

Kern- und Teilchenphysik

Prof. Dr. Stefan Schönert

gemeinsam mit

Prof. Dr. Wolfgang Hollik

Dies ist eine unkorrigierte Vorschau-Version

19. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	4
1	Relativistische QM und Quantenfeldtheorie	9
1.1	Notationen, Konventionen	9
1.2	Klein-Gordon-Gleichung für Spin-0-Teilchen	11
1.3	Dirac-Gleichung für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen	13
2	Bausteine des Atoms und des Kerns	22
2.1	Elektron, Proton und Neutron	23
2.2	Masse und Bindungsenergie	24
2.3	Weizsäcker-Massenformel	27
2.4	Stabilität der Kerne	29
3	Kernmodelle	36
3.1	Fermigas-Modell	36
3.2	Schalenmodell	39
4	Elektromagnetische Wechselwirkung	44
4.1	Elektromagnetische Wechselwirkung von Dirac-Teilchen (e, μ , τ , ...)	44
4.2	Quantisiertes em Feld (Photonfeld)	45
4.3	Übergangsmatrixelemente, Feynman-Regeln	47
5	Wechselwirkung von Teilchen und EM-Strahlung mit Materie	54
5.1	Wirkungsquerschnitt	54
5.2	Grundlegende Prozesse	55
5.3	Wechselwirkung von Photonen mit Materie	55
5.3.1	Photoeffekt	56
5.3.2	Streuung	56
5.3.3	Paarerzeugung	57
5.3.4	Kernphotoeffekt	57
5.3.5	Abschwächlänge bzw. Abschwächungskoeffizient	58
5.4	Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie	59
5.5	Energieverlust schwerer geladener Teilchen	60
5.5.1	Bohr's klassische Beschreibung des Energieverlusts schwerer Teilchen ($m \gg m_e$)	60
5.5.2	Bethe-Bloch-Gleichung	62
5.6	Wechselwirkung von Elektronen mit Materie	65
5.7	Cherenkov Strahlung	65

5.8	Nachweis von Neutronen	66
6	Teilchenbeschleuniger	67
6.1	Schwerpunktsenergie \sqrt{s}	68
6.2	Energieverlust durch Synchrotronstrahlung	69
6.3	Luminosität und Reaktionsrate	69
6.4	Teilchenbeschleuniger und Teilchendetektoren	70
7	Elektromagnetische Streuprozesse	91
7.1	Wirkungsquerschnitt	91
7.2	Elastische Elektron-Proton-Streuung	94
7.2.1	Statisches Proton (Coulomb-Feld)	95
7.2.2	Proton mit Rückstoß	98
7.2.3	Realistisches Proton	100
7.3	Fermi's goldene Regel	103
7.4	Berechnung des Streuquerschnitts	103
7.5	Berechnung des Matrixelements \mathcal{M}_{fi}	104
8	Elektromagnetische Strahlungsübergänge	109
8.1	Allgemeine Vorbetrachtung	109
8.1.1	Zeitabhängige Störungstheorie für Übergänge	109
8.1.2	Übergänge im Atomkern	111
8.2	Elektromagnetisches Strahlungsfeld	112
8.3	Multipol - Strahlung	115
8.4	Resonanzabsorbtion von γ -Strahlung	118
8.5	Einschub: Natürliche Linienbreite/Breit-Wigner Resonanz	123
8.6	Innere Konversion	124
8.7	Kollektive Kernanregungen	125
8.8	Rotationszustände	126
9	Nukleosynthese	127
9.1	Primordiale Nukleosynthese (=NS im „Big Bang“)	127
9.2	Elementsynthese in Sternen	130
9.2.1	Wasserstoffbrennen	131
9.2.2	Heliumbrennen und mittelschwere Kerne	132
9.2.3	Brennen schwerer Elemente ($A > 60$)	133
10	Quantenelektrodynamik (QED)	135
10.1	Grundgleichungen, Feynman-Regeln	135
10.2	Beispiele für QED-Prozesse	140
10.3	Präzisionstests der QED	144
11	Kernkraft, Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung	149
11.1	Nukleon-Nukleon-Streuung	149
11.2	Experimentelle Resultate	150

12 Quantenchromodynamik	154
12.1 Lagrange-Formalismus für Felder	154
12.2 QED als Eichtheorie	156
12.3 Nicht-Abelsche Eichtheorien	158
12.4 Formulierung der QCD	163
12.5 Starke Kopplungskonstante	167
12.5.1 α in der QED	167
12.5.2 α_s in der QCD	169
A Grundlagen	172
B Formelsammlung	175
C Literaturverzeichnis & Index	176

Kapitel 0

Einführung

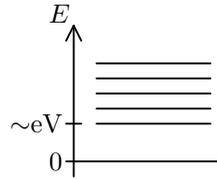
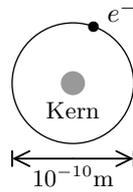
Historischer Überblick

- Ende 19. Jhd.: Es waren ca. 100 verschiedene Elemente, die sich periodisch wiederholende Eigenschaften besitzen, entdeckt. Daraus folgerte man, dass Atome eine innere Struktur besitzen müssen und somit unteilbar sind.
- Beginn 20. Jhd.: Rutherford entwickelt ein modernes Bild des Atoms: Das Atom besteht aus einem dichten Kern, welcher von Elektronenwolken umgeben ist.
- 1932: Chadwick entdeckt das Neutron. Kerne bestehen also aus Protonen und Neutronen, welche man zusammengefasst als Nukleonen bezeichnet.
- 1930: Neben Elektron, Proton und Neutron postuliert Pauli das Neutrino, um die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls zu retten.
- 1956: Reines und Cowon weisen experimentell an einem Kernreaktor das Neutrino nach.
- 1936: Anderson und Neddermeyer entdecken die kosmische Strahlung. Sie stoßen auf ein "schweres Elektron" (negative Ladung, Krümmung im Magnetfeld stärker als beim Proton, schwächer als beim Elektron), welches heute als Myon μ bekannt ist.
- 1935: Hideki Yukawa schlägt die Existenz eines Mesons ($\sim 100\text{MeV}$) als Träger der Kernkraft vor.
- 1947: Powell, Lattes und Occialini weisen auf dem Pic du Midi (Pyrenäen) Pionen (π) in der kosmischen Strahlung nach.
- 1948: Nachweis des Pions auch im Berkeley Zyklotron
- 50/60er: Erkenntnis, dass Neutronen und Protonen nur Vertreter einer großen Teilchenfamilie, den Hadronen sind. Da Hadronen ähnlich wie Atome in Gruppen mit ähnlichen Eigenschaften auftreten, sind sie keine fundamentalen Bausteine der Materie.
- 60er: M. Gell-Mann entwickelt das Quark-Modell und ordnet somit den "Hadronen-Zoo". Alle Hadronen können als Kombination von zwei Quarks (Mesonen) oder drei Quarks (Baryonen) beschrieben werden.

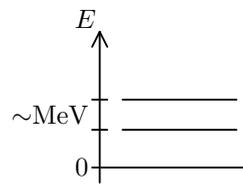
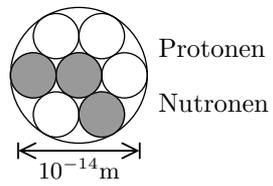
Bausteine der Materie

Hierarchie der Struktur der Materie

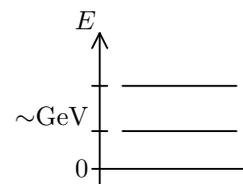
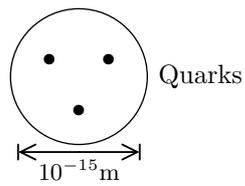
- Atom:



- Kern:



- Nukleon:



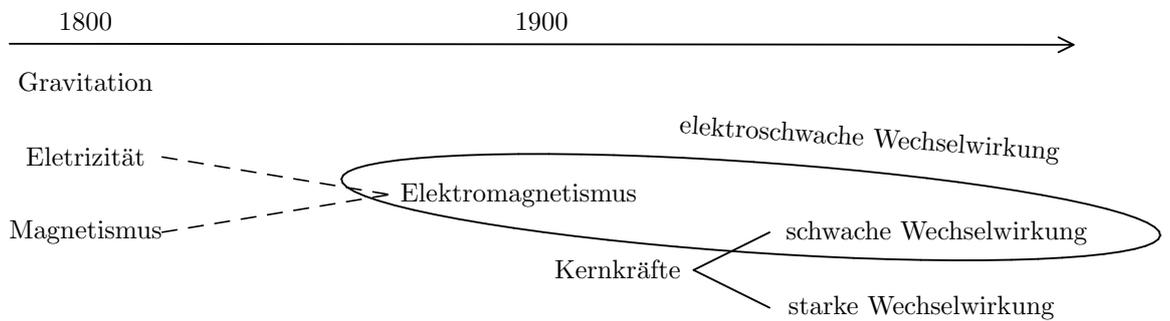
Leptonen und Quarks

Es gibt zwei Arten von fundamentalen Bausteinen: die Leptonen und die Quarks. Sie sind beide Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen und somit Fermionen. Streuexperimente haben ergeben, dass sie kleiner als $10^{-18}m$ sind. Da bis jetzt noch keine angeregten Zustände von Leptonen und Quarks entdeckt wurden, scheinen sie also elementare Bausteine der Materie zu sein.

			Q/e	Spin/ \hbar
$\begin{pmatrix} u(\text{p}) \\ d(\text{own}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c(\text{harm}) \\ s(\text{trange}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t(\text{op}) \\ b(\text{ottom}) \end{pmatrix}$	+2/3 -1/3	1/2 1/2
$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$	-1 0	1/2 1/2
1.	2.	3.	Generation	

Hinzu kommen jeweils noch die Antiteilchen. **Hadronen** sind **Barionen** (3 Quarks) und **Leptonen** (Quark-Antiquark-Paar).

Kräfte der Natur: Wechselwirkungen



“Träger der Wechselwirkung”

Die Wechselwirkung stellt man sich als Austausch von Bosonen (Spin = $1\hbar$) (sog. **Austauschbosonen**) vor.

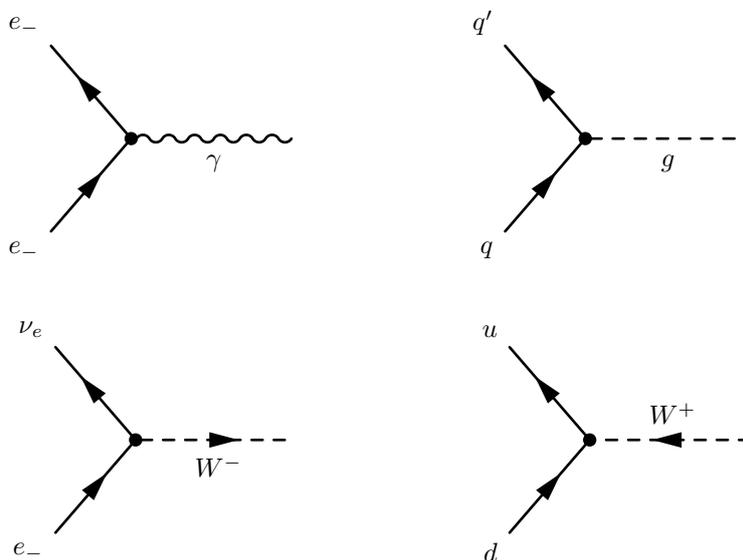
- (Graviton)
- EM-Wechselwirkung: **Photonen** ($m_\gamma = 0$)
- schwache WW: **Vektorbosonen** W^+, W^-, Z^0 ($m \simeq 90 \text{ GeV}$)
- starke WW: **Gluonen** ($m = 0$)

Zu jeder Wechselwirkung gehört eine Ladung:

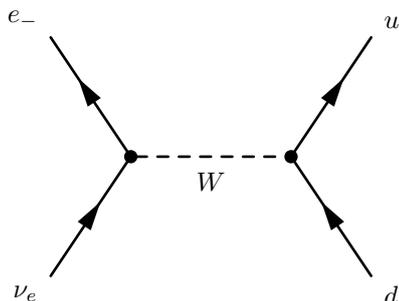
- Gravitation - (Graviton)
- Elektromagnetismus: alle geladenen Teilchen - elektrische Ladung
- schwache Wechselwirkung: Leptonen und Quarks - schwache Ladung
- starke Wechselwirkung: Hadronen - starke oder Farbladung (nicht an Leptonen)

In der sog. Quantenelektrodynamik (QED) wird der Elektromagnetismus quantenfeldtheoretisch beschrieben. Äquivalent dazu gibt es die Quantenchromodynamik (QCD), welche die Theorie der starken Wechselwirkung beschreibt.

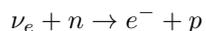
Der Zusammenhang zwischen Reichweite und Masse der Austauschbosonen wird beschrieben über **Feynman-Diagramme**:



Beispiel für Wechselwirkung (Übergangsamplitude):



Quarks kommen nur in Hadronen vor. Weiteres Beispiel:



Reichweite r mit der Ruhemasse M des Austauschbosons:

$$r \lesssim c \cdot \Delta t \lesssim c \cdot \frac{\hbar}{Mc^2}$$

mit $\hbar c \simeq 200 \text{ MeV fm}$

$$\Rightarrow r \lesssim 200 \text{ MeV fm} / M c^2$$

für Photonen mit Ruhemasse $M = 0$ ist also die Reichweite $r \rightarrow \infty$.

für W^\pm, Z (schwache Wechselwirkung) $r \rightarrow 10^{-15} \text{ m} \sim 10^{-18} \text{ m}$

	WW	QED	schw. WW	QCD	Gravit.
Boson		γ	W^\pm, Z^0	g	Graviton ?
Masse		0	80-90 GeV	0	0 ?
Reichweite		∞	10^{-18} m	$\leq 10^{-15} \text{ m}$	∞
rel. Stärke (zur starken WW)		1/137	$\simeq 10^{-5}$	1	$5 \cdot 10^{-39}$

Bildung der Nukleonen und Kerne

Urknalltheorie der Entstehung des Universums.

Stützen: kosmische Hintergrundstrahlung, primordiale Nukleosynthese (Bildung der leichten Kerne ($A \leq 7$)).

