Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

11. Übungsblatt - 24. Januar 2011

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

Aufgabe 1 (★) (2 Punkte)

Traubenzucker ist optisch aktiv und zeigt ein spezifisches Drehvermögen $\beta_0 = 91.9°/100\text{mm}$ in wässriger Lösung bei einer Konzentration von 1g/cm^3 und einer Lichtwellenlänge von $\lambda = 589.3\text{nm}$. Welchen Drehwinkel messen Sie bei gleicher Lichtwellenlänge, einer Konzentration von 0.7g/cm^3 und einer Schichtdicke von 70mm?

Lösung:

Die Drehung der Polarisationsebene ist gegeben durch

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}(n_L - n_R) \tag{1}$$

Wir sehen also, dass der Drehwinkel β linear von der Schichtdicke abhängt. Außerdem ist der Brechungsindexunterschied $n_L - n_R$ direkt proportional zur Konzentration. Somit ist diese Aufgabe sehr einfach zu lösen:

$$\beta = \beta_0 \cdot d \cdot [c] = 45° \tag{2}$$

[**2**]

Aufgabe 2 (★) (4 Punkte)

Linear polarisiertes Licht einer Na-Lampe ($\lambda = 589\text{nm}$) wird durch eine 20cm dicke Proble Monobromnapthalin (Verdet-Konstante $V = 0.1029'/\text{Ampère}$ bei dieser Wellenlänge) gestrahlt, welches sich in einem longitudinalen Magnetfeld mit $B = 1\text{T}$ befindet, d.h. die Feldlinien sind parallel zur Ausbreitungsrichtung des Lichts.

a) Um welchen Winkel verschiebt sich die Polarisationsrichtung des Lichts?

Lösung:

$$B = V \cdot d \cdot H \tag{3}$$

mit $H = \frac{\beta}{\mu_0}$:

$$\beta = 273° \tag{4}$$

[**2**]

b) Was passiert, wenn das Licht nach dem Durchlaufen der Probe gespiegelt wird und die Probe ein zweites Mal durchläuft? Was würde bei einem vergleichbaren Experiment ohne Magnetfeld aber mit einer optisch aktiven Substanz passieren?

Lösung:

Auf dem Rückweg verdoppelt sich die Rotation, da sich Drehrichtung des Faraday-Effekts und die Helizität des Lichts umkehren. Im Algemeinen vergrößert eine mehrfache Spiegelung die beobachtbare Drehung.

[**1**]

Da der Faraday-Effekt jedoch vom Magnetfeld abhängt und diese im zweiten Experiment ausbleibt, dreht sich die Rotation auf dem Rückweg zur Ausgangsrichtung zurück.

[**1**]

Aufgabe 3 (★★) (7 Punkte)

In einem MnO-Kristall sind die Mn-Atome so angeordnet, dass sie die Eckpunkte und die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfelgitters mit der Kantenlänge $a_c = 0.442$nm bilden (fcc: kubisch flächenzentriertes Gitter). In einem geeignet gewählten Koordinatensystem sind also die Koordinaten x, y, z der an den Eckpunkten sitzenden Mn-Atome durch $x = n_x \cdot a_c$, $y = n_y \cdot a_c$, $z = n_z \cdot a_c$, und die Koordinaten x', y', z', der auf den Seitenflächen sitzenden Mn-Atome durch $x' = (n_x + 1/2) \cdot a_c$, $y' = (n_y + 1/2) \cdot a_c$, $z' = n_z \cdot a_c$ oder $x' = (n_x + 1/2) \cdot a_c$, $y' = n_y \cdot a_c$, $z' = (n_z + 1/2) \cdot a_c$ oder $x' = n_x \cdot a_c$, $y' = (n_y + 1/2) \cdot a_c$, $z' = (n_z + 1/2) \cdot a_c$ gegeben, wobei n_x, n_y und n_z ganze Zahlen sind.

a) Berechnen Sie die möglichen Winkel, unter denen monochromatische Röntgenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 0.154$nm (so genannte Cu-K_α-Strahlung) auf die zu den Würfelseiten parallelen Netzebenen auftreffen muß, damit an diesen Bragg-Reflexion auftritt.

Lösung:

Um Bragg-Reflexion an den einzelnen Netzebenen beobachten zu können, muss die Bragg-Bedingung erfüllt sein:

$$2d \sin\theta = m\lambda \tag{5}$$

[**1**]

Durch die fcc-Struktur des Kristalls liegt zwischen den Atomebenen, die durch die Eckatome der Einheitszelle gebildet werden, zusätzlich jeweils eine Atomebene, welche durch die Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfelgitters entsteht.

