

---

# Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

10. Übungsblatt - 10. Januar 2011

Musterlösung

---

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

---

## Aufgabe 1 (★) (6 Punkte)

- a) Erklären Sie, warum Seifenblasen in bunten Farben schillern.

### Lösung:

Die Farben der Seifenblase werden durch Interferenz an dünnen Schichten erzeugt. Für eine gegebene Schichtdicke erfüllen nur bestimmte Wellenlängen die Bedingung für konstruktive oder destruktive Interferenz. Nur diese Frequenzen werden jeweils verstärkt oder ausgelöscht, was eine bestimmte Farbe zur Folge hat.

[1]

Verschiedene Dicken der Lamelle an unterschiedlichen Stellen führen zu verschiedenen Farben. Durch Gravitation und Bewegung der gesamten Blase fließt die Seifenlauge in der Haut. Dadurch entstehen Dickefluktuationen, und die Blase beginnt zu schillern.

[1]

- b) Eine Seifenblase, die von Luft umgeben ist, hat einen Brechungsindex von 1.34. Ein Bereich erscheint im senkrecht reflektierten Licht rot ( $\lambda_0 = 734\text{nm}$ ). Geben Sie zwei mögliche Schichtdicken der Seifenhaut an.

### Lösung:

Durch Reflexion am optisch dichteren Medium entsteht ein Phasensprung von  $\pi$ . Für konstruktive Interferenz gilt:

$$m \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} 2nd + \pi \quad (1)$$

$$\rightarrow d = \frac{\lambda}{4n} (2m - 1) = 136.9\text{nm} \cdot (2m - 1) \quad (2)$$

[1]

Für  $m = 1$  und  $m = 2$  entstehen Schichtdicken von  $d_1 = 137\text{nm}$  bzw.  $d_2 = 411\text{nm}$ , und für  $m = 3$  und  $m = 4$  Schichtdicken von  $d_3 = 685\text{nm}$  bzw.  $d_4 = 958\text{nm}$ .

[1]

c) Welche Wellenlängen aus dem sichtbaren Spektralbereich werden bei der Reflexion an einer 500nm dicken Seifenschicht mit dem Brechungsindex 1.34 bei senkrechtem Strahleinfall

- verstärkt und
- ausgelöscht?

Das wahrnehmbare Lichtspektrum für das menschliche Auge liegt bei Wellenlängen zwischen 380nm – 780nm.

### Lösung:

Für Verstärkung gilt:

$$2nd = \frac{\lambda_m}{2}(2m - 1) \quad (3)$$

$$\lambda_m = \frac{2680\text{nm}}{2m - 1} \Rightarrow \lambda_3 = 536\text{nm} \text{ und } \lambda_4 = 383\text{nm} \quad (4)$$

[1]

Für Auslöschung gilt:

$$2nd = m\lambda_m \quad (5)$$

$$\lambda_m = \frac{1340\text{nm}}{m} \rightarrow \lambda_2 = 670\text{nm} \text{ und } \lambda_3 = 447\text{nm} \quad (6)$$

[1]

### Aufgabe 2 (★★) (8 Punkte)

Welche optischen Weglängendifferenzen in den beiden Armen eines Michelson-Interferometers sind höchstens zulässig, damit gerade noch Interferenzstreifen beobachtet werden können unter Verwendung von:

a) Laserlicht ( $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-13}$ ,  $\lambda \approx 550\text{nm}$ ;  $\Delta\nu$  ist die spektrale Halbwertsbreite)

### Lösung:

Die Kohärenzlänge berechnet sich aus der Lichtgeschwindigkeit  $c$  und der Kohärenzzeit  $\tau = \frac{1}{\Delta\nu}$ :

$$\Delta s = c \cdot \tau = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda}{\frac{\Delta\nu}{\nu}} \quad (7)$$

[1]

$$\Delta s_{\text{Laser}} = 5500\text{km} \quad (8)$$

[1]

b) Licht aus einem angeregten Atomstrahl ( $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-7}$ ,  $\lambda \approx 550\text{nm}$ )

**Lösung:**

$$\Delta s_{\text{Atomstrahl}} = 5.5\text{m} \quad (9)$$

[1]

c) weißem Licht? (Näherung!)

**Lösung:**

d) Bei weißem Licht besteht eine feste Phasenbeziehung nur innerhalb eines einzelnen Wellenzuges. Für eine grobe Näherung betrachten wir Wellenlängen zwischen 400nm und 800nm. Es gilt also  $|\Delta\lambda/\lambda| \approx (800\text{nm} - 400\text{nm})/600\text{nm} = 2/3$ . Dies muss noch durch  $\Delta\nu/\nu$  ausgedrückt werden.

