Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

9. Übungsblatt - 20.Dezember 2010

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

Aufgabe 1 (★★) (5 Punkte)

Mit einem streng parallelen Laserlichtbündel (Wellenlänge λ=650 nm) aus einem Laser mit einer Blende des Durchmessers $d_0 = 1$ m soll von der Erde aus ein Fleck auf der Mondoberfläche bestrahlt werden. Die Entfernung Erde-Mond beträgt l=384000 km. Welchen Durchmesser d hat das bestrahlte Gebiet auf dem Mond? Skizze

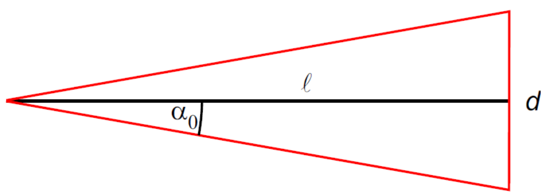
Lösung:

Das Laserlicht tritt aus einer kreisrunden Öffnung aus. Statt eins Lichtpunktes, wie es aus einer geometrischen Abbildung folgen würde, erhält man ein Beugungsscheibchen. Die Begrenzung des Scheibchens ist durch den Winkel gegeben, für den die bei der Beugung verwendete Besselfunktion 1. Ordnung ein Minimum hat. Für den ersten Winkel gilt die Beziehung:

$$\sin(\alpha_0) = 1.22\frac{\lambda}{d_0} \tag{1}$$

[**1**]

Skizze der Anordnung:



[**1**]

Natürlich kann man nähern:

$$\alpha_0 \approx \alpha_0 \frac{d}{2l} \tag{2}$$

[**1**]

Damit ergibt sich:

$$\frac{d}{2l} = 1.22\frac{\lambda}{d_0} \tag{3}$$

[**1**]

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhält man die Lösung:

$$d = 2.44\frac{l\lambda}{d_0} \approx 609\text{m} \tag{4}$$

[**1**]

Aufgabe 2 (★) (4 Punkte)

Ein Strahl von thermischen Neutronen mit einer kinetischen Energie von 25 meV trifft auf ein Paar extrem dünner Spalte, die einen Abstand von 0.1 mm haben. Wie groß ist der Abstand zwischen benachbarten Minima auf einem neutronensensitiven Schirm, der sich 20 m hinter den Spalten befindet? (Hinweis: Zwischen dem Impuls p eines Teilchens und der Wellenlänge seiner Materiewelle besteht die de Broglie-Beziehung $\lambda = h/p$, wobei $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js die Planck-Konstante ist.)

Lösung:

Die Beziehung zwischen kinetischer Energie und de-Broglie Wellenlänge ist:

$$p = \sqrt{2E_{kin}m} = \frac{h}{\lambda} \tag{5}$$

Aus der Energie kann man demnach die Geschwindigkeit und Wellenlänge berechnen:

$$E_{kin} = 25\text{meV} \rightarrow v = 2187\frac{\text{m}}{\text{s}},\ \lambda = 1.8 \cdot 10^{-10}\text{m} \tag{6}$$

[**2**]

Berücksichtigt man die Kleinwinkelnäherung, so ergibt sich für die Beugung am Doppelspalt die Bedingung für ein Minima zu

$$\Delta s = g\frac{x}{l} = \frac{\lambda}{2}(2m+1) \tag{7}$$

[**1**]

Hierbei ist Δs der Gangunterschied zwischen den beiden Strahlgängen, x die Position der Minima, l der Abstand zwischen Gitter und Schirm und g der Gitterabstand (also in diesem Fall der Abstand zwischen den beiden Spalten). Gesucht ist der Abstand benachbarter Minima Δx. Man muss also den Fall m und $m+1$ betrachten. Es ergibt sich

$$\Delta x = \frac{l}{g}\lambda = 36\mu\text{m} \tag{8}$$

[**1**]

Aufgabe 3 (★) (4 Punkte)

Bei einem Transmissionsgitter (Strichabstand d, Spaltbreite b) wird das dritte Hauptmaximum nicht beobachtet, weil es mit dem ersten Beugungsminimum zusammenfällt.

a) Berechnen Sie das Verhältnis d/b.