[**1**]

Dadurch gilt:

$$\begin{aligned} d &= 0.5a_c = 0.221nm && (6)\\ \theta &= \arcsin\frac{m\lambda}{a_c} && (7)\\ \theta_1 &= 20.4° && (8)\\ \theta_2 &= 44.2° && (9) \end{aligned}$$

[**1**]

b) Kühlt man den MnO-Kristall auf eine Temperatur unterhalb von 120K ab, so wird er magnetisch. Die magnetische Einheitszelle ist ebenfalls kubisch. Zur Untersuchung der magnetischen Struktur werden Neutronen der Energie $E = 2.227$ meV mit gleicher Einfallsrichtung wie die Röntgenstrahlung am MnO-Kristall gebeugt. (Warum verwendet man Neutronen?) Dabei beobachtet man Bragg-Reflexion bei den Einfallswinkeln $\alpha_1 = 20.0°$ und $\alpha_2 = 43.2°$. Wieviele "chemische" Einheitszellen umfaßt eine "magnetische Einheitszelle"?

Lösung:

Um magnetische Strukturen in Festkörpern zu untersuchen, sind Neutronen besonders geeignet. Aufgrund ihrer Ladungsneutralität werden sie nicht durch Coloumbwechselwirkung beeinflußt, dringen so in den Festkörper ein und wechselwirken dort aufgrund ihres magnetischen Moments mit magnetischen Feldern.

[**1**]

Die Wellenlänge der Neutronen beträgt:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m} && (10)\\ \rightarrow \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} = 0.606\text{nm} && (11) \end{aligned}$$

[**1**]

Mit der Bedingung für Bragg-Reflexion ergibt sich:

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta_1} = \frac{2\lambda}{2\sin\theta_2} = 0.885\text{nm} \qquad (12)$$

[1]

Der Gitterabstand der magnetischen Einheitszelle ist genau doppelt so groß wie der der chemischen Einheitszelle. Eine magnetische Einheitszelle umfaßt somit 8 chemische Einheitszellen.

$$\frac{V_{mag}}{V_{chem}} = \left(\frac{a_{mag}}{a_{chem}}\right)^3 = 8 \tag{13}$$

[1]

Aufgabe 4 (★★) (11 Punkte)

Ein Photon, das von einem Atom ausgesandt wird, überträgt auf dieses einen Rückstoßimpuls.

a) Wie groß ist die kinetische Energie, die dabei auf das Atom abgegeben wird, wenn ν die Frequenz des Photons und M die Masse des Atoms ist?

Lösung:

Die Energie eines Photons, welches bei einem Übergang in der Atomhülle emittiert wird, liegt in der Größenordnung (eV). Die Photonenergie bei einem Kernübergang liegt in der Größenordnung (MeV). Ein Nukleon hingegen hat eine Ruhemasse von $\sim 1\,GeV/c^2$, und somit hat auch der Kern eine Ruhemasse in der Größenordnung (GeV). Die maximale Rückstoßenergie des Kerns liegt somit weit unter der Ruhemasse des Kerns; somit kann klassisch gerechnet werden.

[1]

Mit Hilfe der Impulserhaltung folgt:

$$p_{Atom} = p_\gamma \tag{14}$$

$$\sqrt{2M_{Atom} \cdot E_{kin;Atom}} = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{15}$$

$$\rightarrow E_{kin;Atom} = \frac{h^2}{2M\lambda^2} \tag{16}$$

[1]

b) Wie groß ist die Rückstoßenergie, die bei der Aussendung der Quecksilberspektrallinie $\lambda = 2537\mathring{A}$ auf das Hg-Atom übertragen wird ($M_{Hg} = 200.6$u)?

Lösung:

Quecksilber: $E_{kin;Atom} = 1.02 \cdot 10^{-29}J= 6.4 \cdot 10^{-11}$eV.

[1]

Die Photonenenergie ist hierbei $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = 4.89\text{eV}$.

$c)$ Wie groß ist die entsprechende Rückstoßenergie bei der Aussendung eines γ-Quanten der Energie 1.33 MeV durch ^{60}Ni ($M_{Ni} = 58.7\text{u}$)?

Lösung:

Nickel: $E_{kin;Atom} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} = 2.59 \cdot 10^{-18}\,J = 16.2\text{eV}$

[1]

$d)$ Vergleichen Sie diese Werte mit der Energieunschärfe aufgrund der Lebensdauer ($\tau_{Hg} \approx 10^{-8}s$, $\tau_{Ni} \approx 10^{-14}s$).

