Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

8. Übungsblatt - 13.Dezember 2010

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

Aufgabe 1 (★★) (7 Punkte)

Gegeben sei ein Fernrohr mit dem Objektivdurchmesser D und der Vergrößerung v. Bestimmen Sie das Verhältnis der Beleuchtungsstärken (Strahlungsleistung pro Flächeneinheit) der Bilder, die von weit entfernten Gegenständen auf die Netzhaut eines Auges (Pupillendurchmesser d) mit und ohne Fernrohr projiziert werden.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass für die Gegenstandsweite g und Bildweite b gilt: $g >> b$ und deshalb $b \approx f$.

Lösung:

Im Folgenden sei g die Gegenstandsweite, G die Größe des Gegenstandes, b die Bildweite, B die Bildgröße, f_a die Brennweite des Auges und d der Pupillendurchmesser. Da im Allgemeinen $g \gg b$ kann man für $b \simeq f$ annehmen. Ohne Fernrohr ergibt sich die Bildgröße auf der Netzhaut zu

$$B = \frac{b}{g}G \simeq \frac{f_a}{g}G \tag{1}$$

[1]

Für die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit, die sog. Beleuchtungsstärke, ergibt sich ein Zusammenhang von

$$\frac{\Phi}{F} \sim \frac{\pi d^2}{4\pi g^2} \cdot \frac{1}{\pi B^2} = \frac{d^2}{4\pi G^2 f_a^2} \tag{2}$$

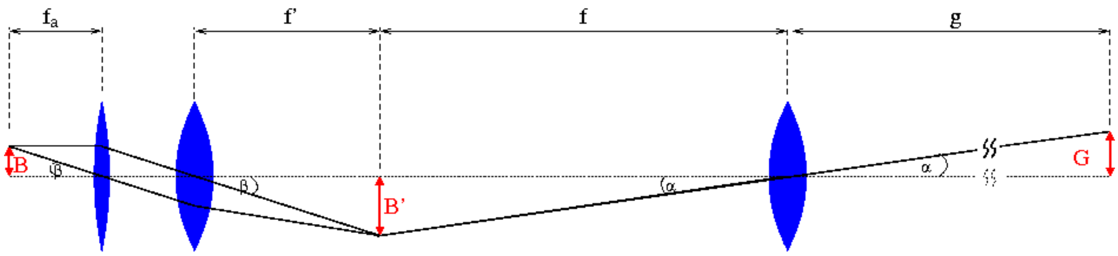
[1]

Mit Fernrohr ergibt sich im Auge natürlich eine andere Bildgröße und somit eine andere Beleuchtungsstärke.

Es gilt somit für das Bild im Auge:

$$B = f_a \cdot \tan\beta \simeq f_a\beta \tag{3}$$

$$\text{und } \beta \simeq \frac{B'}{f'} \tag{4}$$



Aus der Geometrie kann man für das Zwischenbild

$$B' = f \cdot \tan\alpha = f \cdot \frac{G}{g} \tag{5}$$

[**1**]

ablesen. Für den Winkel β ergibt sich somit

$$\beta \simeq \frac{f}{f'}\frac{G}{g} = v\frac{G}{g} \text{ bzw. } \beta = v \cdot \alpha \tag{6}$$

Die Bildgröße ergibt sich zu

$$B = f_a v \frac{G}{g} \tag{7}$$

[**1**]

Da man nun die neue Bildgröße besitzt, ist man in der Lage, analog zum ersten Teil der Aufgabe, die neue Beleuchtungsstärke zu berechnen. Es ergibt sich ein Zusammenhang von

$$\frac{\Phi}{F} \sim \frac{\pi D^2}{4\pi g^2} \cdot \frac{1}{\pi B^2} = \frac{D^2}{4\pi G^2 f_a^2 v^2} \tag{8}$$

[**1**]

Hierbei ist D der Objektivdurchmesser und v die Vergrößerung. Als Verhältnis der Beleuchtungsstärken ergibt sich somit letztendlich