Zeitskalen:

$$t \simeq 10^{-44} \text{ s: Planck-Ära, } 10^{19} \text{ GeV; } U_{pot} \approx -mc^2$$

$$t \simeq 10^{-36} \text{ s: GUT-Brechung, } 10^{15} \text{ GeV}$$

$$t \simeq 10^{-10} \text{ s: Brechung elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung; } 10^2 \text{ GeV } (\sim M_{W,Z_0} c^2)$$

$$t \simeq 10^{-6} \text{ s: Quark-Confinement; } 1 \text{ GeV} \rightarrow \text{Bildung der Nukleonen}$$

$$p + \bar{p} \rightarrow 2\gamma$$

$$n + \bar{n} \rightarrow 2\gamma$$

$$t \simeq 1 \text{ s: } \nu\text{-Entkopplung; } 1 \text{ MeV}$$

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$$

$$t \simeq 5 \text{ min: Bildung leichter } (A \leq 7) \text{ Kerne; } 10^2 \text{ keV}$$

$$\text{z.B. } p + n \rightarrow {}^2\text{H} + \gamma \text{ (} E_\gamma = 2,2 \text{ MeV)}$$

$$t \simeq 10^5 \text{ a: Photonen entkoppeln; } \simeq \text{eV}$$

$$p + e^- \rightarrow \text{H-Atom}$$

$$t \gtrsim 10^6 \text{ a: Strukturbildung}$$

Kapitel 1

Relativistische QM und Quantenfeldtheorie

1.1 Notationen, Konventionen

natürliches Einheitensystem:

$$\hbar = c = 1, \text{ Umrechnung: } \hbar c = 197,329 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

Koordinaten:

$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) = (t, \vec{x})$ bilden 4-Vektor

$\mu = 0, 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$ (räumliche Koordinaten)

(x^μ) : Komponenten bezüglich eines festen Inertialsystems IS, Bezeichnung: kontravariante Komponenten

Raum der x^μ : Minkovski-Raum

Metrik: $x^2 = (x^0)^2 - \vec{x}^2 = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$ (Summation über μ, ν)

$$g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{metrischer Tensor}$$

Skalarprodukt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$

kovariante Komponenten:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (x^0 = x_0, x^k = -x_k)$$

$$x^2 = x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

Lorentz-Transformationen:

$\Lambda: IS \rightarrow IS'$ lineare Transformation

$\Lambda: x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)$ (4×4 - Matrix)

Bedingung: Metrik ist invariant, d.h. $x^2 = x'^2$

$$\Leftrightarrow \Lambda g \Lambda^T = g \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \Rightarrow d^4x, d^4x' \text{ invariant}$$

Beispiele:

a) Drehungen: $(\Lambda_\nu^\mu) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array} \right)$ R: 3×3 Matrix
orthogonal, $\det(R) = 1$

b) Boost (in x^1 -Richtung) $(\Lambda_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$
und $\beta = v$. Auch: $\gamma = \cosh \phi$, $\gamma\beta = \sinh \phi$ mit $\tanh \phi = v$

allgemeiner 4-Vektor:

$(a^\mu) = (a^0, \vec{a}) \Leftrightarrow \Lambda : a^\mu \rightarrow a'^\mu = \Lambda_\nu^\mu a^\nu$

Bsp: $(p^\mu) = (p^0, \vec{p})$ 4-Impuls

Koordinaten:

$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$ ($IS \rightarrow IS'$)

Skalarfeld:

$\phi(x) \equiv \phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \phi(t, \vec{x})$

$\phi(x) \xrightarrow{\Lambda} \phi'(x') = \phi(x)$

$\phi(x(x')) = \phi'(x')$ invariant unter Lorentz-Transformationen

Vektorfeld:

$A^\mu(x) = A^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$

$\Lambda : A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda_\nu^\mu A^\nu(x)$ (Bsp.: 4-Potential aus Elektrodynamik)

Ableitungen:

$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$, (∂_μ) : 4-Vektor, ∂_μ kovariante Komponente

$(\partial_\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$

$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$, $(\partial^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$

invarianter Differentialoperator: $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \square \rightarrow$ d'Alembert-Operator

d.h. $\square' = \square$: $\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \dots = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \dots$

$\partial_\mu \phi$ Vektorfeld

$\partial_\mu A_\nu$ Tensorfeld

Relativistische Mechanik

Teilchen mit Masse m und 4-Impuls $(p^\mu) = (p^0, \vec{p}) = (E, \vec{p})$

$p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ für freies Teilchen

$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ $E \simeq m + \frac{\vec{p}^2}{2m}$ für $|\vec{p}| \ll m$

$p^\mu = m u^\mu$, $p^0 = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$, $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$

Hamilton-Funktion

Teilchen mit Ladung e im E-M-Feld: $(A^\mu) = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A})$ mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

und $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi$

Hamilton-Funktion für freies Teilchen: $H = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

E-M-Feld durch minimale Substitution: $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$ und $H \rightarrow H - e\phi = H - eA^0$

$$H = \sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2 + e\phi}$$

Übergang zur Quantenmechanik:

Impuls: $\vec{p} \rightarrow -i\nabla$, $p^k = -i\partial_k = i\partial^k$

Energie: $p^0 \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial t} = i\partial_0 = i\partial^0$

4-Impuls-Operator: $p^\mu = i\partial^\mu$ $p_\mu = i\partial_\mu$

Vertauschungsrelation: $[p^k, x^l] = i\delta^{kl}$

$p^2 = p_\mu p^\mu = \text{invariant} = -\partial_\mu \partial^\mu = -\square$

Damit wird der Hamilton-Operator quantenmechanisch zu: $H = \sqrt{-\Delta + m^2}$
Dieser Operator ist ungeeignet, um die Schrödingergleichung zu lösen.

→Es gibt 2 Wege, dieses Problem zu beseitigen:

1. intelligentes Radizieren (Dirac)
2. Quadrieren (Klein-Gordon)

1.2 Klein-Gordon-Gleichung für Spin-0-Teilchen

Bewegungsgleichung: $i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = H\psi(\vec{x}, t)$

Quadrieren: $i\frac{\partial}{\partial t}(i\frac{\partial}{\partial t})\psi = H^2\psi = (-\Delta + m^2)\psi$

ergibt DGL 2. Ordnung, die **Klein-Gordon-Gleichung**:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)\psi = 0$$

Mit $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$

$$(\square + m^2)\psi = 0$$

$\square = \partial_0\partial^0 + \partial_k\partial^k = \partial_\mu\partial^\mu$ invariant ($\square' = \square$). $\psi(\vec{x}, t) = \psi(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv \psi(x)$
in kompakter Schreibweise.

Für einen Skalar ψ , d.h.

$$\Lambda : \psi(x) \rightarrow \psi'(x') = \psi(x)$$

ist die KG-Gl. eine invariante DGL für ein Teilchen der Masse m:

$$\underbrace{(\square' + m^2)\psi'(x')}_{IS'} = \underbrace{(\square + m^2)\psi(x)}_{IS} = 0$$

Bedeutung von ψ

- Schrödinger: $|\psi|^2 = \rho$ Wahrscheinlichkeitsdichte.
 $\vec{j} = \frac{1}{2im} [\psi^*\nabla\psi - (\nabla\psi^*)\psi]$ Wahrscheinlichkeitsstrom, erfüllt die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int d^3x \rho = 0$$

Erhaltung der Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen im gesamten Raum anwesend ist.

- Klein Gordon: $|\psi|^2$ ist Lorentz-Skalar.
 $\Rightarrow \int d^3x |\psi|^2$ nicht Lorentz-invariant, da d^3x nicht invariant $\Rightarrow |\psi|^2$ nicht als Dichte geeignet.
 Was entspricht ϱ und \vec{j} ? Suche ϱ, \vec{j} mit $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned} \psi^*(\square + m^2)\psi &= 0 \\ \psi(\square + m^2)\psi^* &= 0 \\ \Rightarrow \psi^*(\square + m^2)\psi - \psi(\square + m^2)\psi^* &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*) &= 0 \quad | \cdot \frac{i}{2m} \\ \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[\frac{i}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right]}_{\varrho ?} + \underbrace{\left[\frac{1}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right]}_{\vec{j} ?} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \text{ erhaltener Strom}$$

ρ ist 0-te Komponente eines 4-Vektors $j_\mu = \frac{i}{2m}(\psi^*\partial_\mu\psi - \psi\partial_\mu\psi^*)$. $(\varrho, \vec{j}) = (j^\mu)$, $\varrho = j^0 = j_0$. $\Rightarrow \int d^3x \varrho$ ist Lorentz-invariant.

- Problem: ϱ ist nicht positiv definit.
 Betrachte dazu als Lösungen die gemeinsamen Eigenfunktionen von H und \vec{p} :

$$\begin{aligned} \psi_+ &= e^{-ipx} = e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} \\ \psi_- &= e^{ipx} = e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} \end{aligned}$$

mit $E = p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varrho_+ &= \frac{1}{m} E, & \vec{j}_+ &= \frac{\vec{p}}{m} (= \vec{v} \varrho_+) \\ \Rightarrow \varrho_- &= -\frac{1}{m} E, & \vec{j}_- &= -\frac{\vec{p}}{m} (= \vec{v} \varrho_-) \end{aligned}$$

allgemeine Lösung der KG-Gl. ist Superposition aus ψ_+ und ψ_- :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int d^3p [A_+(p)e^{-ipx} + A_-(p)e^{ipx}] \\ \Rightarrow \varrho &\sim \int d^3p (|A_+|^2 - |A_-|^2) \end{aligned}$$

kann Vorzeichen wechseln. \Rightarrow Einschränkung auf ψ_+ : willkürlich, nicht vollständig.

Korrekte Interpretation

- $(j^\mu) = (\varrho, \vec{j})$ ist der e.m. Strom, ϱ Ladungsdichte, $\int d^3x \varrho$ Gesamtladung.
- KG-Gl. beschreibt Teilchen mit 2 verschiedenen Ladungen ± 1 : ψ, ψ^* .
Teilchen: Ladung $+1$, Impuls $(p^\mu) = (E, \vec{p})$, $\psi_+ = e^{-ipx}$
Anti-Teilchen: -1 , Impuls $(p^\mu) = (E, \vec{p})$, $\psi_- = e^{+ipx} = (\psi_+)^*$
- $\partial_\mu j^\mu = 0$: Strom-Erhaltung (\rightarrow Ladungs-Erhaltung) jedoch keine Erhaltung der Teilchenzahl.
 \rightarrow notwendig: Vielteilchentheorie \rightarrow Neues Konzept: Quantenfeldtheorie (QFT)

Konsistente Formulierung als Quantenfeld:

- $\psi(x)$: Feld-Operator, wirkt auf den Hilbertraum der Teilchen-/Antiteilchen-Zustände
- Teilchen-/Antiteilchen-Zustände: $|\pm, \vec{p}\rangle$, Eigenzustände von \vec{p} und H , Ladung $Q = \pm 1$
- Vakuum: $|0\rangle$, Null-Teilchen-Zustand, $\langle 0, 0 | 0, 0 \rangle = 1$
- invariante Normierung der 1-Teilchenzustände (für $+$ und $-$):

$$\langle \vec{p}, \vec{p}' \rangle = 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

- Lösung der KG-Gleichung ist ein Feld-Operator \equiv Quantenfeld.
Fourier-Darstellung (allg. Lösung):

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0} [a(p)e^{-ipx} + b^+(p)e^{ipx}]$$

Entwicklungskoeffizienten a, b^+ (sowie a^+, b) sind Operatoren auf den Zustandsraum.

$$\begin{aligned} a^+(p) |0\rangle &= |+, \vec{p}\rangle && \text{Teilchen-Erzeuger} \\ b^+(p) |0\rangle &= |-, \vec{p}\rangle && \text{Antiteilchen-Erzeuger} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(p) |+, \vec{p}'\rangle &= 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') |0\rangle && \text{Teilchen-Vernichter} \\ b(p) |-, \vec{p}'\rangle &= 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') |0\rangle && \text{Antiteilchen-Vernichter} \end{aligned}$$

(für a, a^+, b, b^+ gelten kanonische Vertauschungsrelationen.)

1.3 Dirac-Gleichung für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

Ausgangspunkt: $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi$; Ansatz für H , linear in \vec{P} :

$$H = \underbrace{\sum_{k=1}^3 \alpha^k P^k}_{\equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{P}} + \beta m = \vec{\alpha} \cdot (-i\nabla) + \beta m$$

$$H^2 = \sum_{k=1}^3 (p^k)^2 + m^2 =$$

$$= \sum_{k,l} \frac{1}{2} (\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k) P^k P^l + \sum_k (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) P^k m + \beta^2 m^2$$

Bedingungen:

$$\alpha^k \alpha^l + \alpha^l \alpha^k = 2\delta^{lk} \Rightarrow (\alpha^k)^2 = 1$$

$$\underbrace{\alpha^k \beta + \beta \alpha^k}_{=:\{\alpha^k, \beta\}} = 0, \quad \beta^2 = 1$$

Diese drei Bedingungen sind nicht für Zahlen α^k, β erfüllbar, jedoch für hermitesche Matrizen.

Eigenschaften:

- $\beta^2 = (\alpha^k)^2 = 1 \Rightarrow$ Eigenwerte ± 1
- $\text{Tr}(\alpha^k) = \text{Tr}(\beta) = 0 \Rightarrow$ gerade Dimension: $2N \times 2N$
- niedrigste Dimension: $2N = 4 \Rightarrow \alpha^k, \beta$: Satz von 4×4 -Matrizen (Dirac-Matrizen)

konkrete Form (Dirac-Darstellung):

$$\beta = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right), \quad \alpha^k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma^k \\ \hline \sigma^k & 0 \end{array} \right)$$

1: 2×2 -Einheitsmatrix σ^k : Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: $\alpha^k, \beta \rightarrow \underbrace{T\alpha T^{-1}, T\beta T^{-1}}_{\text{erfüllen VR}}$

Observable: \vec{P} (Impuls), $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m$ (Energie)

Bahn-Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{P} = (L^1, L^2, L^3)$

Spin: (?), $\vec{S} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \vec{\sigma} & 0 \\ \hline 0 & \vec{\sigma} \end{array} \right)$ Spin-Operator; $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$

Eigenschaften:

(i)

$$\vec{S}^2 = \frac{1}{4} \sum_k (\sigma^k)^2 = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 1 = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)}_{s(s+1)} 1$$

mit $s = \frac{1}{2}$ Spin $\frac{1}{2}$

(ii) $[S^1, S^2] = iS^3$ und zyklisch, VR für Drehimpuls

(iii) Eigenwerte von S^3 : $\pm \frac{1}{2}$ (doppelt)

$$S^3 = \left(\begin{array}{c|c} \sigma^3 & 0 \\ \hline 0 & \sigma^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{Eigenzustände:} \\ \text{Eigenwerte:} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ +1 & -1 & +1 & -1 \end{array}$$

Spinzustände eines Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}$ (doppelt \rightarrow Anti-Teilchen)

$$\begin{array}{l} [H, \vec{L}] = -i \vec{\alpha} \times \vec{p} \neq 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ nicht erhalten} \\ [H, \vec{S}] = i \vec{\alpha} \times \vec{p} \neq 0 \Rightarrow \vec{S} \text{ nicht erhalten} \\ \hline [H, \vec{J}] = 0 \Rightarrow \vec{J} \text{ erhalten} \end{array}$$

Helizität: $\vec{p} \cdot \vec{S}$ ist Erhaltungsgröße, da

$$[H, \vec{p} \cdot \vec{S}] = \sum_k [H, p^k S^k] = \sum_k p^k \underbrace{[H, S^k]}_{i(\vec{\alpha} \times \vec{p})^k} + \underbrace{[H, p^k]}_0 S^k = i\vec{p} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{p}) = 0 \equiv [\vec{J}, \vec{p}]$$

Definition: Helizität $= \frac{\vec{p} \cdot \vec{S}}{|\vec{p}|} =$ Spin-Projektion auf die \vec{p} -Richtung.
Für Impulseigenzustand: Eigenwerte $\sigma = \pm \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{S} \cdot \vec{n}}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$$

Teilchenzustände sind festgelegt durch die Eigenwerte \vec{p}, σ .

H, \vec{p} , Helizität: vollständiges System kommutierender Observablen

$$\text{gemeinsame Eigenzustände: } |\vec{p}, \sigma\rangle \text{ mit } \begin{cases} H |\vec{p}, \sigma\rangle = p^0 |\vec{p}, \sigma\rangle \\ \vec{P} |\vec{p}, \sigma\rangle = \vec{p} |\vec{p}, \sigma\rangle \\ h |\vec{p}, \sigma\rangle = \sigma |\vec{p}, \sigma\rangle \end{cases}$$

Dirac-Matrizen: α^k, β

$$\text{kovariante Form: } \gamma^0 = \beta, \gamma^k = \beta \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\gamma^\mu) = (\gamma^0, \underbrace{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3}_{\equiv \vec{\gamma}}) \equiv (\gamma^0, \vec{\gamma})$$

Die Anti-VR lauten dann kompakt:

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}}$$

$$(\gamma^0)^2 = 1, (\gamma^k)^2 = -1$$

Definitionen:

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu, \quad \gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_k = -\gamma^k$$

Weitere Dirac-Matrix:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$$

Anmerkung: Insgesamt gibt es

$$\underbrace{1, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5}_{10}, \quad \underbrace{\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}_6$$

⇒ 16 linear unabhängige 4×4 -Matrizen.

Diracgleichung mit γ^μ ausdrücken:

$$\beta \cdot \left| \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m \right) \Psi = 0 \right. \Leftrightarrow \left. \left(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^k \partial_k - m \right) \psi = 0 \right.$$

kompakt:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \Psi = 0$$

kovariant, d.h. Form ist invariant unter Lorentz- Transformation (ohne Beweis).