Lösung:

Die Energie des Übergangs in der Atomhülle verteilt sich auf den Rückstoß des Atoms sowie auf das Photon. Damit das Photon wieder denselben Übergang in einem zweiten Atom anregen kann, muss dessen Energie für einen Rückstoß des zweiten Atoms sowie einer Anregung dessen Atomhülle ausreichen. Klassisch ist das natürlich nicht möglich, da bei der Absorption für den Atomübergang lediglich folgende Energie zur Verfügung steht:

$$E_{verfuegbar} = E_{Atomuebergang;1} - E_{Rueckstoss;1} - E_{Rueckstoss;2} < E_{Atomuebergang;2} \tag{17}$$

[1]

Hierbei ist $E_{Atomuebergang;1} = E_{Atomuebergang;2}$. Quantenmechanisch ist jedoch jeder Übergang mit einer gewissen natürlichen Linienbreite versehen:

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar \tag{18}$$

[1]

Das bedeutet, dass innerhalb der natürlichen Linienbreite das emittierte Photon eine Energie von $E_\gamma \pm \Delta E/2$ mitbringt, und somit auch die zur Verfügung stehende Energie eigentlich wie folgt ist:

$$E_{verfuegbar} = E_{Atomuebergang;1} - E_{Rueckstoss;1} - E_{Rueckstoss;2} \pm \frac{\Delta E}{2} \tag{19}$$

[1]

Die Reabsorption am zweiten Atom ist möglich, wenn diese zur Verfügung stehende Energie wiederum innerhalb der Energieunschärfe mit der Übergangsenergie übereinstimmt. Wenn also gilt:

$$
\begin{aligned}
E_{Atomuebergang;2} - E_{verfuegbar} &\lessapprox \frac{\Delta E}{2} \\
\rightarrow E_{Rueckstoss;1} + E_{Rueckstoss;2} \pm \frac{\Delta E}{2} &\lessapprox \frac{\Delta E}{2} \\
\rightarrow E_{Rueckstoss;1} + E_{Rueckstoss;2} &\lessapprox \Delta E
\end{aligned}
$$

[1]

Wir schätzen nun die Rückstoßenergie bei der Reabsorption am zweiten Atom über den Rückstoß des ersten Atoms ab: $E_{Rueckstoss;1} \approx E_{Rueckstoss;2}$ und erhalten somit als Bedingung für eine mögliche Reabsorption:

$$E_{Rueckstoss;1} \lessapprox \frac{\Delta E}{2} \tag{20}$$

[1]

Für Quecksilber gilt:

$$\tau = \Delta t = 10^{-8}\, s \tag{21}$$

Und somit:

$$\rightarrow \Delta E_{Hg} \approx 6.58 \cdot 10^{-8}\, eV \gg E_{Atom;Hg} = 6.4 \cdot 10^{-11}\, eV \tag{22}$$

Der Rückstoß der Atome hat somit nur einen kleinen Effekt, der verglichen mit der Linienbreite des Atomübergangs vernachlässigt werden kann. Somit ist beim Quecksilber eine Reabsorption des Photons möglich.

[1]

Für Nickel gilt:

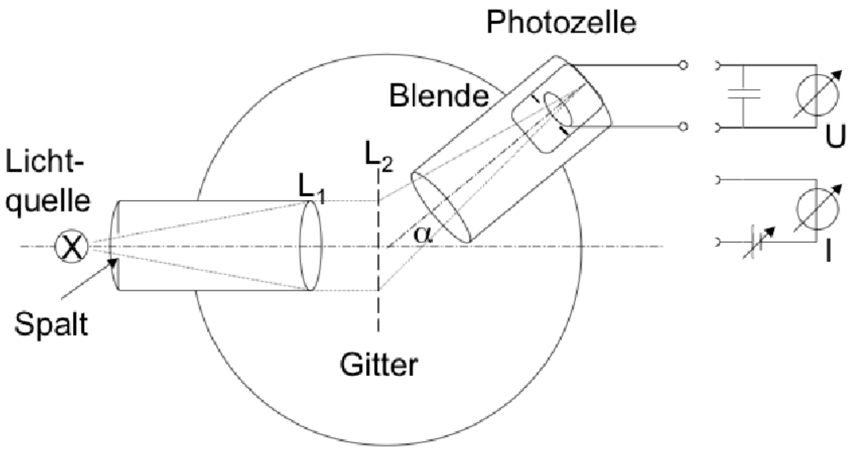
$$\rightarrow \Delta E_{Ni} \approx 6.58 \cdot 10^{-2}\, eVs \ll E_{Atom;Hg} = 16.2\, eV \tag{23}$$

Die Photonenergie reicht aufgrund der Rückstöße an den Atomen nicht aus, um innerhalb der Energieunschärfe ein weiteres Nickel-Atom anzuregen.