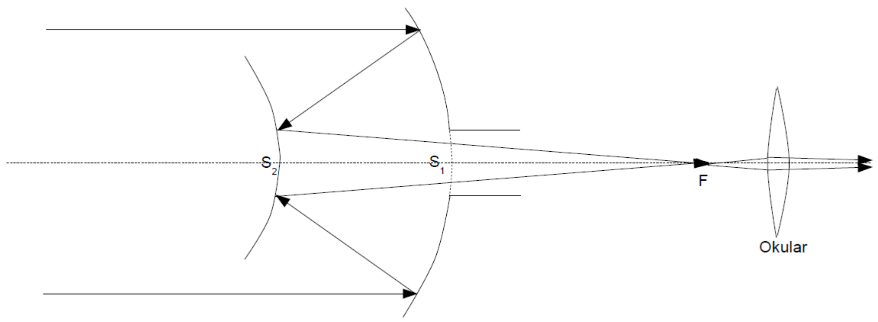
$$\frac{\text{Bel.stärke mit Fernrohr}}{\text{Bel.stärke ohne Fernrohr}} = \frac{1}{v^2}\frac{D^2}{d^2} \tag{9}$$

[**1**]

D.h Fernrohre mit starker Vergrößerung benötigen große Objektive, was durch Linsenfehler (besonders chromatische Aberation) leicht zu technischen Problemen führen kann. Deswegen geht man ab einer bestimmten Größe zu Spiegelteleskopen über.

Aufgabe 2 (★★) (8 Punkte)

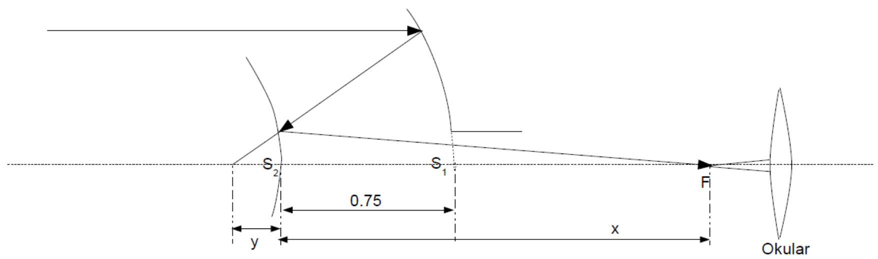
Ein Teleskop zur Betrachtung weit entfernter Sterne bestehe aus zwei sphärischen Spiegeln (siehe Skizze). Der Krümmungsradius des großen Spiegels (mit einem Loch im Zentrum) sei 2.0 m, derjenige des kleinen betrage 0.6 m. Der Abstand der beiden Scheitel S_1, S_2 der beiden Spiegel sei 0.75 m.



a) Berechnen Sie den Abstand des bildseitigen Brennpunktes F des Spiegelsystems vom Scheitel S_2 des kleinen Spiegels (parallel einfallende Strahlen, siehe Skizze).

Lösung:

Mit den Bezeichnungen aus der Skizze folgt aus der Abbildungsgleichung:



Aus der Gleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{10}$$

erhält man mit $g = \infty$ und $f = \frac{r}{2}$

$$\frac{1}{b} = \frac{2}{r_1} \tag{11}$$

[**1**]

Außerdem gilt:

$$b = y + 0.25\text{m} \tag{12}$$

$$\rightarrow y = \frac{r_1}{2} - 0.75\text{m} = 0.25\text{m} \tag{13}$$

[**1**]

Der Bildpunkt wird nun vom zweiten Spiegel in den Brennpunkt fokussiert, wobei nun auf die negativen Vorzeichen von y und r_2 geachtet werden muss:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{r_2} \tag{14}$$

[**1**]

$$\rightarrow x = \frac{yr_2}{2y - r_2} = \frac{0.25 \times 0.6}{-0.5 + 0.6} = 1.5\text{m} \tag{15}$$

[**1**]

b) Bestimmen Sie die effektive Brennweite der Anordnung beider Spiegel.

Lösung:

Mit $f_1 = 1$ m, $f_2 = -0.3$m und $d = 0.75$m berechnet man aus der Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \tag{16}$$

[**1**]

die effektive Brennweite:

$$f = 6\text{m} \tag{17}$$

[**1**]

c) Mit Hilfe eines Okulars ($f_{Okular} = 2$ cm) wird nun das reelle Zwischenbild des Sterns mit entspanntem Auge betrachtet. Berechnen Sie die Vergrößerung des Gesamtsystems.

Lösung:

$$v = \frac{f}{f_{Ok}} = \frac{600}{2} = 300 \tag{18}$$

[**1**]

d) Was sind die Hauptvorteile von Spiegelteleskopen gegenüber astronomischen Fernrohrern (Linsenteleskope)?