[1]

Hierfür benutzen wir:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \implies \frac{\partial\nu}{\partial\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} = -\frac{\nu}{\lambda} \quad (10)$$

$$\implies \frac{\partial\nu}{\nu} = -\frac{\partial\lambda}{\lambda} \rightsquigarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad (11)$$

$$\implies \left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right| = \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| \quad (12)$$

[1]

Hiebei wurde der Übergang von infinitesimalen zu makroskopischen Verschiebungen in  $\nu$  und  $\lambda$  durchgeführt, was eine Näherung darstellt.

[1]

Somit kann man benutzen:  $|\Delta\nu/\nu| \simeq |\Delta\lambda/\lambda| \approx (800\text{nm} - 400\text{nm})/600\text{nm} = 2/3$ .

[1]

Damit erhalten wir

$$\Delta s_{\text{Licht}} = 900\text{nm} \quad (13)$$

was also mit einer Wellenlänge vergleichbar ist.

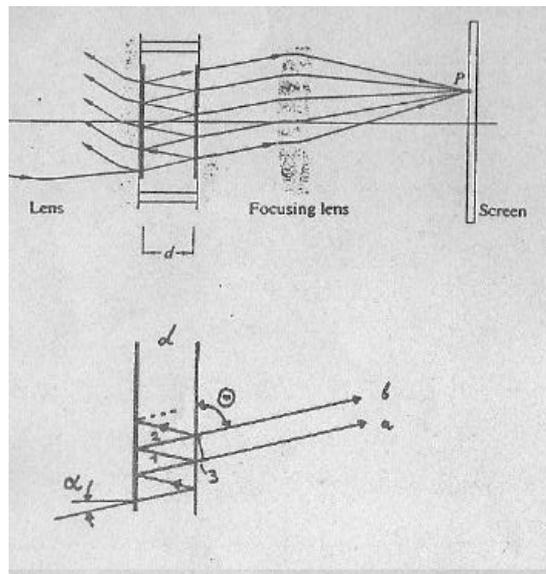
[1]

### Aufgabe 3 (★★) (9 Punkte)

Ein Fabry-Perot-Interferometer mit Plattenabstand  $d = 5 \text{ cm}$  werde als Spektrometer für Licht der Wellenlänge  $\lambda \approx 500 \text{ nm}$  benutzt. Durch eine Linse der Brennweite  $f = 50 \text{ cm}$  werden die Interferenzerscheinungen als Ringe auf einem Schirm abgebildet.

a) Welchen maximalen Radius kann der innerste Interferenzring annehmen?

**Lösung:**



Wir betrachten den Wegunterschied zweier Strahlen, von denen einer der beiden einmal öfter zwischen den Spiegeln reflektiert wurde:

$$\Delta = \text{Weg1} + \text{Weg2} - \text{Weg3} \quad (14)$$

[1]

Aus einfachen geometrischen Überlegungen erhält man:

$$\text{Weg1} = \text{Weg2} = \frac{d}{\cos \alpha} \quad (15)$$

$$\text{Weg3} = 2 \sin \alpha \sin \alpha \cdot \text{Weg1} = 2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{d}{\cos \alpha} \quad (16)$$

$$(17)$$

[1]

Somit ergibt sich für den Gangunterschied:

$$\Delta = \frac{2d}{\cos \alpha} - 2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{d}{\cos \alpha} \quad (18)$$

$$= 2d \cos \alpha \quad (19)$$

[1]

Wie üblich muss dieser Wegunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge sein:

$$m\lambda = 2d \cos \alpha \quad (20)$$

[1]

Der innerste Ring hat gerade dann einen maximalen Radius, wenn in der Mitte (bei  $\alpha = 0$ ) ein Interferenzmaximum als Punkt erscheint. Zu beachten ist hierbei, dass der Punkt in der Mitte die Ordnung  $m + 1$  hat (siehe Gleichung (20) bei festem  $\lambda$  und  $d$ : der Wert des  $\cos$  steigt mit abnehmendem Winkel, wodurch  $m$  ebenso in Richtung der optischen Achse ansteigt!). Also gilt:

$$(m + 1)\lambda = 2d$$

$$m = \frac{2d}{\lambda} - 1 = 2 \cdot 10^5 - 1 \quad (21)$$

[1]

Setzen wir dieses  $m$  in Gleichung (20) ein, so erhalten wir einen Wert für  $\alpha$ , mit dem wir den maximalen Radius des innersten Ringes berechnen können zu:

$$r = f \tan \alpha \approx f \alpha = 1.58 \text{mm} \quad (22)$$

[1]

- b) Wie groß sind Auflösungsvermögen und freier Spektralbereich (Bereich  $\Delta\lambda$ , innerhalb dessen Spektrallinien beobachtet werden können, ohne dass sich die Ringe unterschiedlicher Ordnung überlagern)?