[1]

Aufgabe 5 (★★) (18 Punkte)

In dem unten skizzierten Gitterspektrometer fällt das Licht einer Quecksilberdampflampe auf ein Gitter mit 570 Strichen pro mm. In der Brennebene der Sammellinse L_2 befindet sich



die Kaliumkathode einer Vakuumphotozelle. L_2, Blende und Photozelle sind in einen Tubus eingebaut, der sich um den Mittelpunkt des Gitters drehen lässt. Der Drehwinkel α kann auf $0.01°$ genau abgelesen werden.

Quecksilber-Linien: $\lambda_{min} = 404.7$ nm, $\lambda_{max} = 579.1$ nm
Kalium-Grenzwellenlänge: $\lambda_K = 551$nm

a) In welchem Winkelbereich (α_{min}; α_{max}) werden alle sichtbaren Linien des Quecksilberspektrums 1.Ordnung erfasst?

Lösung:

Die Bedingung für ein Maximum erster Ordnung am Gitter ist:

$$\begin{aligned} sin\alpha &= \frac{\lambda}{b} \\ \text{mit} \quad b &= \frac{10^{-3}}{570}m = 1.754 \cdot 10^{-6}m \end{aligned}$$

[**1**]

Die Quecksilberlinien liegen zwischen $\lambda_{min} = 404.7\,$nm und $\lambda_{max} = 579.1$ nm, womit wir für den Winkelbereich erhalten:

$$
\begin{aligned}
sin\alpha_{min} &= \frac{404.7 \cdot 10^{-9}}{1.754 \cdot 10^{-6}} = 0.2307 \\
\rightarrow \alpha_{min} &= 13.34^\circ \\
sin\alpha_{max} &= \frac{579.1 \cdot 10^{-9}}{1.754 \cdot 10^{-6}} = 0.3302 \\
\rightarrow \alpha_{max} &= 19.28^\circ
\end{aligned}
$$

[**2**]

b) Bei welchen Spektrallinien tritt der Photoeffekt auf?

Lösung:

Da die Grenzwellenlänge für die verwendete Kalium-Kathode 551 nm beträgt (die Austrittsarbeit ist $2.25\,eV$), tritt der Photoeffekt nur für die Linien auf, deren Wellenlänge unter 551 nm liegt (Die Energie der Strahlung ist dann größer als die Austrittsarbeit). Dies sind die Linien (in nm): 546.1, 491.6, 435.8, 407.8, 404.7.

[**2**]

Parallel zur Photozelle der gegebenen Anordnung ist nun ein Kondensator geschaltet. Die anliegende Spannung wird mit einem statischen Voltmeter gemessen. Nach jeder neuen Winkeleinstellung des Tubus wird der Kondensator entladen.

c) Erklären Sie ausführlich, wie sich durch Photoeffekt mit dem monochromatischen Licht eine charakteristische Spannung am Kondensator aufbaut. Wie groß ist diese Spannung, wenn an der Apparatur der Winkel $\alpha = 13.44^\circ$ eingestellt ist?

Lösung:

Die entstehende Spannung ist die zum eingestellten Winkel - und somit zur Wellenlänge - passende Gegenspannung. Die freigewordenen Elektronen bewegen sich zu der, der Photoschicht gegenüber liegenden, Ringelektrode und laden diese negativ auf, was ein Gegenfeld aufbaut.

[**1**]

Die ausgeschlagenen Photoelektronen haben maximal eine kinetische Energie, die der Photonenergie minus der Austrittsarbeit der Kathode entspricht. Das Gegenfeld wird solange aufgebaut, bis keine Elektronen mehr zur Ringanode gelangen können, da auch die schnellsten Elektronen abgebremst werden. Für die maximale kinetische Energie der Elektronen gilt also:

$$\begin{aligned} W_{kin} &= W_{Photon} - W_{Austritt} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{Grenz}} \\ \text{mit} \quad \lambda &= b\, sin\alpha = 407.8\, nm \\ \rightarrow W_{kin} &= 3.05\, eV - 2.25\, eV = 0.8\, eV \end{aligned}$$

[**2**]

Die Gegenspannung ist also 0.8 V.

d) Der Drehwinkel wird nun schrittweise vergrößert. Bei welchem Winkel α_2 stellt sich zum ersten Mal wieder die Spannung von Teilaufgabe c) ein?