Lösung:

Als Bild ergibt sich ein durch das Beugungsbild des Einzelspaltes moduliertes Interferenzbild des gesamten Gitters. In unserem Fall fällt der Winkel des 3. Interferenzmaximums genau mit dem Winkel des ersten Beugungsminimums zusammen:

$$\left.\begin{array}{rr} \text{3. Maximum}: & d\sin\theta = 3\lambda \\ \text{1. Minimum}: & b\sin\theta = \lambda \end{array}\right\} \frac{d}{b} = 3 \tag{9}$$

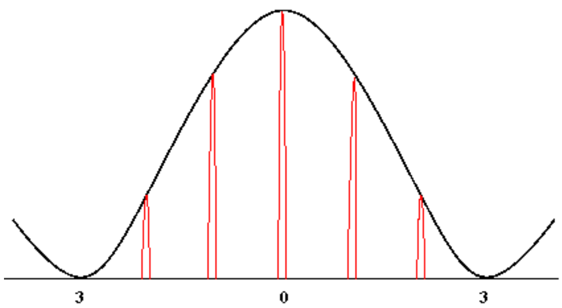
[**2**]

b) Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung.

Lösung:

Wie in der Zeichnung zu erkennen ist, ergibt sich durch das Beugungsminimum eine Einhüllende für das Interferenzbild.

[**1**]



[**1**]

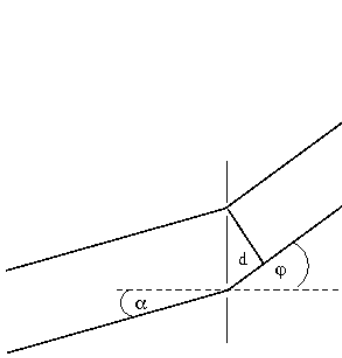
Aufgabe 4 (★★) (5 Punkte)

Ein Spalt, der von einer Lichtquelle beleuchtet wird, befindet sich in der Brennebene einer Sammellinse ($f = 20$cm). Nach dem Durchgang durch die Linse fällt das Licht auf ein senkrecht zur optischen Achse der Linse angeordnetes Beugungsgitter (Strichzahl $N = 1000$, Strichabstand $d = 0.01$mm). Bestimmen Sie die Breite x, die der Spalt höchstens haben darf, damit das Auflösungsvermögen des Gitters für Wellenlängen im Bereich von $\lambda = 500$ nm nicht beeinträchtigt wird.

Lösung:

Es ist möglich, auf zwei verschiedenen Wegen zum Ziel zu gelangen:

1. Man betrachte ein Gitter, auf das Licht unter einem Winkel α einfällt:



Die Bedingung für ein Maximum ergibt sich hierbei zu:

$$\Delta = d \sin \Theta_{max} - d \sin \alpha = k\lambda \tag{10}$$

$$\rightarrow d \sin \Theta_{max} = k\lambda + d \sin \alpha \tag{11}$$

Hingegen ist die Bedingung für ein Minimum:

$$d \sin \Theta_{min} = k\lambda + \frac{\lambda}{N} \tag{12}$$

wobei N die Anzahl der Striche des Gitters ist.

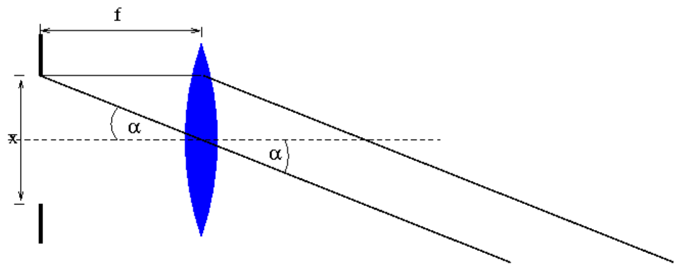
[1]

Das Auflösungsvermögen des Gitters wird durch den Spalt, dessen Breite x den Winkel α vorgibt, nicht beeinflusst, solange der Winkel für das Minimum weit genug entfernt ist vom Winkel für das Maximum. Dadurch folgt aus dem Vergleich von (11) und (12):

$$d \sin \alpha \ll \frac{\lambda}{N} \tag{13}$$

[1]

Betrachtet man die Geometrie am Spalt und der Linse, so ergibt sich für den maximalen Winkel α in Abhängigkeit von der Spaltgröße:



