$

[1]

und die Brennweite des Objektivs:

$$\frac{1}{f_{\text{Objektiv}}} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \rightarrow f_{\text{Objektiv}} \approx 84\text{mm} \quad (20)$$

[1]

- c) Wie weit ist die Lampe vom Kondensator entfernt und welche Brennweite  $f_{\text{Kondensator}}$  hat dieser?

### Lösung:

Das Bild der Diagonalen der Lampe muss gleich dem Objektivdurchmesser sein. Hier muss, wie auch in Teil b), das Verhältnis der Bildgröße (30 mm) zur Objektgröße  $\sqrt{2}\text{cm}$  gleich dem Verhältnis des Abstands Kondensator-Objektiv ( $b = 8.64\text{ cm}$ ) zum gesuchten Abstand Lampe-Kondensator  $a$  sein.

[1]

Deshalb ergibt sich:

$$\frac{3\text{cm}}{\sqrt{2}\text{cm}} = \frac{8.64\text{cm}}{a} \rightarrow a = 4.07\text{cm} \quad (21)$$

[1]

Damit ist die Brennweite des Kondensators gegeben durch

$$\frac{1}{f_{\text{Kondensator}}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \rightarrow f_{\text{Kondensator}} = 2.8\text{cm} \quad (22)$$

[1]

- d) Welchen Durchmesser muss der Kondensator mindestens haben?

### Lösung:

Da das Dia voll ausgeleuchtet sein soll, muss der Durchmesser des Kondensator ebenso groß sein:

$$d_{\text{Kondensator}} = d_{\text{Dia}} = \sqrt{24^2 + 36^2}\text{mm} = 43.3\text{mm} \quad (23)$$

[1]

**Aufgabe 4 (★★) (6 Punkte)**

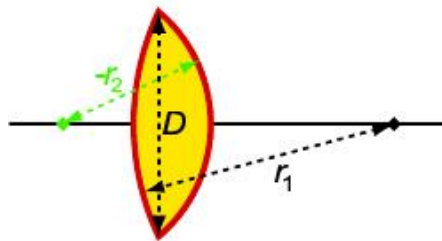
Das Modell eines Zoom-Objektivs für eine Kleinbild-Kamera soll aus zwei dünnen Sammellinsen mit veränderbarem Abstand  $d$ , gleichen Brennweiten und Brechzahlen  $n = 1.57$  aufgebaut werden und folgende Eigenschaften haben:

Brennweitenvariation zwischen 90 mm und 210 mm, Öffnungsverhältnis 1 : 3.5.

- a) Alle Oberflächen der sphärischen Sammellinsen haben den Krümmungsradius  $r = 91\text{mm}$ . Wie groß ist deren Brennweite  $f_1$  bzw.  $f_2$ ?

**Lösung:**

Nach der bekannten Formel kann man aus den Radien ( $r_1 = -r_2$ ) der Linse und des Brechungsindex des Glases die Brennweite berechnen:



$$f = \frac{1}{n-1} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 79.8\text{mm} \quad (24)$$

[1]

- b) Welchen Durchmesser  $D$  muss die Frontlinse (Eintrittspupille) haben?

**Lösung:**

Sei  $F$  die Blendenzahl. Das Öffnungsverhältnis ist dann durch  $F = \frac{f}{D}$  gegeben. Für  $F = 3.5$  und  $f_{max} = 210\text{mm}$  ergibt sich:

$$D = \frac{f}{F} = 60\text{mm} \quad (25)$$

[1]

- c) In welchem Bereich muss der Linsenabstand  $d$  veränderbar sein?

### Lösung:

Die Brennweiten beider Linsen sind nach Aufgabenstellung gleich, also  $f_1 = f_2$ . Für eine Linsenkombination mit dem Abstand der Linsen  $d$  ergibt sich die Brennweite zu:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{f_1^2}{2f_1 - d} \quad (26)$$

$$\rightarrow d = \frac{2f f_1 - f_1^2}{f} \quad (27)$$

Durch Einsetzen erhält man:

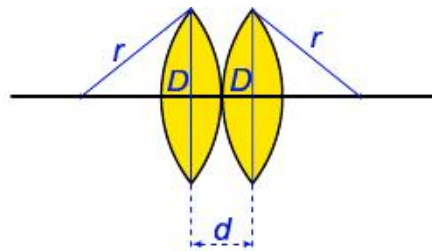
$$f_{min} = 90\text{mm} \rightarrow d_{min} = 88.8\text{mm} \quad (28)$$

$$f_{max} = 210\text{mm} \rightarrow d_{max} = 129.3\text{mm} \quad (29)$$

[1]

- d) Welche kleinste Brennweite ist möglich, wenn beide Linsen denselben Durchmesser  $D$  haben?

### Lösung:



Der kleinste Abstand zwischen den beiden Linsen entspricht gerade der Linsendicke. Nach Pythagoras erhalten wir:

$$\left(r - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = r^2 \quad (30)$$

$$\rightarrow d^2 - 4rd + D^2 = 0 \quad (31)$$

$$\rightarrow d = 2r \pm \sqrt{4r^2 - D^2} \quad (32)$$

[1]

Man wählt natürlich die kleinere der beiden Lösungen und erhält somit  $d = 10.2\text{mm}$ .

[1]



Die kleinste Brennweite ist also:

$$f = \frac{f_1^2}{2f_1 - d} = 42.6\text{mm} \quad (33)$$

[1]