### Lösung:

Betrachten wir, wann sich im Zentrum die benachbarten Ordnungen leicht unterschiedlicher Wellenlängen überlagern:

$$(m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \quad (23)$$

[1]

$$\rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m = 2 \cdot 10^5 \quad (24)$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = 2.5 \cdot 10^{-3} \quad (25)$$

[1]

Das Auflösungsvermögen ist mit  $2 \cdot 10^5$  also sehr hoch, allerdings bei einem geringen freien Spektralbereich.

[1]

#### Aufgabe 4 (★★) (9 Punkte)

Das Auflösungsvermögen  $y_{min}$  eines Lichtmikroskops soll mit dem eines Elektronenmikroskops verglichen werden. Es wird zunächst angenommen, dass beide einen Öffnungswinkel  $2\sigma = 120^\circ$  haben. Das Lichtmikroskop wird mit Licht eines He-Ne-Lasers ( $\lambda_L = 632.8\text{nm}$ ) betrieben, die Elektronen haben eine kinetische Energie von  $100\text{keV}$ .

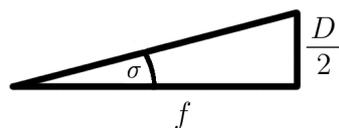
#### Lösung:

Beim Lichtmikroskop kennt man die Formel für das Auflösungsvermögen  $y_{min}$ , das den kleinsten Abstand zweier Punkte bezeichnet, der noch auflösbar ist.

$$y_{min,L} = 1.22 \frac{\lambda f}{D n} \quad (26)$$

[1]

$d$  ist hierbei der Abstand zwischen Mikroskop und Gegenstand,  $D$  der Durchmesser des Objektivs und  $f$  die Brennweite. Das Öffnungsverhältnis ist  $k = f/D = \frac{1}{2 \tan \sigma}$ . Somit folgt:



$$y_{min,L} = 1.22 \frac{\lambda k}{n} = 1.22 \frac{\lambda}{2n \tan \sigma} \quad (27)$$

In unserem Fall ist die Brechzahl  $n = 1$  da keine Immersionsflüssigkeit vorliegt. Das Auflösungsvermögen ist im Wesentlichen durch die Wellenlänge gegeben.

[1]

- a) Wie groß ist das Auflösungsvermögen  $y_{min}$  des Lichtmikroskops, wenn keine Immersionsflüssigkeit verwendet wird?

### Lösung:

Für Licht der Wellenlänge  $\lambda_L = 632.8\text{nm}$  und einem Öffnungswinkel von  $2\sigma = 120^\circ$  erhält man  $y_{min,L} = 222.9\text{nm}$ .

[1]

- b) Wie groß sind Impuls  $p$  und Materiewellenlänge  $\lambda_E$  der Elektronen? Um wieviel mal besser löst ds Elektronenmikroskop auf, wenn die Öffnungswinkel dieselben sind?

### Lösung:

Die relativistische Gesamtenergie setzt sich aus der Ruheenergie des Elektrons  $W_0$  und seiner kinetischen Energie  $W_{kin}$  zusammen:

$$W = \sqrt{p^2c^2 + (m_0c^2)^2} = W_0 + W_{kin} = 511\text{keV} + 100\text{keV} = 611\text{keV} \quad (28)$$

[1]

Daraus erhalten wir den Impuls  $p$ :

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W^2 - (m_0c^2)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{611^2 - 511^2}\text{keV} = 334.96 \frac{\text{keV}}{c} \quad (29)$$

$$= 0.179 \cdot 10^{-21}\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (30)$$

Daraus wiederum die Materiewellenlänge:

$$\lambda_E = \frac{h}{p} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\text{Ws}^2}{0.179 \cdot 10^{-21}\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3.70 \cdot 10^{-12}\text{m} \quad (31)$$

[1]

Damit ergibt sich für das Auflösungsvermögen  $y_{min,E}$  des Elektronenmikroskops:

$$y_{min,E} = 1.30\text{pm} \quad (32)$$

[1]

Im Vergleich zum Lichtmikroskop ist also das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops um einen Faktor 171500 besser. Dies ist aber aufgrund der wesentlich schlechteren Linsen in Elektronenmikroskopen nicht realistisch.

[1]

- c) Wegen der Abbildungsfehler der Elektronenoptik lassen sich jedoch nur wesentlich kleinere Öffnungswinkel realisieren. Wie groß ist das Auflösungsvermögen  $y_{min,E}$ , wenn  $2\sigma = 1^\circ$  beträgt.

## Lösung:

Wir rechnen nun mit einem viel kleineren Öffnungswinkel:

$$y_{min,E} = \frac{1.22 \cdot 3.70 \cdot 10^{-12} \text{m}}{2 \cdot \tan 0.5^\circ} = 0.259 \text{nm} \quad (33)$$

[1]

Damit ist das Elektronenmikroskop nur noch um einen Faktor 860 besser, also immer noch ca. 3 Größenordnungen.

[1]