[1]

$$\tan\alpha\,(=\sin\alpha) = \frac{x}{2f} \tag{14}$$

[1]

Setzt man das in (13) ein, so erhält man:

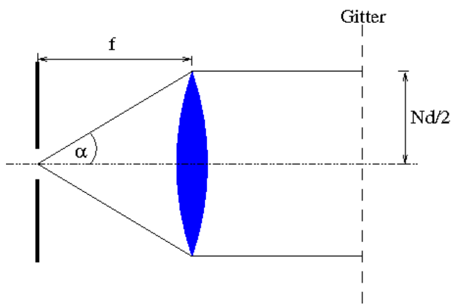
$$d\frac{x}{2f} \ll \frac{\lambda}{N} \tag{15}$$

$$x \ll \frac{2f\lambda}{Nd} = 20\mu\text{m} \tag{16}$$

[1]

2. Die zweite Möglichkeit besteht darin, das erste Beugungsminimum des Spaltes weit entfernt vom Rand des Gitters anzunehmen. Damit wird sichergestellt, dass das Beugungsbild des Spaltes das Auflösungsvermögen des Gitters nicht beeinträchtigt. Diese Bedingung modifiziert die Formel für das erste Beugungsminimum:

$$x\sin\alpha \ll \lambda \tag{17}$$



Ersetzt man den Sinus durch einen Tangens erhält man direkt:

$$\begin{aligned} x\tan\alpha &\ll \lambda && (18)\\ x\frac{Nd}{2f} &\ll \lambda && (19)\\ x &\ll \frac{2f\lambda}{Nd} = 20\mu\text{m} && (20) \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (★★) **(7 Punkte)**

a) In kristallinem Natrium sitzen die Atome auf den Eck- und Mittelpunkten eines Gitters (flächenzentriert kubisches Gitter), das aus würfelförmigen Einheitszellen der Kantenlänge $a = 4.29\AA$ aufgebaut ist. Sie beugen monochromatische Röntgenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 1.54\AA$ an den zu den Würfelseiten parallelen Netzebenen. Bei welchen Beugungswinkeln tritt Bragg-Reflexion auf?

Lösung:

Es ist im Wesentlichen nach der Bragg-Beziehung gefragt. Trifft Röntgenlicht auf das dreidimensionale Gitter, so interferieren die an verschiedenen Netzebenen gestreuten Strahlen konstruktiv, wenn der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge λ beträgt. Dies führt zur Bragg-Bedingung

$$n\lambda = 2d\sin(\theta) \tag{21}$$

[**1**]

Der Netzebenenabstand parallel zu den Würfelseitenflächen beträgt $d = a/2 = 2.145\AA$, da man ja die Mittelatome mitzählen muss.

[**1**]

Daraus folgt, dass

$$\sin(\theta_n) = 0.359n \tag{22}$$

Also

$$\theta_n = \arcsin(0.359n) \quad \text{für } n = 1, 2, ... \tag{23}$$

[**1**]

Lösungen sind

$$\theta_1 \approx 21.0^\circ \quad , \quad \theta_2 \approx 45.9^\circ \tag{24}$$

Für größere n gibt es keine Lösung.

[**1**]

b) Ein Neutronenstrahl fällt auf polykristallines Wismut (größter Gitterebenenabstand 4 $\AA$). Man suche den Energiebereich der Neutronen, für den dieser Filter keine kohärente Streuung liefert. Leiten Sie diesen aus dem Ausdruck $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ her.

Lösung:

Es gilt natürlich wieder die Bragg-Bedingung

$$n\lambda = 2d\sin(\theta) \tag{25}$$

Sie kann nicht mehr erfüllt werden, wenn

$$\lambda > 2d_{\max} \tag{26}$$

ist, also

$$\lambda > 0.8\mathrm{nm} \tag{27}$$

[**1**]

Oberhalb dieser Grenzwellenlänge gibt es keine kohärente Streeung mehr. Es ist $k = 2\pi/\lambda$, also folgt

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \tag{28}$$

[**1**]

Also ist der gesuchte Energiebereich

$$0 \leq E \leq \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2d_{\max}}\right)^2 = 1.3 \times 10^{-3}\mathrm{eV} \tag{29}$$

[**1**]