Feynman-Notation: $\not{a} := \gamma^\mu a_\mu = \gamma_\mu a^\mu$ für beliebigen 4-Vektor a^μ , damit

$$\left(i\not{\partial} - m \right) \Psi = 0$$

Adjungierter Spinor:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$$

Für beliebige Dirac-Matrizen Γ (auch Produkte) wird definiert:

$$\bar{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$$

speziell: $\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu, \quad \bar{\gamma}_5 = -\gamma_5$

Adjungierte Dirac-Gleichung:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \longrightarrow -i(\partial_\mu \Psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} - m\Psi^\dagger = 0$$

$$-i\partial_\mu \underbrace{\Psi^\dagger \gamma^0}_{\bar{\Psi}} \underbrace{\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0}_{\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu} - m \underbrace{\Psi^\dagger \gamma^0}_{\bar{\Psi}} = 0$$

$$\boxed{i(\partial_\mu \bar{\Psi})\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = (\partial_\mu\bar{\Psi})\gamma^\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) = 0}$$

wegen Dirac-Gleichung und adjungierter Dirac-Gleichung.

d.h. $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ ist ein erhaltener Strom. (ohne Beweis)

$\int d^3x \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \int d^3x \Psi^\dagger\Psi = Q$ erhaltene Ladung

$\boxed{j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi}$ ist der elektromagnetische Strom (geeignet normiert)

Lorentz-kovariante Größen: (ohne Beweis)

$\bar{\Psi}\Psi$: Skalar, invariant

$\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$: 4-Vektor

$\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$: Pseudo-Skalar (-Zeichen bei Spiegelung)

$\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$: axialer Vektor (+ Zeichen im Raumanteil bei Spiegelung)

$\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$: Tensor 2.Stufe $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

Lösungen der Dirac-Gleichung

(i) Ruhesystem

$\vec{p} = 0$, $i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \beta m\Psi \Rightarrow$ Lösung Ψ zum Impulszustand mit $(p^\mu) = \beta m\Psi = (m, \vec{0})$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix}$$

in Komponenten:

$$\underbrace{i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{1,2} = m\psi_{1,2}}_{\psi_{1,2} \sim e^{-imt}}, \quad \underbrace{i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{3,4} = -m\psi_{3,4}}_{\psi_{3,4} \sim e^{imt}}$$

4 linear unabhängige Lösungen:

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}, \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

$$\psi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt}, \quad \psi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt}$$

$H\psi^{(3,4)} = \beta m\psi^{(3,4)} = -m\psi^{(3,4)}$ „negative Energie“

(ii) Ebene Welle zu $\vec{p} \neq 0$

(Impulseigenzustände)

Ansatz (1) $\Psi = u(p)e^{-ipx}$, $px = p^0t - \vec{p} \cdot \vec{x}$, $p^0 = E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$$i\partial_\mu \Psi = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} u(p) e^{-ip_\mu x^\mu} = p_\mu u(p) e^{-ipx}$$

ergibt eine algebraische Gleichung für $u(p)$:

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0}$$

aus $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)u(p)e^{-ipx} = 0$. Kompakt geschrieben:

$$\boxed{(\not{p} - m)u = 0}$$

$$(\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m)u = 0$$

$$\left(\begin{array}{c|c} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \hline \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{array} \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

φ, χ sind 2-komponentige Spinoren. Dies ist ein homogenes Gleichungssystem mit $\det = 0$ (\rightarrow Existenz nicht-trivialer Lösungen), unabhängige Bedingung ist eine 2-komponentige Gleichung:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\varphi - (E + m)\chi = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \varphi, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 linear unabhängige Lösungen

Ansatz (2) $\Psi = v(p)e^{ipx}$, $i\partial_\mu \Psi = -p_\mu \Psi$

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\Psi = 0 = (-\gamma^\mu p_\mu - m)v e^{ipx}$$

algebraische Gleichung: $\boxed{(\not{p} + m)v(p) = 0}$

$$\left(\begin{array}{c|c} E + m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \hline \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E + m \end{array} \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(E + m)\varphi - (\vec{\sigma}\vec{p})\chi = 0, \quad \varphi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\chi, \quad \chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 linear unabhängige Lösungen.

(1) $H\Psi = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = p^0 \Psi$,

(2) $H\Psi = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -p^0 \Psi$. „negative Energie“

erlaubter Energiebereich: $E \geq m$, $E \leq -m$

Weitere Festlegung der Zustände durch Helizität:

$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, $h = \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{n}$ Helizitätsoperator

$$hu(p) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} & 0 \\ \hline 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\varphi = \pm\varphi, \varphi = \varphi_{\pm 1} \Rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\chi = \pm\chi$$

wegen $\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m}\varphi$ und $[\vec{\sigma} \cdot \vec{n}, \vec{\sigma} \cdot \vec{p}] = 0$. Bezeichnung: $\begin{pmatrix} \varphi_{\pm 1} \\ \chi_{\pm 1} \end{pmatrix} = u(p, \sigma), \sigma = \pm \frac{1}{2}$
 erfüllt $(\not{p} - m)u(p, \sigma) = 0, \frac{1}{2}(\vec{\Sigma} \cdot \vec{n})u(p, \sigma) = \sigma \cdot u(p, \sigma)$
 Für v analog: $v(p, \sigma), \sigma = \pm \frac{1}{2}$ [oder $v_{\sigma}(p)$]

$$\begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})\chi = \pm\chi$ damit ergibt sich

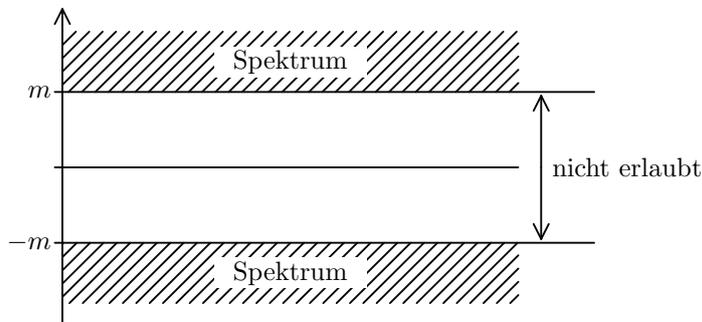
$$\Rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \underbrace{\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{E+m}}_{\varphi} \chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{E+m}(\pm\chi) = \pm\varphi$$

$v_{\sigma}(p)e^{ipx}, u_{\sigma}(p)e^{-ipx}$ sind ein vollständiges System von Lösungen der Diracgleichung \Rightarrow jede Lösung kann als Entwicklung geschrieben werden (Fourier-Entwicklung):

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0} \sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} \{A_{\sigma}(p)u_{\sigma}(p)e^{-ipx} + B_{\sigma}^*(p)v_{\sigma}(p)e^{ipx}\}$$

$A_{\sigma}(p), B_{\sigma}^*(p)$ sind die Fourier-Koeffizienten (\rightarrow werden zu Operatoren bei Feld-Quantisierung).

Lösung zu negativer Energie: Anti-Teilchen. Bis jetzt noch offen: Bedeutung der Lösung $\Psi_- = ve^{ipx}$. „Erklärung“ von Dirac: **Löchertheorie**



Dirac-See: Zustände mit negativer Energie sind alle besetzt. Pauli-Prinzip \Rightarrow „Eintauchen“ eines weiteren Teilchens verboten. Jedes zusätzliche Teilchen daher mit $E > 0$ stabil.

Jedoch: Anregungen sind möglich wenn Energie $> 2m$ zugeführt wird \rightarrow es entsteht ein Teilchen-Loch-Paar.

Teilchen (Elektron, e^-): Energie $E > 0$, Impuls \vec{p} , Ladung e

Loch (Positron, e^+): Abwesenheit eines Teilchens im See, mit Energie $-E$, Impuls $-\vec{p}$, Ladung $-e$

Loch = Antiteilchen

- kann nur paarweise mit Elektron zusammen gebildet werden, braucht dazu Energie $> 2m$

- kann nur paarweise mit Elektron zusammen vernichtet werden, Energie $> 2m$ wird frei

Beobachtet: $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ (im Feld), $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$

$$\Psi_+(x) = u_\sigma(p)e^{-ipx}, \quad (p^\mu) = (E, \vec{p})$$

beschreibt Elektron mit p^μ , Helizität σ

$$\Psi_-(x) = v_\sigma(p)e^{ipx}$$

beschreibt Positron mit p^μ , Helizität σ

Einwände gegen die Löchertheorie:

- Gesamtladung des Sees = ∞ (muß per Definition auf Null gesetzt werden)
- Unsymmetrie zwischen Teilchen-Antiteilchen
- keine 1-Teilchen-QM, sondern eine Vielteilchentheorie, mit Erzeugung und Vernichtung

Konsistente moderne Beschreibung:

Dirac-Gleichung ist eine Feld-Gleichung, $\Psi(x) = \Psi(\vec{x}, t)$ ist ein Feld-Operator (Quantenfeld), keine 1-Teilchen-Wellenfunktion.

- Zustandsraum: $|0\rangle$ (Vakuum), $|e^-, p\sigma\rangle$, $|e^+, p\sigma\rangle$, ...
- $\left. \begin{array}{l} \text{Teilchen: } e^- (\text{Elektron}) \\ \text{Antiteilchen: } e^+ (\text{Positron}) \end{array} \right\} \text{ Ladung } \pm 1 \text{ (-1 für Elektron)}$

Fourier-Darstellung für Ψ

$u_\sigma(p)e^{-ipx}$, $v_\sigma e^{ipx}$ ist ein vollständiger Satz von Lösungen.

$\Psi(x)$ ist jetzt ein **Feld-Operator**:

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0} \sum_\sigma \{c_\sigma(p)u_\sigma(p)e^{-ipx} + d_\sigma(p)v_\sigma(p)e^{ipx}\}$$

c, c^\dagger : Vernichter und Erzeuger von Teilchen (e^-) mit \vec{p}, σ
 d, d^\dagger : Vernichter und Erzeuger von Anti-Teilchen (e^+) mit \vec{p}, σ
 erfüllen kanon. Anti-VR $\{c, c'\} = 0$, usw.

$$\begin{aligned} c_\sigma^\dagger(p)|0\rangle &= |e^-, p\sigma\rangle, \quad d_\sigma^\dagger(p)|0\rangle = |e^+, p\sigma\rangle \\ d_\sigma(p)|e^+, p'\sigma'\rangle &= 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma\sigma'} |0\rangle \\ c_\sigma(p)|e^-, p'\sigma'\rangle &= 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma\sigma'} |0\rangle \end{aligned}$$

(sonst immer = 0)

Diracgleichung $(i\cancel{\partial} - m)\Psi(x) = 0$ ist Feldgleichung. Lösung:

$$\Psi(x) = \sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} \int d^3p \{c_\sigma(p)u_\sigma(p)e^{-ipx} + d_\sigma^\dagger(p)v_\sigma(p)e^{ipx}\} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$

$$c_{\sigma}^{\dagger}(p) |0\rangle = |e^{-}, \vec{p}\sigma\rangle \quad \begin{array}{l} c_{\sigma}^{\dagger}(p) \text{ Erzeuger von Elektronen} \\ c_{\sigma}(p) \text{ Vernichter} \end{array}$$

$$d_{\sigma}^{\dagger}(p) |0\rangle = |e^{+}, \vec{p}\sigma\rangle \quad \begin{array}{l} d_{\sigma}^{\dagger}(p) \text{ Erzeuger von Positronen} \\ d_{\sigma}(p) \text{ Vernichter} \end{array}$$

Kapitel 2

Bausteine des Atoms und des Kerns

2.1 Elektron, Proton und Neutron

Elektron: In Entladungsröhren konnte Thomson 1837 Elektronen als freie Teilchenstrahlen (Kathodenstrahlung) erzeugen, die er als Träger negativer Elektrizität identifizierte. Durch Ablenkung in \vec{E} - und \vec{B} -Feldern konnte er das

$$|e/m|\text{-Verhältnis messen: } \frac{\text{Elektron}}{\text{Proton}} = \frac{1}{1844}$$

Millikan bestimmte 1910 die Elementarladung zu:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \Rightarrow m_e = 511 \text{ keV}/c^2.$$

Atomkern: Rutherford war der Meinung, dass die positiven Ladungsträger des Kerns räumlich stark konzentriert waren. Dies sah er in seinen Experimenten bestätigt.

Proton: Rutherford beschoss Stickstoff mit α -Teilchen. Durch die Resultate war ersichtlich, dass Protonen Träger von positiver Elementarladung waren und eine lange Reichweite hatten. Folgende Reaktion beobachtete er:



Ladungszahl Z : Z bezeichnet die Zahl der Protonen im Atomkern.

Die Bestimmung von Z wird durch Messung der Energie bei Röntgenübergängen von der L -Schale zur K -Schale realisiert.

$$E(K_\alpha) = \frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 (Z - 1)^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

(NB: $(Z - 1)$ wegen Abschirmung des einen verbleibenden e^- in der K -Schale)

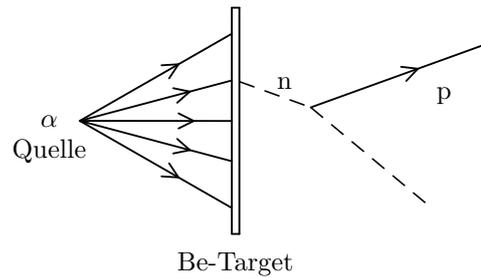
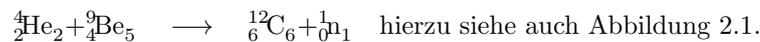


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Experiments von Chadwick

Neutron: Chadwick entdeckte 1932 das Neutron bei der Reaktion



Der Nachweis des ungeladenen Neutrons gelang über den Rückstoß an Protonen in der Nebelkammer. Bei zentralen Stößen $n + p \longrightarrow p + n$ wird (fast) die gesamte Energie übertragen:

$$m_n = 938,272 \text{ MeV}/c^2 \simeq m_p = 939,565 \text{ MeV}/c^2$$

Diese annähernde Gleichheit der Ruhemassen ist verwunderlich. Was steckt dahinter? Dies war damals ein großes Rätsel und wird heute noch immer nicht vollständig verstanden.

Die **Massenzahl** $A = Z + N$ ist die Zahl der Nukleonen (= Protonen (Z)+ Neutronen (N)).

Bei der Bezeichnung eines Kerns wird die Schreibweise ${}^A_Z\text{X}_N$ benutzt. Üblich ist aber auch nur die Angabe des Massenzahl A , da die Protonen- und Neutronenzahl daraus und aus dem Element selbst (X) ableitbar sind: ${}^A\text{X}$.

Isobare sind Kerne gleicher Massenzahl A .

Isotope sind Kerne gleicher Protonenzahl Z .

Isotope zeigen gleiche chemische Eigenschaften, sind aber ungleich schwer. Dies wurde 1912 von Aston entdeckt (Massenspektroskopie), aber bis zur Entdeckung des Neutrons nicht verstanden.

Isotone sind Kerne gleicher Neutronenzahl N .

2.2 Masse und Bindungsenergie

Der sogenannte **Massendefekt** lässt sich allgemein mit der Ungleichung

$$M({}^A_Z\text{X}_N) < (Z \cdot M({}^1\text{H}) + N \cdot M_n)$$

ausdrücken, wobei $M(^1\text{H}) = M_p + m_e$ ist und als Nebenbedingung die Bindungsenergie des e^- vernachlässigt wurde.

Hieraus kann man auf die **Bindungsenergie** B des Kerns schließen, die mit $B = \Delta mc^2$ allgemein gegeben ist. Die Differenz der Summe der Ruhmassen aller Bestandteile und des gesamten Atoms ergibt somit die gesuchte Bindungsenergie, welche wiederum durch

$$B = [Z \cdot (^1\text{H}) + (A - Z) \cdot M_n - M(Z, A)]c^2$$

(unter Vernachlässigung der e^- ausgedrückt werden kann.

Experimentell wird diese Energie durch Massenspektroskopie bestimmt.

Die **Seperationsenergie** ist die Energie, die benötigt wird, um ein Neutron (n) vom Kern zu entfernen:

$$S_n = [M(Z, A - 1) - M(Z, A) + M_n]c^2 = B(Z, A) - B(Z, A - 1).$$

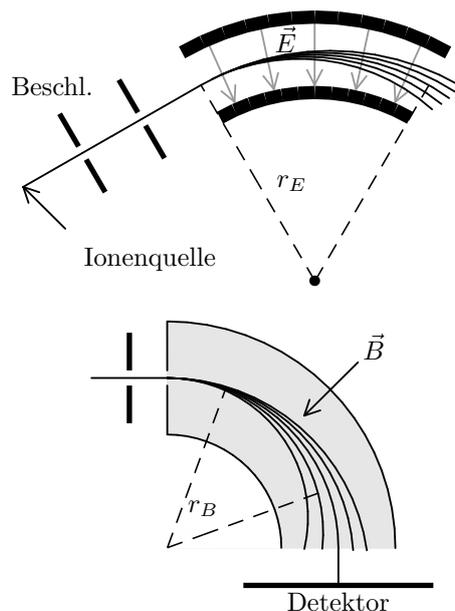
Analog ist die Seperationsenergie für das Proton definiert:

$$S_p = B(Z, A) - B(Z - 1, A - 1)$$

Hierbei gibt es eine Analogie zur Ionisationsenergie in der Atomphysik. Die Bindungsenergie pro Nukleon wird in der Abbildung 2.2, Seite 26 dargestellt.