Lösung:

Es gibt zum einen keine chromatische Aberration (eine gr̈ßere Bandbreite $\Delta\lambda$ wird übertragen) und zum anderen sind Spiegel in größeren Durchmessern konstruierbar und justierbar, was eine höhere Lichtausbeute zur Folge hat.

[**1**]

Aufgabe 3 (★) (6 Punkte)

Ein Lichtstrahl (Wellenlänge λ= 600 nm) durchquert einen Spalt (Breite d= 0.01 nm) und fällt senkrecht auf einen Schirm, der 2 m vom Spalt entfernt ist.

a) Benutzen Sie die Ergebnisse der Fraunhoferschen Beugung, um den Abstand zwischen den ersten Minima des Interferenzmusters zu ermitteln.

Lösung:

Damit die Näherungen der Fraunhoferschen Beugung zutreffen, wird Beugung an einem langen Spalt vorausgesetzt. Dann ist aus der Vorlesung bekannt, dass die gebeugte Intensität proportional ist zu:

$$I(\theta) \propto \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}} \tag{19}$$

wo b die Breite des Spalts ist. Die ersten Minima gibt es dann für $I(\theta_{min}) = 0$ bei

$$sin(\theta_{min}) = \pm\frac{\lambda}{b}, \tag{20}$$

[**1**]

also in diesem Fall bei

$$\theta = \pm 0.06004\text{rad} \tag{21}$$

[**1**]

Die Entfernung zum Schirm ist gegeben durch

$$x = z\tan(\theta), \tag{22}$$

als ist mit z= 2m

$$x = \pm 0.1201\text{m} \tag{23}$$

Daher beträgt der Abstand zwischen den ersten Minima 240 mm.

[**1**]

b) Nehmen Sie an, dass der Schirm mit Phosphor beschichtet ist, und dass statt Licht ein Elektronenstrahl verwendet wird. Durch welches Potential sollten die Elektronen vor dem Erreichen des Spalts beschleunigt werden, wenn die Ausdehnung des Strahls um einen Faktor 10^3 gegenüber dem des Lichtstrahls reduziert sein soll?

Lösung:

Wenn wir wollen, dass die Ausdehnung um einen Faktor 1000 reduziert werden soll, muss die Wellenlänge ebenfalls um einen Faktor 1000 reduziert sein. Daher hat der Elektronenstrahl eine Wellenlänge von

$$\lambda = 0.6\text{nm} \tag{24}$$

[**1**]

Die Wellenlänge eines Teilchens ist durch die de Broglie-Beziehung gegeben:

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{25}$$

Dies kann man in die Energieformel für ein nonrelativistisches Teilchen mit Masse m einsetzen:

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{26}$$

[**1**]

Zusätzlich gilt

$$E = eV, \tag{27}$$

wo V das Beschleunigungspotential ist. Komibiniert man diese Gleichungen, erhält man schließlich

$$V = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = 4.2\text{V} \tag{28}$$

[**1**]

Aufgabe 4 (★) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Das Produkt der Fourier-Transformierten zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist gleich der Fourier-Transformierten des Faltungsintegrals

$$\int dx' f(x-x')g(x').$$

Die Faltung wird öfters bei Berechnungen von Beugungsmustern für Mehrfachspalte verwendet.

Lösung:

Die Behauptung ist also:

$$\int e^{-ikx} f(x)dx \cdot \int e^{-ikx'} g(x')dx' = \int e^{-ikx''} \int f(x'' - x')g(x')dx'dx''. \tag{29}$$

[**1**]

Um dies zu beweisen, vertauscht man die Integrationsreihenfolge:

$$\int \int e^{-ik(x''-x')} e^{-ikx'} f(x'' - x')g(x')dx''dx' = \int e^{-ikx'} g(x') \int e^{-ikx} f(x)dxdx'. \tag{30}$$

[**1**]

Dabei hat man im letzten Schritt $x = x'' - x'$ gesetzt. Man kann nun den einzelnen Spalt durch $g(x)$ beschreiben und die Anordnung verschiedener Spalte durch einen Kamm aus δ-Funktionen $f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - c_j)$.

[**1**]

Für die Faltung ergibt sich demnach:

$$h(x) = \int dx' f(x - x')g(x') = \sum_{j=0}^{N-1} g(x - c_j) \tag{31}$$

[**1**]

Aus dem Faltungstheorem ist zu erkennen, dass ein allgemeines Beugungsmuster als Produkt der Einspaltbeugung mit der Beugung an der Mehrspaltanordnung beschrieben werden kann.