Lösung:

Wir suchen also den Winkel α_2 für das Maximum zweiter Ordnung am Gitter für die Wellenlänge 407.8 nm:

$$b\, sin\alpha_2 = 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 27.70^\circ$$

[**1**]

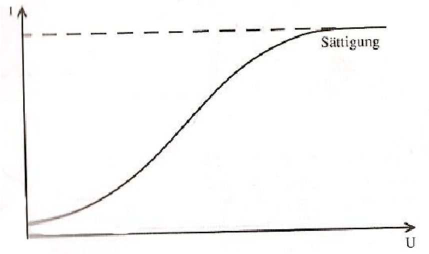
Nun wird eine regelbare Gleichspannungsquelle in Reihe mit einem empfindlichen Strommesser an die Photozelle geschaltet.

e) Die Photozelle wird so beleuchtet, dass Photoeffekt stattfindet. Die Gleichspannung wird von $U = 0$ an schrittweise erhöht. Zeichnen Sie ein qualitatives $U - I$-Diagramm, und erläutern Sie dessen Verlauf.

Lösung:

Das UI-Diagramm zeigt die typische Sättigungseigenschaft: Zwar steigt anfangs der Strom bei steigender Spannung, da mehr Elektronen zur Anode gelangen können, jedoch nähert er sich dann der Sättigungsgrenze, da nicht mehr als die durch den Photoeffekt freigewordenen Elektronen abgesaugt werden können.

[**1**]



[**1**]

Bei der Bestrahlung mit Licht treffen auf die Kathode $20 \mathrm{W/m^2}$. Dabei werden 10% der Lichtenergie absorbiert, der Rest wird reflektiert. Die bestrahlte Fläche ist $0.50 \mathrm{cm^2}$ groß.

f) Würde man den Photoeffekt durch das Wellenmodel des Lichtes deuten, so müsste sich die Energie der Lichtwelle gleichmäßig auf die Kaliumatome im beleuchteten Teil der Kathode verteilen. Der Photoeffekt würde auftreten, sobald die pro Atom absorbierte Energie die Austrittsarbeit für Elektronen erreicht. Schätzen Sie unter Zugrundlegung dieses Modells die Zeitdauer vom Beginn der Bestrahlung bis zum Eintreten des Photoeffekts ab. Eindringtiefe des Lichts in die Kathode ist 10nm, Dichte von Kalium beträgt $\rho_K = 0.86 \mathrm{g/cm^3}$.

Lösung:

Die absorbierte Leistung ist:

$$P \quad = \quad 20\frac{W}{m^2} \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 10\% = 10^{-4}\, W$$

[**1**]

Diese Leistung verteilt sich auf die Anzahl N aller Atome in dem bestrahlten Volumen V $= 0.5\,\mathrm{cm}^2 \cdot\ 10\,\mathrm{nm}$:

$$N = \frac{\rho V}{m_{Kalium}} = 6.6 \cdot 10^{15}$$

[**1**]

Die gesamte in der Zeit t eingestrahlte Energie $\mathrm{P} \cdot \mathrm{t}$ muss ausreichen, um pro Atom die Austrittsarbeit überwinden zu können:

$$\frac{Pt}{N} \quad = \quad W_a$$

$$\rightarrow t = \quad = \quad \frac{NW_a}{P} = 24\, s$$

[**1**]

g) Welcher Befund beim Photoeffekt steht dem Ergebnis von Teilaufgabe f) entgegen?

Lösung:

Der Photoeffekt tritt eben nicht erst nach einer halben Minute sondern sofort ein. Man wendet sich beim Photoeffekt vom Wellenbild des Lichts ab und interpretiert Licht als Strom von Photonen, also Teilchen. Diese Teilchen werden beim Photoeffekt von einzelnen Atomen absorbiert, was zur Emission der Elektronen führt.

[**1**]

h) Welcher Photostrom ergibt sich bei einer Lichtwellenlänge von 407.8nm für eine Quantenausbeute von einem Elektron pro 10^4 absorbierte Photonen?

Lösung:

Die Rate n der pro Sekunde absorbierten Photonen beträgt:

$$n = \frac{P}{E_{Ph}} = \frac{P}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{P\lambda}{hc}$$

[**1**]

wobei P = 10^{-4} W die absorbierte Leistung ist. Die Anzahl der pro Sekunde freigesetzten Elektronen n_{frei} ist:

$$n_{frei} = \frac{n}{10^4}$$

Für den Strom gilt dann:

$$J = n_{frei} \cdot e = 3.3\, nA$$

wobei e die Elementarladung ist.

[**1**]