Massenspektrometrie

Experimentelle Methode:



$$Q \cdot |\vec{E}| = \frac{Mv^2}{r_E}$$

$$\Rightarrow r_E = \frac{Mv^2}{QE} \sim E_{kin}$$

→ Energieselektion

$$Q|\vec{v}||\vec{B}| = \frac{Mv^2}{r_B}$$

$$\Rightarrow r_B = \frac{Mv}{QB} \sim p$$

→ Impulsselektion

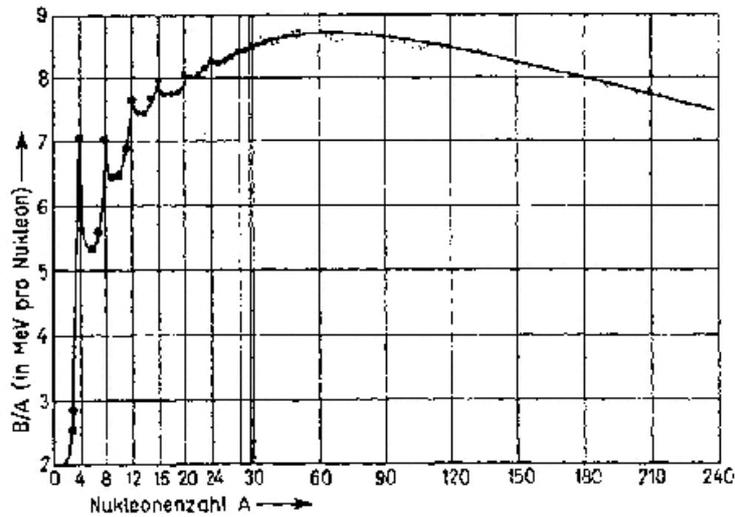


Abb. 11.2: Die Bindungsenergie pro Nukleon ist bei schweren Kernen mit $B/A \approx 7.5 \dots 8.5 \text{ MeV}/c^2$ praktisch konstant. Bei leichten Kernen gilt diese Aussage allerdings nicht. In der Abbildung ist die Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion von A für stabile Kerne geplottet, wobei die Abszisse bis $A = 30$ gespreizt wurde (aus [Ma84]).

Abbildung 2.2: Bindungsenergie pro Nukleon

In der modernen Massenspektrometrie werden \vec{E} - und \vec{B} -Felder kombiniert. Höchste Genauigkeiten werden mittels Atom-/Ionenfallen (\rightarrow Penningfallen) erreicht (eV-Bereich).

Messtechnisch günstig ist es, einen Massenstandard zu definieren. Dieser wird durch das ^{12}C Atom gegeben:

$$1\text{u} = \frac{1}{12}M_{^{12}\text{C}} = 931,494 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 1,66054 \cdot 10^{-27}\text{kg}.$$

Massenbestimmung über Kernreaktionen Wir betrachten zunächst die Bindungsenergie des Deuterons:

Thermische Neutronen ($E_{kin} \simeq 25\text{meV}$) werden in H, einem Wasserstoffkern, eingefangen:



Die Energie des Photons γ wird gemessen.

$$B = E_\gamma + E_{\text{Rückstoß}}$$

$$E_\gamma = \underbrace{(M_n + M_H + M_{^2\text{H}})}_B c^2 - \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{Rückstoßenergie}}$$

Somit ist $B(Z = 1, A = 2) \simeq E_\gamma = 2,225\text{MeV}$. Eine Nebenbedingung hier lautet, dass die Rückstoßenergie vernachlässigbar ($\lesssim 10^{-3}$) ist. Diese Methode ist insbesondere relevant für kurzlebige Kerne.

2.3 Weizsäcker-Massenformel

$$M(Z, A) = Z(M_p + m_e) + N \cdot M_n - B(Z, A)$$

Was hält den Kern zusammen? Darauf wird hier keine Antwort gegeben. Vielmehr wird versucht, empirisch den experimentellen Befund zu beschreiben, d.h. $B(Z, A)$ zu beschreiben.

- **Volumenterm:** B/A ist nahezu konstant für große Werte von A . Daraus kann man schließen, dass die Reichweite der Kernkraft kurz ist (\sim Nukleon-Abstand), da die Kernkraft sonst (also bei Wechselwirkung zwischen jedem Nukleon mit jedem anderen im Kern) proportional zu $A(A - 1)$ oder näherungsweise A^2 sein müsste. Man kann auch sagen, die Kernkraft ist gesättigt. Diese Sättigung führt zu einer konstanten Dichte im Kern (Tröpfchenmodell), die für fast alle Kerne gleich ist, und zu der Relation $A \sim R^3$ oder $R \sim A^{1/3}$. Die Dichte beträgt

$$\rho_N \simeq 0,17 \frac{\text{Nukleon}}{\text{fm}^3} = 3 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Der Volumenterm lautet

$$B_V(Z, A) = a_v \cdot A.$$

- **Oberflächenterm:** Für Nukleonen an der Kernoberfläche ist die Bindung gemäß $B_S \sim R^2 \sim A^{2/3}$ reduziert. Der Oberflächenterm lautet

$$B_S(Z, A) = -a_s \cdot A^{2/3}.$$

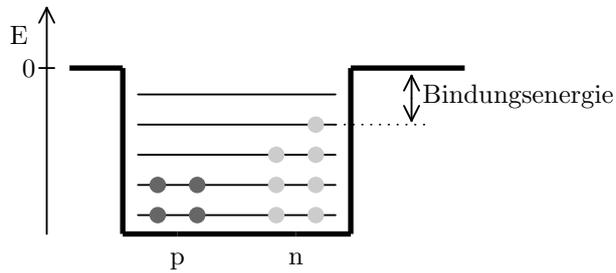
- **Coulombterm:** Protonen im Kern stoßen sich ab und reduzieren dadurch die Bindungsenergie.

Aus der klassischen elektrostatischen Energie der homogen verteilten Ladung eZ in einer Kugel und der Relation $A \sim R^3$ (wegen konstanter Dichte) lautet der Coulombterm

$$B_C = -\frac{3}{5} \cdot \frac{(eZ)^2}{R} = -a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

- **Asymmetrieterm:** Um die Coulomb-Abstoßung der Protonen im Kern durch die Kernkraft teilweise zu kompensieren, häufen schwere Kerne Neutronen an.

Nukleonen sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (Fermionen) und gehorchen der Fermistatistik (\rightarrow Quantenmechanik).



Ihre Bindungsenergie ist reduziert, wenn ein Ungleichgewicht zwischen Z und A herrscht. Aus statistischen Gründen ist $B \sim (Z - N)^2$. (Anm.: Es spielt keine Rolle, welches Proton (Neutron) als Überschuss gezählt wird.) Für großen n -Überschuss gibt es im Kern β^-/β^+ -Zerfall. Für schwere Atome ist $N > Z$ wegen der Anhebung des Potentialtopfes. Für stabile (nicht zu schwere) Kerne ist $N \approx Z$. Der Assymetrieterm ergibt sich aus diesen Überlegungen zu

$$B_A = -a_a \cdot \frac{(N - Z)^2}{4A}.$$

- **Paarungsterm:** Dieser Term ist ebenfalls quantenmechanischer Natur. Die Bindungsenergie wird sprunghaft erniedrigt, wenn je eine gerade Anzahl von p (n) mit einem weiteren p (n) aufgefüllt wird.

$$B_P = \pm \delta \cdot \frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$\text{mit } \delta = \begin{cases} -11,2 \text{ MeV} & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug-Kerne} \\ +11,2 \text{ MeV} & \text{für uu-Kerne} \end{cases}$$

Insgesamt ergibt sich somit für $B(Z, A)$

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/2}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{4A} \pm \delta \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

bzw. für $M(Z, A)$

$$M(Z, A) = NM_n + ZM_p + Zm_e - (a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/2}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{4A} \pm \delta \frac{1}{\sqrt{A}}) \frac{1}{c^2},$$

wobei die Konstanten für diese Formel lauten:

$$\begin{aligned} a_v &= 15,67 \text{ MeV} \\ a_s &= 17,23 \text{ MeV} \\ a_c &= 0,714 \text{ MeV} \\ a_a &= 93,15 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

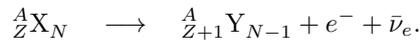
2.4 Stabilität der Kerne

- Für leichte Kerne ist $N \simeq Z$ wegen dem Asymmetrieterm.
- Für schwere Kerne wird die Coulombabstoßung zu groß und $N > Z$.
- Es ist $B_n < 0$ für großen Neutronenüberschuss. $\rightarrow n$ -Emission
- Es ist $B_p < 0$ für großen Protonenüberschuss. $\rightarrow p$ -Emission

Der Bereich mit $B_n, B_p > 0$ ist der Bereich von „Quasistabilen Kernen“.

Kerne mit Neutronenüberschuss

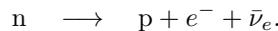
Kerne mit n -Überschuss (aber $B_n > 0$) unterliegen dem β^- -Zerfall:



Die Energiedifferenz ist dann

$$\Delta E = \left\{ \underbrace{[M(Z, A) - Zm_e]}_{\text{Masse des Mutterkerns}} - \left[\underbrace{[M(Z+1, A) - (Z+1)m_e]}_{\text{Masse des Tochterkerns}} + \underbrace{m_e}_{\beta} \right] \right\} c^2.$$

Der β -Zerfall findet statt, falls $M(Z, A) > M(Z+1, A)$ ist. Im Wesentlichen passiert folgendes:

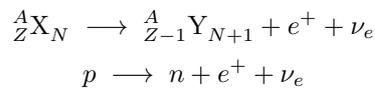


NB: Auch das freie Neutron ist „ β -instabil“. Die Lebensdauer ist $T_{1/2} \simeq 15$ min, mit $Q = (m_n - m_p - m_e) \simeq 0.79$ MeV. Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist also sehr lang im Anbetracht von elektromagnetischen Prozessen. Die dem β -Zerfall unterliegende Kraft ist die **schwache Wechselwirkung**.

Kerne mit Protonenüberschuss

Kerne mit p -Überschuss zerfallen entweder durch

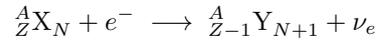
(i) β^+ -Zerfall:



Das freie Proton zerfällt nicht über diesen Weg, weil $Q = (m_p - m_n - m_e)c^2 \simeq -1,81$ MeV (energetisch nicht möglich). Für Kerne ist der Zerfall energetisch möglich, wenn die Bedingung $Q = M(A, Z) - M(A, Z-1) - 2m_e > 0$ bzw. $M(A, Z) > M(A, Z-1) + 2m_e$ erfüllt ist. Die zweifache Masse des Elektrons erklärt sich durch die Entstehung des Positrons und durch das überzählige Elektron, welches vom Mutterkern noch vorhanden ist.

oder durch

(ii) **Elektroneneinfang (EC):**



K-Elektron mit hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern werden bevorzugt eingefangen. Die Energiebedingung für den EC lautet:

$$M(A, Z) > M(A, Z - 1)$$

NB: Der β^+ -Zerfall und der EC führen auf denselben Tochterkern. Somit ist der EC ein Konkurrenzprozeß zum β^+ -Zerfall. Der EC findet nur dann alleine statt, wenn die Massendifferenz zwischen 0 und $2m_e$ liegt.

β^+ -Zerfall und e^- -Einfang sind ebenfalls Prozesse der „**schwachen Wechselwirkung**“.

Energetik des β^- -Zerfalls (β^- , β^+ , EC)

Bei β^- -Zerfall bleibt A konstant (Isobare). Für isobare Zustände gilt:

$$M(A, Z) = \gamma Z^2 - \beta Z + \alpha A \pm \frac{\delta}{\sqrt{A}}$$

mit

$$\gamma = a_a/A + a_c/A^{1/3}$$

$$\beta = a_a + (m_n - m_p - m_e)$$

$$\alpha = m_n - a_v + a_s/A^{1/3} + a_a/4$$

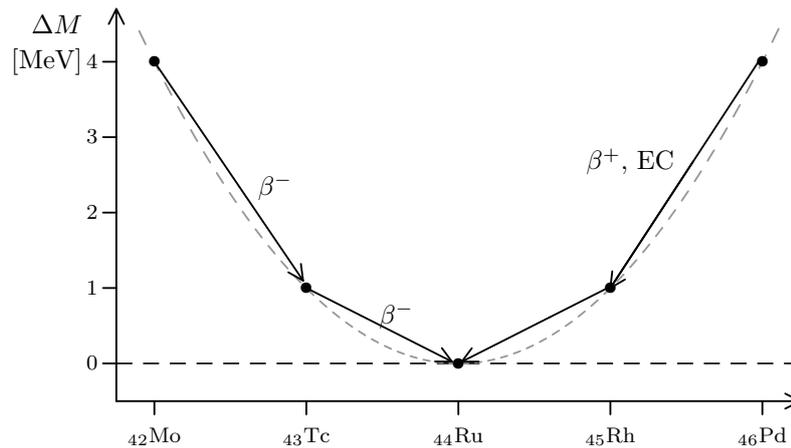
δ wie oben

→ $M(A, Z)$ ist quadratisch in Z .

β^- -Zerfall in ungeraden Kernen (ug/gu): $\delta = 0$

z.B. $A = 101$ (Zahl stabiler ug-Kerne: 105)

Der β^- -Zerfall findet statt, wenn $M(A, Z) > M(A, Z + 1)$ is.



Das Minimum der Parabel gibt den energieärmsten und somit stabilsten Zustand an:

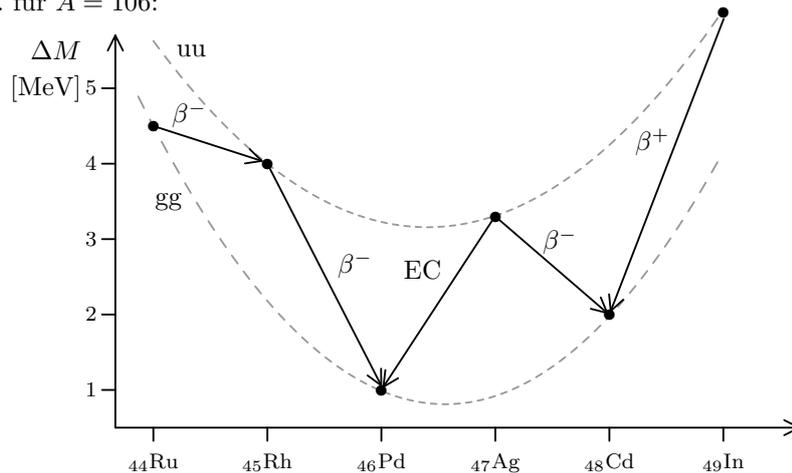
$$\left(\frac{\partial M}{\partial Z}\right) = \beta + 2\gamma Z_0 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow Z_0 = -\frac{\beta}{2\gamma}$$

Für $A = 101$ liegt das Minimum bei $Z_0 \simeq 43,7$. \Rightarrow
 $^{101}_{44}\text{Ru}$ ist als einziger Kern der Isobarenkette stabil.

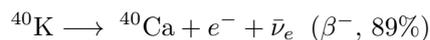
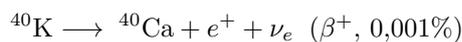
β -Zerfall in geraden Kernen (gg/uu)

Die Paarungsenergie $\pm\delta$ führt zu zwei Massenparabeln: Eine (energieabgesenkte) für gg-Kerne und eine weitere für uu-Kerne.

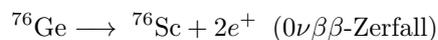
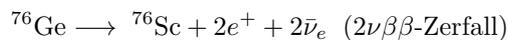
z.B. für $A = 106$:



- Alle uu-Kerne haben einen stärker gebundenen gg-Nachbarn und sind daher instabil
- Es gibt uu-Kerne, die sowohl dem β^- als auch dem β^+ -Zerfall unterliegen, z.B.:



- Einige gg-Kerne unterliegen dem $\beta\beta$ -Zerfall, z.B.:



Letztere sind bisher nicht nachgewiesen, auch weil diese Zerfälle extrem lange Halbwertszeiten haben.

$$t_{1/2}(2\nu\beta\beta) \simeq 1,7 \cdot 10^{21} \text{y} \quad (\gg T_{\text{Universum}})$$

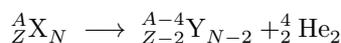
Statistik der stabilen Kerne

Kerntyp	Anzahl
gg	165
ug	105
gu	
uu	

uu: ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$ sind Ausnahmen von obiger Regel.

Diese sehr leichten Kerne werden vom Tröpfchenmodell nicht erfasst. Sie sind sehr stark gebunden wegen gleicher Zahl von Z und N. (\rightarrow Nuklidkarte)

α - Zerfall

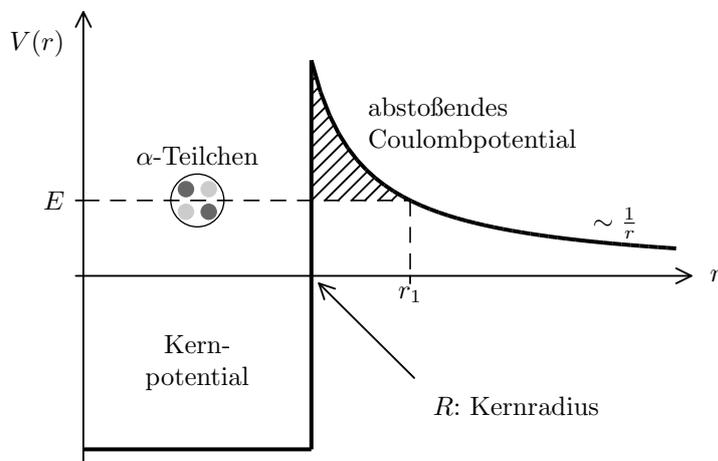


Der α -Zerfall wurde als erster radioaktive Zerfallstyp entdeckt.

Aus der Massenformel lässt sich voraussagen, in welchen Fällen der α -Zerfall möglich ist:

$$Q_\alpha = [M(Z, A) - M(Z - 2, A - 4) - M({}^4\text{He})] c^2 = \underbrace{B({}^4\text{He})}_{28,3\text{MeV}} + B(Z-2, A-4) - B(Z, A)$$

Q_α ist also größer als Null, wenn $A \geq 150$ ist.



QM: Transmission durch „dünne“ Potentialbarriere V der Dicke Δr :

$$T \simeq e^{-2x\Delta r}$$

mit

$$x = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E - V|}$$

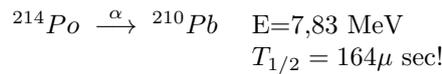
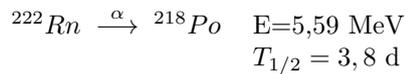
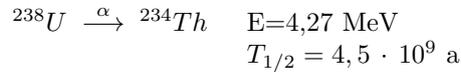
Ansatz für α - Zerfall:

$$T = e^{-2G}$$

mit $G = \int_R^{r_1} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} |E - V|} dr$, dem sog. **Gamovfaktor**.

[NB: Ersetzt die Summation: $T_i = e^{-2x_i\Delta r}$, $T_{ges} = \prod T_i = e^{-2\sum x_i\Delta r}$]

Starke Korrelation zwischen Lebensdauer und Energie des α -Teilchens (bei Kernen mit vergleichbarem Z), z.B.:



Die α -Zerfälle sind insgesamt beschreibbar durch:

- Kernwechselwirkung (Wahrscheinlichkeit, dass sich im Kern ein α -Teilchen bildet)
- Elektromagnetische Wechselwirkung
(Transmissionswahrscheinlichkeit durch Coulombbarriere, Tunneleffekt)

Für noch größere Massenunterschiede können prinzipiell noch weitere, stark gebundene, Kernbruchstücke emittiert werden. Bei den schwersten (stabilen) Kernen ist die Kernspaltung beobachtbar.

Kernspaltung

Energie„gewinnung“ ist für leichte Kerne per **Kernfusion**, für schwere Kerne ($Z \gtrsim 40$) durch **Kernspaltung** möglich. (Der „Gewinn“ erfolgt über in kinetische Energien der Reaktionsprodukte bzw. der inneren Anregungsenergien (\rightarrow EM, Teilchenemission))

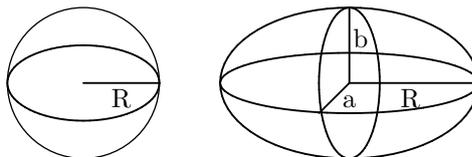
Bei der Spaltung muss sich der Kern deformieren. Diese Deformation kann von außen induziert werden, z.B. durch n-Absorption. Eine spontante Spaltung ist nur bei superschweren, kurzlebigen Kernen möglich.

Weizsäcker-Formel: Plausibilitätsbetrachtung

Bei der Deformation bleiben Asymmetrie-, Paarungs-, und der Volumenterm (wegen der konstanten Dichte) konstant. Es ändern sich aber

- i) Coulombterm (nimmt ab)
- ii) Oberflächenterm (nimmt zu)

Betrachten wir die Energieänderungen bei der Deformation eines kugelförmigen Kerns in ein Ellipsoid bei gleichbleibenden Volumen:



$$V = \text{const} = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} ab^2$$

dabei ist

- R := Kugelradius
- a, b := Hauptachsen des Ellipsoids
- $a = R(1 + \epsilon)$
- $b = R(1 + \epsilon)^{-1/2}$

Wenn $\epsilon \neq 0$:

- Coulombabstoßung nimmt ab (größerer mittlerer Abstand der Protonen zueinander)

$$B_C = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5} \epsilon^2 + \dots\right)$$

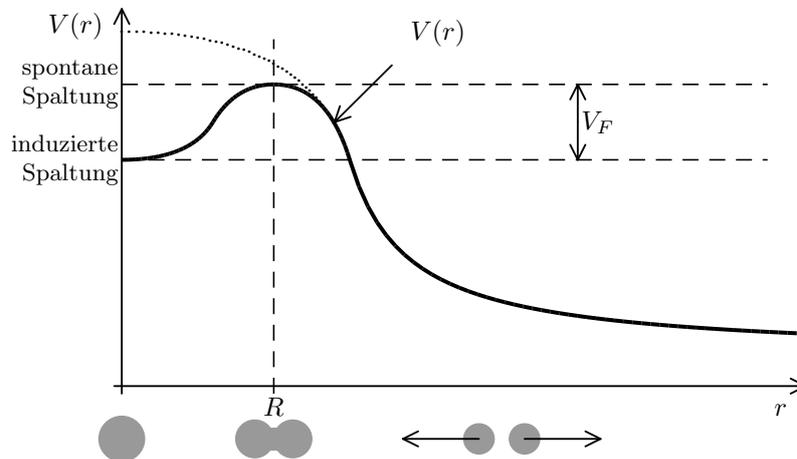
- Oberflächenenergie nimmt zu (Oberfläche ist minimal für Kugel)

$$B_S = -a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 + \dots\right)$$

Die Deformation ändert somit die Bindungsenergie um:

$$\Delta B = B(\epsilon) - B(\epsilon = 0) = \frac{\epsilon^2}{5} \left(2a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3}\right)$$

Bei negativem ΔB gewinnt man bei Verformung Energie.



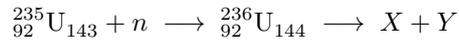
Die Spaltbarriere verschwindet also, wenn der Zugewinn durch Coulombabstoßung größer als der Verlust durch den Oberflächenterm (**spontane Spaltung**) ist, also wenn gilt:

$$a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \cdot \frac{1}{5} \geq A^{2/3} \cdot \frac{2}{5} \cdot a_O$$

$$\frac{Z^2}{A} \geq \frac{2a_O}{a_c} \simeq 48$$

⇒ möglich für $Z > 114$ und $A > 270$

Vgl.: Schwerster (bekannter) stabiler Kern ist Uran: ${}_{92}^{238}\text{U}$. Die Uranspaltung ist durch Neutronen-Absorption möglich:



Energieabsenkung durch Bildung von gg - Kern:

Beim n-Einfang an Kernen mit ungerader Neutronenzahl wird zusätzlich zur Bindungsenergie noch Paarungsenergie frei.

	$ B_n $	$ V_F $	
${}^{235}\text{U} + n :$	$6,8\text{MeV}$	$6,8\text{MeV}$	Spaltung ist mit thermischen Neutronen möglich

${}^{238}\text{U} + n :$	$5,3\text{MeV}$	$7,1\text{MeV}$	man benötigt zusätzlich kinetische Energie der Neutronen (schnelle Neutronen)
--------------------------	-----------------	-----------------	---

${}^{235}\text{U}$ spaltbar durch thermische Neutronen.

Energiebilanz bei Spaltung

für $A \geq 200$ ist $\frac{B}{A} \simeq 7,5\text{MeV}$	} freiwerdende Energie pro Spaltung: ca. 200MeV
für Spaltprodukte ist $\frac{B}{A} \simeq 8,5\text{MeV}$	

Die Neutronenemission beträgt ca. 2,5 Neutronen pro Spaltung. Während 99% davon verdampfen (Zeitskala $\sim 10^{-13}\text{s}$), treten 1% als β -verzögerte Neutronen auf (Zeitskala schwacher WW liegt im Sekunden- bis Minutenbereich), welche deshalb bei der Regelung von Kernreaktoren genutzt werden.

Kapitel 3

Kernmodelle

Potential im Kerninneren

Im Folgenden werden Spin- und Isospineffekte vernachlässigt. Die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen ist gegeben durch $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Das Gesamtpotential eines Kerns mit i Nukleonen am Ort \vec{r} berechnet sich dann folgendermaßen:

$$W(\vec{r}) = \sum_i V(\vec{r} - \vec{r}_i) = \int d^3r' V(\vec{r} - \vec{r}') \sum_i \rho(\vec{r} - \vec{r}_i) \text{ mit } \rho(\vec{r}) = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$W(\vec{r}) = \int d^3r' V(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\vec{r}) = V(\vec{r}) \otimes (\vec{r})$$

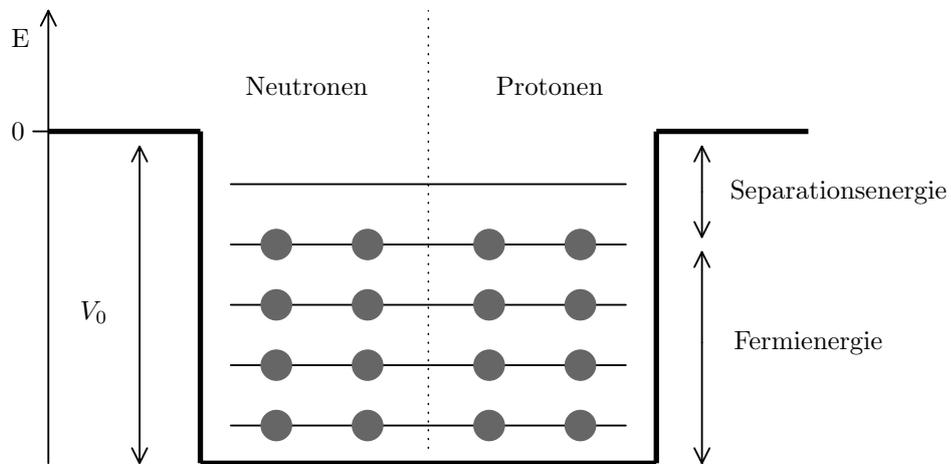
Nun kann man die Näherung machen, dass die Reichweite der Kernkraft viel kleiner als die Größe des Kerns ist (Der Durchmesser eines Kerns liegt typischerweise bei 10fm, die Reichweite der Kernkraft bei 1-2fm). Das Potential liefert also nur am Ort des Kerns einen Beitrag und kann deshalb durch eine Delta-Funktion angenähert werden: $V(\vec{r} - \vec{r}') = V_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

Somit ergibt sich für das Gesamtpotential: $W(\vec{r}) = V_0 \rho(\vec{r})$

Das Potential ist also proportional zur Kerndichte. Diese ist **näherungsweise konstant im Inneren** und fällt außen schnell auf null ab. Die Nukleonen sind also in einem Potentialtopf mit der Tiefe V_0 gefangen. Diese Modellvorstellung wird im Fermigas-Modell beschrieben.

3.1 Fermigas-Modell

n und p bewegen sich unabhängig voneinander in einem gemeinsamen anziehenden Potential. Als Teilchen mit Spin- $\frac{1}{2}$ gehorchen sie dem Pauliprinzip.



Annahme: Für das einzelne Nukleon erscheint das Kerninnere unendlich ausgehnt.

Die quantenmechanische Lösung für diesen Potentialtopf lautet also:

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Bei endlichem Kernvolumen liefert diese Lösung diskrete Werte für k . Mit unserer Annahme ($V \rightarrow \infty$) ergibt sich ein Kontinuum im k -Raum. Die Zahl der möglichen Zustände, die ein Nukleon in einem Volume V und einem Impulsintervall dp besetzen kann, ist gegeben durch:

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V \gamma$$

mit γ : Anzahl der Teilchen, die in einen Zustand passen. In unserem Fall sind dies 2 Neutronen und 2 Protonen pro Zustand, also gilt $\gamma = 4$.

Integriert man nun bis zum Fermi-Impuls, erhält man:

$$\rho = \frac{n}{V} = \frac{p_F^3 \gamma}{6\pi^2 \hbar^3} = \frac{1}{6\pi^2} k_F^3 \gamma$$

Daraus ergibt sich für die Anzahl der Neutronen N und der Anzahl der Protonen Z (γ ist hier jeweils 2):

$$N = \frac{2}{6\pi^2} k_{F,n}^3 \quad Z = \frac{2}{6\pi^2} k_{F,p}^3$$

Mit Elektronenstreuexperimenten kann man die (Anzahl-)Dichte der Nukleonen im Kern bestimmen und somit den Fermi-Wellenvektor bzw. den Fermi-Impuls und Fermi-Energie berechnen. Mit $\rho = 0,16 \text{fm}^{-3}$ folgt somit:

$$k_F = \sqrt[3]{\frac{3\pi^2}{2} \rho} = 1,35 \text{fm}^{-1}$$

$$p_F = \hbar k_F = 260 \frac{\text{MeV}}{c}$$

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = 37\text{MeV}$$

Nun kann man noch die Energiedichte berechnen:

$$\epsilon_{kin} = \frac{E}{V} = 4 \int_0^{p_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(\hbar\vec{k})^2}{2m} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} \varrho$$

wobei zur Integration $d^3k = k^2 dk \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi k^2 dk$

Nun lässt sich die kinetische Energie pro Nukleon berechnen:

$$\frac{E_{kin}}{A} = \frac{\epsilon_{kin}}{\varrho} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} \simeq 22\text{MeV}$$

Die gesamte kinetische Energie für Protonen und Neutronen beträgt:

$$E_{kin}(N, Z) = E_{n,kin} + E_{p,kin} = \frac{3}{5 \cdot 2m} (N p_{n,F}^2 + Z p_{p,F}^2)$$

Mit $N = V \varrho_n$, $Z = V \varrho_p$ und $k_F = \frac{p_F}{\hbar} = \sqrt[3]{\frac{6\pi^2}{2}} \varrho$ (γ ist hier jeweils 2) folgt daraus für die Gesamtenergie:

$$E_{kin} = \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2)^{3/2} V (\varrho_n^{5/3} + \varrho_p^{5/3})$$

Asymmetrieterm der Weizsäckerformel

Aus der Gesamtenergie für Protonen und Neutronen kann man nun den Asymmetrieterm der Weizsäckerformel herleiten. Dazu führt man den Asymmetrieparameter ein:

$$\alpha = \frac{N - Z}{A}$$

Die Nukleonendichte ausgedrückt durch den Asymmetrieparameter lautet somit

$$\varrho_n p = \frac{A}{2V} (1 \pm \alpha)$$

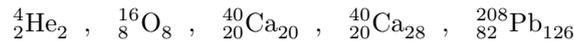
was man leicht durch einsetzen von α einsehen kann. Setzt man für $E_{kin}(\alpha)$ eine Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung an und benutzt $V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A$, so erhält man:

$$E_{kin}(\alpha(N, Z)) = \frac{3}{10m} \frac{\hbar^3}{r_0^2} \left(\frac{8}{9\pi}\right)^{-2/3} A \left(1 + \frac{5}{9}\alpha^2\right)$$

$$E_{kin}(\alpha(N, Z)) \propto \left(1 + \frac{5}{9}\alpha^2\right) = \underbrace{1}_{\text{Volumenterm}} + \underbrace{\frac{5}{9} \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2}_{\text{Asymmetrieterm}}$$

3.2 Schalenmodell

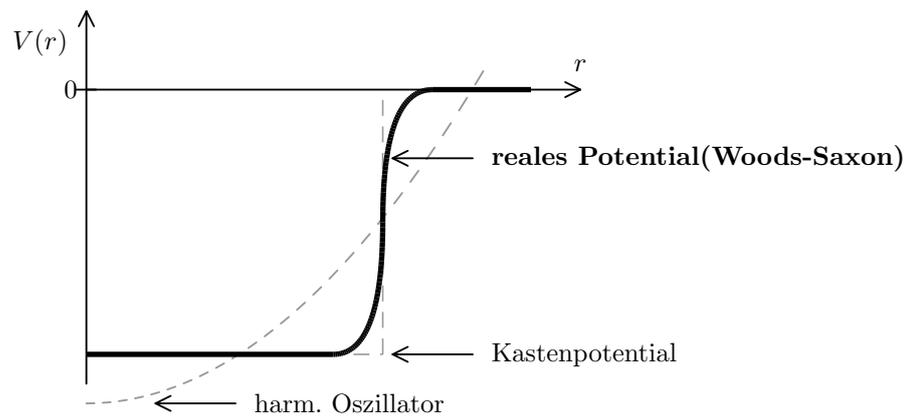
Experimentellen Befunden kann man entnehmen, dass Nuklide besonders stabil sind, wenn Z oder N folgende Werte annehmen: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 („**magische Zahlen**“). Kerne, bei denen N und Z magische Zahlen sind, sind besonders stabil und man bezeichnet sie als doppelt magische Kerne. Beispiele hierfür sind:



Um diese Zahlen zu erklären, stellt man sich - in Analogie zur Atomphysik - vor, dass sich die Nukleonen auf energetisch unterschiedlichen Schalen befinden. Diese kann man mit Hilfe der Quantenmechanik berechnen.

Man kann verschiedene Kernpotentiale annehmen:

- Rechteck
- Woods-Saxon: $W(r) = -W_0 \left(1 + e^{\frac{(r-R_0)}{a}} \right)$ mit W_0 : Potentialtiefe, R_0 : Kernradius, a : Dicke der Kernoberfläche
- Oszillatorpotential: $W(r) = \frac{m}{2} \omega_0^2 r^2 - W_0$



Oszillatorpotential

Für das Oszillatorpotential setzt man den Einteilchenhamiltonoperator an:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m}{2} \omega_0^2 r^2 - W_0$$

Die Lösungen dafür sind wohlbekannt:

$$\phi_{nlm}(r) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

R_{nl} : Laguerre-Polynome x Exponentialfunktion

Y_{lm} : Kugelflächenfunktionen

Die Eigenwerte zu diesen Lösungen lauten:

$$E_{nl} = \hbar \omega_0 \left(2(n-1) + l + \frac{3}{2} \right) = \hbar \omega_0 \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

wobei $N = 2(n - 1) + l$ die Hauptquantenzahl ist; $N = 0, 1, 2, \dots$; $l = 0, 1, 2, \dots$

$$n = 1, 2, 3, \dots, n_{max} \text{ mit } n_{max} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{Ngerade} \\ \frac{N-1}{2} & \text{Nungerade} \end{cases}$$

Dieses Modell erzeugt die magischen Zahlen, welche in Analogie zur Atomphysik immer bei abgeschlossenen Schalen zu finden sind: 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168

Das Oszillatormodell gibt also nur die unteren drei magischen Zahlen korrekt wieder. Um die oberen Zahlen korrekt darstellen zu können, benötigt man die Spin-Bahn-Wechselwirkung der Nukleonen.

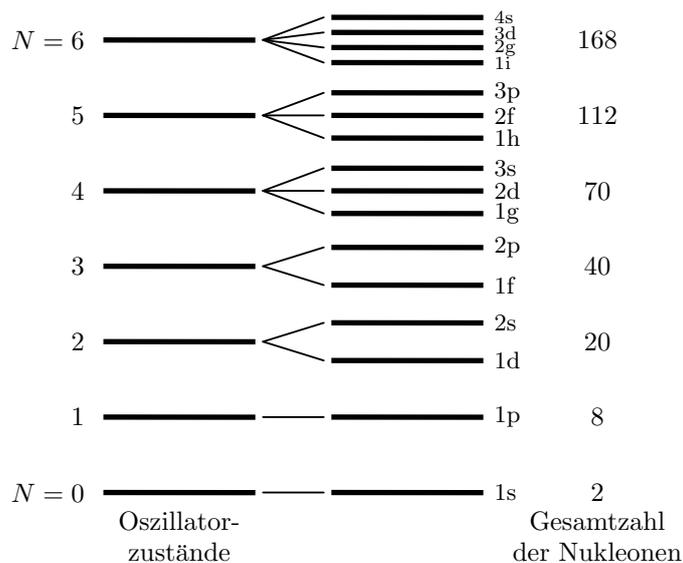


Abbildung 3.1: Oszillatorschalen. Links die Zustände des harmonischen Oszillators. Wenn die zufällige Entartung in jeder Oszillatorschale durch einen Wechsel der Potentialform aufgehoben wird, so erscheint das Niveaudiagramm rechts. Die Gesamtzahl der Nukleonen, die im Potential bis zur angegebenen Schale untergebracht werden können, ist ebenfalls angeschrieben.

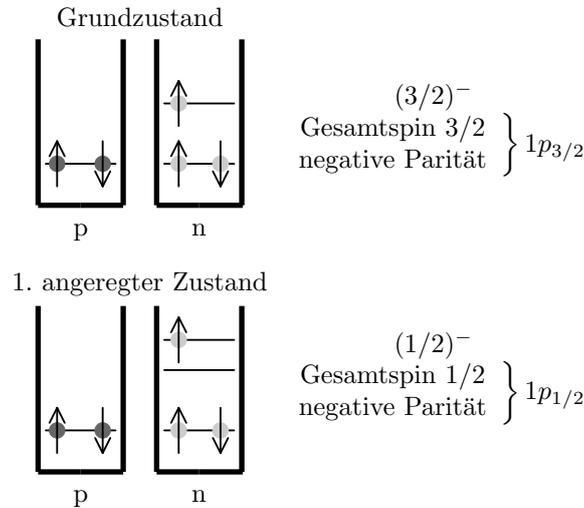
Die unteren Oszillatorschalen mit ihren jeweiligen Entartungsgraden und der maximalen Summe aller Zustände sind in folgender Tabelle angegeben:

N	Orbitale	Entartung	Σ - Zustände	magnetisch.
0	1s	2	2	ja
1	1p	6	8	ja
2	2s,1d	12	20	ja
3	2p, 1f	20	40	nein

Die zufällige Entartung des harmonischen Oszillatorpotentials wird durch Annahme realistischerer Potentiale aufgehoben.

Bisher wurde der Spin der Nukleonen nicht berücksichtigt, z. B.: Nukleon mit Orbital $1p$ kann Gesamtdrehimpuls $1/2$ oder $3/2$ haben. $1p_{1/2}$ ——— $1p_{3/2}$ sind bisher entartet.

Betrachten wir z.B. ${}^5\text{He}$:



Spin Bahn Term

Die Einführung der Spin-Bahn-Kopplung

$$V_{ls} = f(r) \vec{l} \cdot \vec{s}$$

führt zu einer Aufspaltung der bisher entarteten Niveaus. Die Spin-Bahn-Kopplung erhält man in dieser Form aus der Dirac-Gleichung. Es ist zu beachten, dass das Vorzeichen umgekehrt zur Atomphysik ist.

Der Spin \vec{s} eines Nukleons koppelt mit dem Drehimpuls \vec{l} zum Gesamtdrehimpuls \vec{j} , wobei $j = l \pm \frac{1}{2}$ ist. Die Kommutatorrelationen lauten:

$$\begin{aligned} [\vec{l}, \vec{s}^2] &= 0 & [\vec{l}, \vec{s}_z] &\neq 0 \\ [\vec{l}, \vec{l}^2] &= 0 & [\vec{l}, \vec{l}_z] &\neq 0 \\ [\vec{l}, \vec{j}^2] &= 0 & [\vec{l}, \vec{j}_z] &= 0 \end{aligned}$$

Somit sind die guten Quantenzahlen: n, l, j, m_j

Die Einteilchenwellenfunktionen zu diesem Hamiltonoperator lauten:

$$\Phi_{n,l,j,m_j}(\vec{r}, s) = R_{nl} \sum_{m_l m_s} C_{m_s m_l m_j}^{\frac{1}{2} \ l \ j} Y_{lm_j}(\theta, \phi)$$

mit C_{lmn}^{ijk} den Clebsch-Gordan Koeffizienten

Bei konstanten ortsunabhängigen $f(r)$, also $V_{ls} = c \vec{l} \cdot \vec{s}$, und der Beziehung

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2)$$

gilt:

$$V_{ls} |j, l, s\rangle = C \cdot \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) |j, l, s\rangle$$

weil $s = 1/2$ gilt: $j = l + 1/2$ oder $j = l - 1/2$

$$\Rightarrow \frac{V_{ls}}{c} |j, l, 1/2\rangle = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2} l |j, l, 1/2\rangle & \text{für } j = l + 1/2 \\ -\frac{\hbar^2}{2} (l+1) |j, l, 1/2\rangle & \text{für } j = l - 1/2 \end{cases}$$

Die Energieaufspaltung E_{ls} aufgrund der L-S-Kopplung ist somit proportional zu $2l+1$.

$$\begin{array}{c}
 \underline{j = l \pm 1/2} \quad \left\langle \begin{array}{l} \underline{l - 1/2} \\ \underline{l + 1/2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \updownarrow \\ \Delta E_{ls} \end{array}
 \end{array}$$

Zusammenfassung

- Jedes Niveau mit $j = l_{\max} + \frac{1}{2}$ wird stark nach unten verschoben.
- Es werden also effektiv Schalen gebildet, da ein Niveau mit Hauptquantenzahl N und $j_{\max} = l_{\max} + \frac{1}{2}$ in die Nähe der Niveaus rückt, die zum Hauptquantenniveau $N-1$ gehören. Diese Niveaus werden „Intruder-Niveaus“ genannt.
- Die magischen Zahlen aus dem Schalenmodell mit $\vec{l}\vec{s}$ -Kopplung stimmen mit den experimentellen Befunden überein.
- Die Stärke der Spin-Bahn-Kopplung liegt im MeV Bereich

Energieaufspaltung der Energieeigenwerte

In der folgenden Grafik sind links die Energieniveaus ohne, rechts mit Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung angegeben. Sehr gut zu sehen ist die Schalenbildung, welche durch das starke Herabsinken der Energieniveaus entsteht. Rechts ist der Entartungsgrad der jeweiligen Niveaus und die magischen Zahlen angegeben.

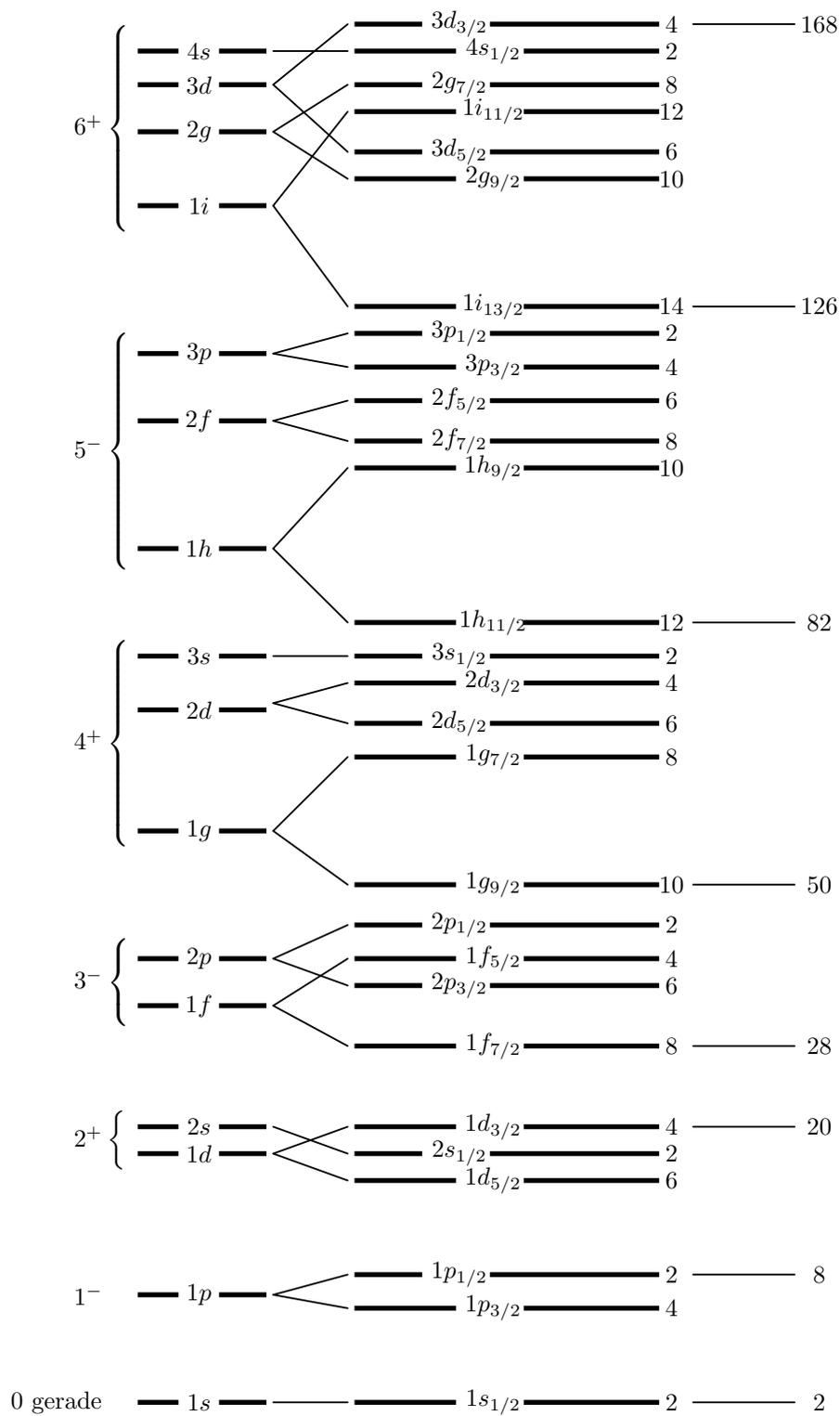


Abbildung 3.2: Energieaufspaltung der Energieeigenwerte

Kapitel 4

Elektromagnetische Wechselwirkung

4.1 Elektromagnetische Wechselwirkung von Dirac-Teilchen (e, μ , τ , ...)

Dirac-Teilchen

Dirac-Teilchen tragen die Masse m , eine Ladung e und werden durch den Spinor $\Psi(x)$ beschrieben. Sie haben außerdem den Spin $\frac{1}{2}$. Beispiele für Dirac-Teilchen sind Elektronen, Myonen, Taonen und Quarks.

Wir betrachten diese Teilchen in einem elektromagnetischen (em) Feld, welches durch das Vektorpotential $(A^\mu) = (A^0, \vec{A})$ mit $A^0 = \phi$ ausgedrückt wird.

Zunächst befinde sich das Dirac-Teilchen in einem klassischen äußeren em Feld.

Die freie Dirac-Gleichung lautet

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0.$$

Die Wechselwirkung fügen wir durch **minimale Substitution**¹ als

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu \quad \text{und} \quad i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu$$

ein. Durch einsetzen in die obige Dirac-Gleichung erhalten wir eine neue Dirac-Gleichung, die die Wechselwirkung von Ψ mit dem Potential A_μ und somit die em Wechselwirkung beinhaltet:

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu)\Psi - m\Psi = 0.$$

Mit $(\gamma^0)^2 = 1$ und $\gamma^0 \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$ erhalten wir mit

$$(i\delta_0 - eA_0)\Psi = \vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\Delta} - e\vec{A})\Psi + m\Psi$$

¹Die minimale Substitution funktioniert in vielen Bereichen der Physik wie in der klassischen Mechanik und Elektrodynamik, der nichtrelativistischen QM und QFT. Sie ist daher ein wichtiges Werkzeug und immer wieder zu gebrauchen.

die Dirac-Gleichung für ein äußeres em Feld.

Spezialfälle

Wir möchten nun kurz zwei Spezialfälle für die Dirac-Gleichung betrachten.

- (i) $\vec{A} = 0, A_0 = V(r)$ Statisches Zentralpotential
 Ein Beispiel für solch ein Potential ist das Coulomb-Potential eines H-Atoms. Dies liefert mit der Dirac-Gleichung ein (fast) richtiges H-Spektrum. Nicht enthalten in der Lösung ist der Lamb-Shift, welcher später in der QED diskutiert wird.
- (ii) $A_0 = 0, \vec{A} = \vec{A}(x)$ Statisches \vec{B} -Feld
 Aus dem nichtrelativistischen Limes der Dirac-Gleichung erhält man die Pauli-Gleichung. Der Limes bedeutet in Relationen ausgedrückt, dass $\frac{|\vec{p}|}{m} \ll 1$ und $|E - m| \ll m$ gilt.
 Der Spinor des Dirac-Teilchens ist dann gegeben durch $\Psi = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$.
 Einsetzen in die Dirac-Gleichung ergibt $\chi = \mathcal{O}(\frac{|\vec{p}|}{m})\varphi$, was also klein gegen φ ist. Durch eine Entwicklung nach $\frac{|\vec{p}|}{m}$ erhält man

$$i\partial_0\varphi = \left[\frac{1}{2m}(-i\Delta - e\vec{A})^2 - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\vec{B} \right]\varphi,$$

schließlich

$$\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\vec{B} = \frac{e}{2m} \cdot 2 \cdot \vec{S}\vec{B}$$

mit $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ mit dem Faktor 2, dem g-Faktor².

4.2 Quantisiertes em Feld (Photonfeld)

Die Feldgleichung für A^μ lautet

$$\square A^\mu = e j^\mu$$

Wir verwenden die Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$.

- (a) Zunächst betrachte man den Fall einer homogenen Wellengleichung, d.h. $j^\mu = 0$, also eines freien em Feldes mit $\square A^\mu = 0$.
 Das em Feld sei durch $(A^\mu) = (0, \vec{A})$ mit $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ („Strahlungseichung“) gegeben.
 Es gibt zwei Freiheitsgrade (transversale Welle), die der Polarisation entsprechen.
 Die Lösungen werden aus der Superposition von ebenen Wellen gewonnen.
 Diese ebenen Wellen werden ausgedrückt durch

$$\epsilon_\lambda^\mu(k) e^{-ikx}, \quad (k^\mu) = (k^0, \vec{k}), \quad \omega = k^0 = |\vec{k}|$$

mit

²Sonst empirisch ermittelt kommt der g-Faktor hier direkt aus der Dirac-Gleichung für Dirac-Teichen als 2 heraus. Man muss aber hinzufügen, dass experimentell ein Wert $g \neq 2$ vgl. $(\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} + \dots)$ gemessen wird. In der QED wird dies besprochen.

- ϵ_λ^μ : Polarisationsvektor
- $\lambda = 1, 2$: transversale lineare Polarisation
- $\lambda = \pm$: zirkulare Polarisation

Natürlich ist $\epsilon^\mu \cdot k = 0$. Dies spiegelt die Tatsache wieder, dass es sich bei em Wellen um transversale Wellen handelt. (Longitudinale Polarisation mit $\vec{\epsilon} \sim \vec{k}$ existiert nicht.)

Außerdem gilt

$$(\epsilon_\lambda^\mu) = (0, \vec{\epsilon}_\lambda), \quad \vec{\epsilon}^2 = 1, \quad \vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Bei linearer Polarisation ist $\vec{\epsilon}_1 \times \vec{\epsilon}_2 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$.

Allgemein ist

$$(\epsilon_\pm^\mu) = (0, \vec{\epsilon}_\pm) \quad \text{und} \quad \vec{\epsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_1 \pm i\vec{\epsilon}_2).$$

▷ Nun wird das em Feld als **Quantenfeld** betrachtet, welches **Photonfeld** genannt wird.

A^μ ist jetzt ein Feld-Operator, der auf dem Zustandsraum der Photonen - $|0\rangle$, $|\gamma, k\lambda\rangle$ - operiert. Hierbei ist k der Impuls, $\lambda = \pm(1)$ die Helizität.³ Die Fourierdarstellung des Feld-Operators sieht wie folgt aus:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2k^0} \sum_{\lambda=\pm} \left[a_\lambda(k) \epsilon_\lambda^\mu(k) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(k) \epsilon_\lambda^\mu(k)^* e^{ikx} \right]$$

mit $a_\lambda^\dagger(k)$ als Erzeuger und $a_\lambda(k)$ als Vernichter von Photonen mit Impuls k und Helizität λ .

Es gilt

$$a_\lambda^\dagger(k) |0\rangle = |\gamma, k\lambda\rangle,$$

$$a_\lambda(k) |\gamma, k'\lambda'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \cdot 2k^0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') |0\rangle.$$

a_λ und a_λ^\dagger erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen⁴.

(b) Nun sei $j^\mu \neq 0$, d.h. wir haben eine inhomogene Wellengleichung $\square A^\mu = ej^\mu$.

j^μ wird gebildet von Dirac-Teilchen (e, μ , τ). Für jede Sorte f gilt $j^\mu = \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$.

Die Lösung der Feldgleichung kann durch Greensche Funktionen gefunden werden.

Greensche Funktion: $D^{\mu\nu}(x-y)$

$D_{\mu\nu}$ erfüllt die DGL

$$\boxed{\square_{(x)} D^{\mu\nu}(x-y) = \delta^4(x-y) g^{\mu\nu}}$$

³ $\lambda = 0$ existiert nicht, da $m_\gamma = 0$ ist - oder klassisch gesprochen: transversal.

⁴Siehe bspw. harmonischer Oszillator QM I

mit $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.
 $A^\mu(x)$ ist $A^\mu(x) = \int d^4y D^{\mu\nu}(x-y) e j_\nu(y)$.
 Mit einem Fourier-Ansatz

$$D^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \underbrace{D^{\mu\nu}(Q)}_{\text{FT}^5} e^{-iQ(x-y)}$$

und der Relation

$$\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} e^{-iQ(x-y)}$$

erhält man nach Einsetzen die algebraische Gleichung

$$-Q^2 D^{\mu\nu}(Q) = g^{\mu\nu}$$

und schließlich die Lösung

$$D^{\mu\nu}(Q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{Q^2 + i\epsilon}$$

mit $\epsilon > 0$.

Dies ist die kausale Green-Funktion, der „Feynman-Propagator“.

Kausal:

$$iD^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|T A^\mu(x) A^\nu(y)|0\rangle$$

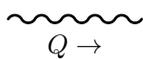
T ist hier die Zeitordnung: $A^\mu(x)A^\nu(y)$ steht für $x^0 > y^0$ (umgekehrt sonst).

$D^{\mu\nu}(x-y)$ beschreibt die Ausbreitung eines Photons $\left\{ \begin{array}{ll} \text{von } y \rightarrow x & \text{für } y^0 < x^0 \\ \text{von } x \rightarrow y & \text{für } x^0 < y^0 \end{array} \right.$

$A^\mu(x)$ wird erzeugt durch den Strom $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = j^\mu$.

BILD



Folgendes graphisches Symbol wird im Impulsraum verwendet. 

4.3 Übergangsmatrixelemente, Feynman-Regeln

Jetzt betrachten wir den Übergang vom Anfangszustand $|i\rangle$ in den Endzustand $|f\rangle$ durch eine Wechselwirkung.

$$|i\rangle \xrightarrow{\text{emWW}} |f\rangle$$

Beide Vektoren sind Zustände von freien Teilchen.

Wir behandeln die zeitabhängige Störungstheorie im WW-Bild. Die Zeitentwicklung wird durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben:

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{freies Syst.}} + \underbrace{H_{int}}_{\text{WW}}$$

⁵Fouriertransformierte, ausgedrückt durch verändertes Argument (Q)

mit

$$H_0 = H_0^{(e,\mu,\tau)} + H_0^{\text{em}}, \quad H_0^{\text{em}} = \int d^3x (\vec{E}_\perp^2 + \vec{B}^2)$$

Hier ist \vec{E}_\perp das transversale freie Strahlungsfeld.

$$H_{int}^{\text{em}} = e \int d^3x \overbrace{j^\mu(x) A_\mu(x)}^{\rho\phi - \vec{j} \cdot \vec{A}} = e \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \equiv \int d^3x \mathcal{H}_{int}(x)$$

mit $\mathcal{H}_{int}(x)$: Hamilton-Dichte und

H_{int} : Hamilton-Operator der elektromagnetischen WW.

$$\boxed{H_{int} = \int d^3x \mathcal{H}_{int}(x), \quad \mathcal{H}_{int} = e j^\mu A_\mu}$$

WW-Bild, Zeitabhängige Störungstheorie

Im WW-Bild symbolisieren die Operatoren die Dynamik von H_0 , die Zustände die Dynamik von H_{int} .

Die Zeitentwicklung eines Zustandes $|\Psi\rangle$ ist gegeben durch:

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$$

mit $i \frac{\partial U}{\partial t} = H_{int} U$ und $U(t, t_0) = 1$

Durch Integrieren nach der Zeit von t_0 an bis t erhält man eine formale Lösung in Form einer Integralgleichung:

$$U(t, t_0) - 1 = -i \int_{t_0}^t dt' H_{int}(t') U(t', t_0)$$

Die ersten beiden iterativen Lösungen lauten:

$$U^{(0)}(t, t_0) = 1$$

$$\boxed{U^{(1)}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_{int}(t') \overbrace{U^{(0)}(t', t_0)}^1} \quad \text{1.Näherung}$$

Der Zeitentwicklungsoperator, $U(t, t_0)$, ist durch den Dichteoperator gegeben durch:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt H_{int}(t') = 1 - i \int_{t_0}^t dt \int d^3x \mathcal{H}_{int}(x)$$

Wir lassen nun Anfangs- und Endzustand zeitlich sehr weit auseinander liegen:

$|i\rangle$ Anfangszustand, zur Zeit $t_0 \rightarrow -\infty$

$|f\rangle$ Endzustand, zur Zeit $t \rightarrow +\infty$

Um die Übergangswahrscheinlichkeit zu berechnen, benötigen wir das S-Matrixelement

$$\mathcal{S}_{fi} = \langle f | S | i \rangle$$

wobei der S-Operator gegeben ist durch

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} U(t, t_0) = 1 - i \int d^4x \mathcal{H}_{int}(x)$$

Somit ist $|\mathcal{S}_{fi}|^2 \sim$ Wahrscheinlichkeit für Übergang $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$. Für $|f\rangle \neq |i\rangle$ (sonst trivial) gilt somit:

$$\mathcal{S}_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f | H_{int}(t) | i \rangle$$

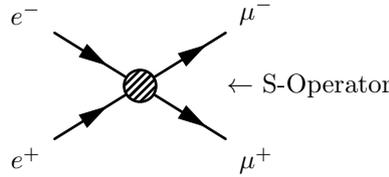
$$\boxed{\mathcal{S}_{fi} = -i \int d^4x \langle f | \mathcal{H}_{int}(x) | i \rangle}$$

Beispiel: $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$
 Üblicherweise sind $|i\rangle, |f\rangle$ Zustände von freien Teilchen, z. B.

$$|i\rangle = |e^-, p\sigma_1\rangle |e^+, q\sigma_2\rangle \quad e^+ e^- \text{-Kollision}$$

$$|f\rangle = |\mu^-, p'\sigma'_1\rangle |\mu^+, q'\sigma'_2\rangle \quad \mu^+ \mu^- \text{-Erzeugung}$$

$$\boxed{\mu\text{-Paarerzeugung: } \langle \mu^+, \mu^- | S | e^+, e^- \rangle}$$



Die dazugehörigen Ströme lauten:

$$e \text{ - Strom : } \bar{\psi}_{(e)} \gamma^\mu \psi_{(e)} \quad , \quad \psi_{(e)} \equiv \psi \quad e^\pm \text{ - Feld}$$

$$\mu \text{ - Strom : } \bar{\psi}_{(\mu)} \gamma^\mu \psi_{(\mu)} \quad , \quad \psi_{(\mu)} \equiv \Psi \quad \mu^\pm \text{ - Feld}$$

Die Darstellung der Feldoperatoren lauten:

$$\psi = \dots \sum_{\sigma} \int \frac{d^3k}{2k^0} (c_{\sigma}(k) u_{\sigma}(k) e^{-ikx} + d_{\sigma}^{\dagger}(k) v_{\sigma}(k) e^{ikx})$$

$$\bar{\psi} = \dots \sum_{\sigma} \int \frac{d^3k}{2k^0} (c_{\sigma}^{\dagger}(k) \bar{u}_{\sigma}(k) e^{ikx} + d_{\sigma}(k) \bar{v}_{\sigma}(k) e^{-ikx})$$

\mathcal{S}_{fi} lautet für dieses Beispiel:

$$\mathcal{S}_{fi} = -ie \int d^4x \langle f | j_{(\mu)}^{\mu}(x) A_{\mu}(x) | i \rangle$$

mit $j_{(\mu)}^{\mu} = \bar{\psi}_{(\mu)}(x) \gamma^{\mu} \psi_{(\mu)}(x)$, dem μ -Strom. $A_{\mu}(x)$ ist Photonfeld, das vom e -Strom $j_{(e)}^{\mu}$ erzeugt wird, daher mit (A):

$$A_{\mu}(x) = e \int d^4y D_{\mu\nu}(x-y) \bar{\psi}_{(e)}(y) \gamma^{\nu} \psi_{(e)}(y)$$

In Störungstheorie sind $\psi_{(e)}, \bar{\psi}_{(e)}, \psi_{(\mu)}, \bar{\psi}_{(\mu)}$ freie Felder, mit Spinoren (Bezeichnung)

$$\begin{array}{ll} \text{u, v} & \text{für } \psi_{(e)} \quad (e^-, e^+ \text{-Spinoren}) \\ \text{U, V} & \text{für } \psi_{(\mu)} \quad (\mu^-, \mu^+ \text{-Spinoren}) \end{array}$$

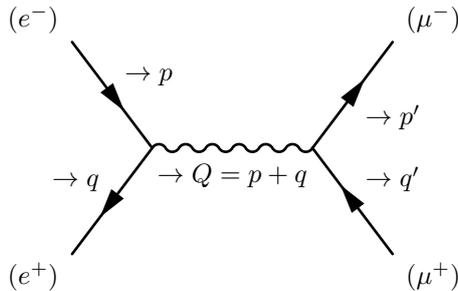
$A_\mu(x)$ eingesetzt in \mathcal{S}_{fi} liefert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{fi} &= \underbrace{\langle \mu^- \mu^+ | 1 | e^- e^+ \rangle}_{=0} - ie \int_-^\infty d^4x \langle \mu^- \mu^+ | \underbrace{j_{(\mu)}^\mu(x)}_{\bar{\psi}_{(\mu)} \gamma^\mu \psi_{(\mu)}(x)} A_\mu(x) | e^- e^+ \rangle \\
&= -ie^2 \int d^4x \int d^4y \langle f | \bar{\psi}_{(\mu)}(x) \gamma^\mu \psi_{(\mu)}(x) \underbrace{D_{\mu\nu}(x-y)}_{= \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} e^{-iQ(x-y)} \frac{(-g_{\mu\nu})}{Q^2+i\epsilon}} \bar{\psi}_{(e)}(y) \gamma^\nu \psi_{(e)}(y) \rangle = \\
&= -ie^2 \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \int d^4x \int d^4y e^{-iQ(x-y)} \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{Q^2+i\epsilon} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \langle \mu^-(p'), \mu^+(q^*) | \bar{\psi}_{(\mu)}(x) \gamma^\mu \psi_{(\mu)}(x) \bar{\psi}_{(e)}(y) \gamma^\nu \psi_{(e)}(y) | e^-(p), e^+(q) \rangle = \\
&= -ie^2 \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{Q^2+i\epsilon} \right) e^{-iQ(x-y)} e^{ip'x} e^{iq'x} e^{-ipy} e^{-iqy} \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^4 \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{\langle 0 | \bar{U}(p') \gamma^\mu V(q') \cdot \bar{v}(q) \gamma^\nu u(p) | 0 \rangle}_{\substack{\bar{U}(p') \gamma^\mu V(q') \cdot \bar{v}(q) \gamma^\nu u(p) \\ =1}} = \\
&= -ie^2 \bar{U}(p') \gamma^\mu V(q') \cdot \bar{v}(q) \gamma^\nu u(p) \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^4 \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{\int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{Q^2+i\epsilon} \right) \int d^4x e^{i(p'+q'-Q)x} \int d^4y e^{-i(p+q-Q)y}}_{= -\frac{g_{\mu\nu}}{(p+q)^2+i\epsilon} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p+q-p'-q')} =
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p+q-p'-q') \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^4 \cdot \mathcal{M}_{fi}}$$

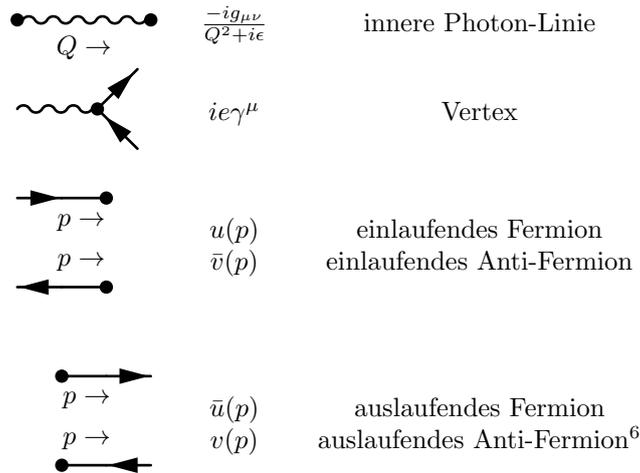
$$\boxed{\mathcal{M}_{fi} = \bar{U}(p') (ie) \gamma^\mu V(q') \frac{(-ig_{\mu\nu})}{(p+q)^2+i\epsilon} \bar{v}(q) (ie) \gamma^\nu u(p)}$$

Die Berechnung lässt sich vollkommen analog mit anderen Fermionenkonfigurationen durchführen. Die \mathcal{M}_{fi} lassen sich graphisch durch die sog. Feynman-Graphen darstellen:



Beachte: $Q^2 = (p + q)^2 = (p^0 + q^0)^2 = E_{CMS}^2 > (2m_\mu)^2$, daher ist $i\epsilon$ unnötig.
 Dieses Beispiel zeigt, wie man \mathcal{M}_{fi} aus graphischen Elementen erhält, die man nach den folgenden Regeln anwendet.

Feynman-Regeln:



Beachte: Die innere Linie ist virtuell ($Q^2 \neq 0$), die äußeren Linien sind reelle Teilchen (physikalische Teilchen, on-shell)

Berechnung von \mathcal{M}_{fi}

- Zeichne alle verbundenen Graphen für einen Prozess, verbunden durch Vertices und Propagatoren
- Zuordnung der analytischen Ausdrücke gemäß Feynman-Regeln
 beachte: Anordnung der Spinoren entgegen der Pfeilrichtung
- Impulserhaltung an jedem Vertex (4-Impuls)
- Graphen summieren
 beachte: (-)-Zeichen bei Vertauschung von zwei Fermion-Linien

Mit dem Ergebnis kann man dann die Übergangswahrscheinlichkeit \mathcal{S}_{fi} berechnen:

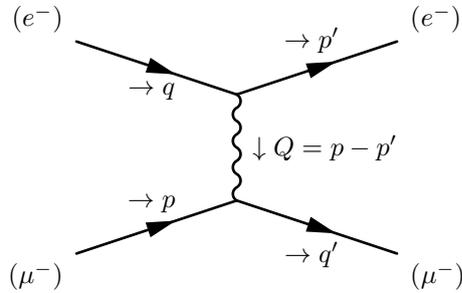
$$\mathcal{S}_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \mathcal{M}_{fi} \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^{n_i+n_f}$$

dabei bedeuten: n_i Zahl der Teilchen in $|i\rangle$
 n_f Zahl der Teilchen in $|f\rangle$
 p_i Gesamtimpuls in $|i\rangle$
 p_f Gesamtimpuls in $|f\rangle$

⁶Bemerkung: Die Spinoren werden entgegen der Pfeilrichtung angeordnet

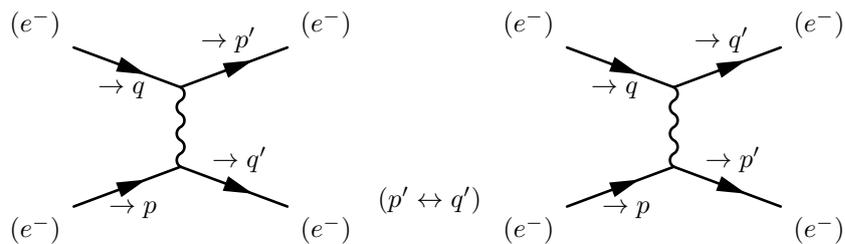
Beispiele:

1. $e^- \mu^-$ -Streuung



$$ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p-p')^2} \right) ie\bar{U}(q')\gamma^\nu U(q)$$

2. $e^- e^+$ -Streuung (Möller-Streuung)



Verallgemeinerung auf Quarks

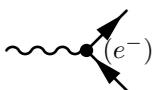
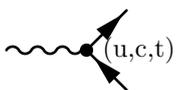
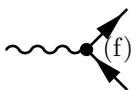
Die Feynman-Graphen lassen sich auch auf Quarks verallgemeinern, da diese genauso fundamentale Fermionen wie e, μ, τ sind. u,c,t - Quarks haben die Ladung $2/3$, d,s,b - Quarks die Ladung $-1/3$.

Bisher war e die Ladung des e^- . Ab jetzt gilt:

$$e > 0, \quad e = \sqrt{4\pi\alpha}$$

Damit folgt für die Ladungen:

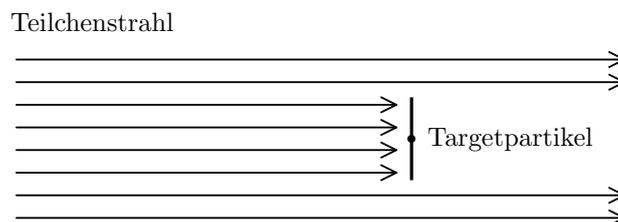
Ladung des e^- :	$Q_e e, Q_e = -1$
Ladung von u,c,t:	$Q_{uct} = +\frac{2}{3}$
Ladung von d,s,b:	$Q_{dsb} = -\frac{1}{3}$
e^\pm -Strom:	$Q_e e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
Quark-Strom:	$Q_u e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, Q_d e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \dots$

Vertices:		$ieQ_e\gamma^\mu$
		$ieQ_{uct}\gamma^\mu$
		$ieQ_{dsb}\gamma^\mu$
Allgemein:		$ieQ_f\gamma^\mu$ f=e,μ,τ,q

Kapitel 5

Wechselwirkung von Teilchen und EM-Strahlung mit Materie

5.1 Wirkungsquerschnitt



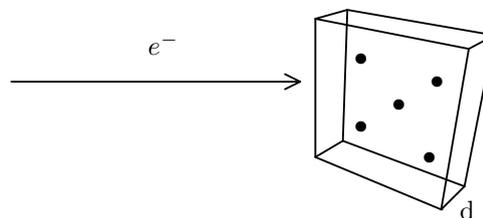
Definiton:

Jedem Partikel wird eine Fläche σ als gedachte Zielscheibe zugeordnet. Deren Größe wird so gewählt, dass die Reaktion stattfindet, wenn das einfallende Teilchen diese Zielscheibe trifft.

Diese Zielscheibe ist der wirksame Querschnitt eines Targetpartikels $\sigma[\text{cm}^2]$

Einheit: 1 barn $\approx 10^{-24}\text{cm}^2$

Beispiel:



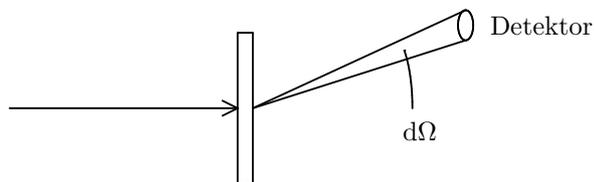
N_Z : Zahl der Targetpartikel

A: Fläche

$$R = \dot{N}_Q = \dot{N} \frac{N_Z}{A} \sigma$$

Man definiert den **totalen Wirkungsquerschnitt**:

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der Reaktionen pro Zeit [1/s]}}{\text{Strahlteilchen pro Zeit [1/s] x Streuzentren pro Fläche [1/cm^2]}}$$



$$\frac{dR(\Omega)}{d\Omega} = \dot{N} \frac{N_Z}{A} \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Der **differentielle Wirkungsquerschnitt** ist definiert durch:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der Reaktionen pro Zeit}}{\text{pro Raumwinkel x Strahlteilchen pro Zeit x Streuzentren pro Fläche}}$$

Es gilt: $\int_{\Omega} \frac{dR}{d\Omega} d\Omega = R$ und $\int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \sigma$

5.2 Grundlegende Prozesse

Materie (Gas, Flüssigkeit, Festkörper) ist charakterisiert durch ihre Dichte ρ , Massenzahl A , Ordnungszahl Z , usw.¹

Einfallende Teilchen „spüren“ die Bausteine der Materie (Kerne (oder Nukleonen) und Elektronen) und treten mit ihr in Wechselwirkung. Die WW zwischen Teilchen und Materie ist meist von elektromagnetischer und starker Natur.²

			Materie	
			ρ, A, Z	Reichweite bei $E \simeq \text{Mev}$
geladene Teilchen	p	→		$\mu\text{m} - \text{mm}$ $10^{-6}\text{m} - 10^{-3}\text{m}$
	e^{\pm}	→		
	μ^{\pm}	→		
	π^{\pm}	→		
	α	→		
neutrale Teilchen	γ	→		$\sim 10 \text{ cm}$
	u	→		
	ν	→		10^{17} m

5.3 Wechselwirkung von Photonen mit Materie

(hier: $E_{\gamma} \gtrsim \text{keV}$)

¹Internet-Seite der particle data group: pdg.lbl.gov

²Die Neutrino WW ist von schwacher Natur

5.3.1 Photoeffekt

B_e : Bindungsenergie Wenn $E_\gamma > B_e$ ist, wird ein Elektron mit der kinetischen Energie

$$T_e = E_\gamma - B_e$$

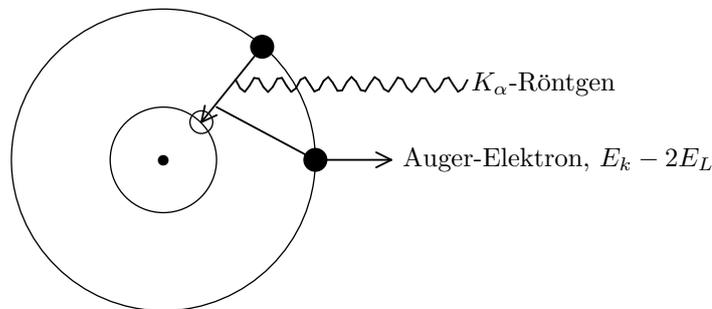
emittiert. Ein freies Elektron kann wegen Impuls- und Energieerhaltung die Photonenenergie nicht vollständig aufnehmen. Bei Atomelektronen ist dies möglich, da der restliche Impuls vom Atomkern als Rückstoß aufgenommen werden kann.

Bild5

Die theoretische Berechnung des WQ erfolgt in der QED:³

$$\sigma = \sigma_{th} 4\sqrt{2}\alpha^4 Z^5 \epsilon_\gamma^{-\frac{7}{2}}$$

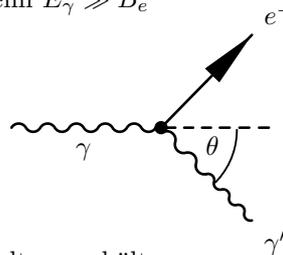
mit $\sigma_{th} = \frac{8}{3}\pi r_0^2$; $r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2}$: klassischer Elektronenradius ; $\epsilon_\gamma = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$: „reduzierte“ γ -Energie



5.3.2 Streuung

(hier: inkohärente Streuung)

Der Compton-Effekt beschreibt die elastische Streuung eines Photons an einem freien Elektron. Die inelastische Streuung an Atomelektronen kann als Compton-Effekt behandelt werden, wenn $E_\gamma \gg B_e$



mit Energie- und Impulserhaltung erhält man:

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)}$$

Somit gilt für die kinetische Energie des Elektrons:

$$T_{e^-} = E_\gamma - E_{\gamma'}$$

³Berechnung mit Hilfe der Dirac-Gleichung eines gebundenen Elektrons (+Abschirmung der Kernladung); Literatur: Heitler, Quantumtheory of radiation

Die maximale Energie des Elektrons (bei Rückstoß) beträgt:

$$E_{e^-,max} = E_\gamma - E_\gamma(\theta - \pi) = \frac{2E_\gamma^2}{2E_\gamma + m_0c^2}$$

Der Wirkungsquerschnitt wird in der QED mit der sog. „Klein-Nishima-Gleichung“ gelöst:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2[1 + \gamma(1 - \cos\theta)]^2} \left(1 + \cos^2\theta + \frac{\gamma^2(1 - \cos\theta)}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)} \right)$$

mit $\gamma = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$, $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \simeq 2,8\text{fm} = 2,8 \cdot 10^{-15}\text{m}$

Der Differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion der kinetischen Energie des Elektrons ist:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi r_e^2}{m_e c^2 \gamma^2} \left[2 + \frac{s^2}{\gamma^2(1-s)^2} + \frac{s}{1-s} \left(s - \frac{2}{\gamma} \right) \right]$$

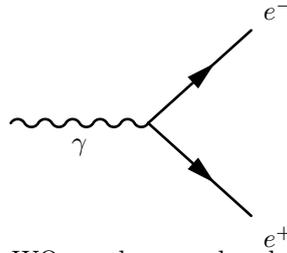
mit $s = \frac{T}{E_\gamma}$; $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ hat sein Maximum bei $T_{e^-,max}$

Bild7

5.3.3 Paarerzeugung

Bedingung: $E_\gamma > 2m_e c^2 \approx 1,02\text{MeV}$

Somit dominiert bei großen Energien die Paarerzeugung. Die Paarerzeugung ist nur in Gegenwart eines Stoßpartners möglich, da in dem System Photon-Teilchenpaar die Erhaltungssätze für Energie und Impuls nicht gleichzeitig erfüllt werden können.



für hohe Energien kann der WQ gegeben werden durch:

$$\sigma_{\text{Paar}} \simeq (4\alpha r_e^2) Z^2 \frac{7}{9} \ln \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}}$$

5.3.4 Kernphotoeffekt

Der Kernphotoeffekt ist selten im Vergleich mit anderen Photoreaktionen. Bei diesem Prozess werden Photonen vom Kern absorbiert und Neutronen (Photonen) emittiert, (γ, n)-Prozess. Die Energie (Frequenz), bei der dieser Prozess stattfindet, nennt man Riesenresonanz und liegt bei ungefähr 20 MeV.

Strahlungslänge x_0

$$\frac{1}{x_0} \simeq 4\alpha \frac{\rho N_A}{A} Z^2 r_e \ln \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}}$$

ρ : Dichte

N_A : Avogadrozahl

A : Massenzahl

Mit obiger Definition ist die Wahrscheinlichkeit P , dass ein Photon ein e^+e^- -Paar in der Strahlungslänge x_0 erzeugt, gegeben durch:

$$P = \sigma_{\text{Paar}} \left(\frac{\rho N_A}{A} \right) x_0 = \frac{7}{9}$$

Die mittlere freie Weglänge eines Photons (mit hoher Energie) beträgt demnach:

$$\lambda_{\text{Paar}} = \frac{7}{9} x_0$$

x_0 : mittlere Entfernung (λ), in der eine Elektron $\frac{1}{e}$ seiner Energie über Bremsstrahlung verliert.

Experimentelle Resultate werden durch folgende Beziehung gut gefittet:

$$x_0 \simeq \frac{716,4 \text{gcm}^{-2} \cdot A}{Z(Z+1)} \ln \frac{287}{\sqrt{Z}}$$

Beispiele:

- H_2O : $\frac{x_0}{\rho} = \frac{36,08}{1} \text{cm} = 36,08 \text{cm}$
- Al : $\frac{x_0}{\rho} = \frac{24,01}{2,99} \text{cm} = 8,9 \text{cm}$
- Fe : $\frac{x_0}{\rho} = \frac{13,84}{7,87} \text{cm} = 1,76 \text{cm}$
- Pb : $\frac{x_0}{\rho} = \frac{6,37}{11,35} \text{cm} = 0,56 \text{cm}$

5.3.5 Abschwächlänge bzw. Abschwächungskoeffizient

$$\sigma_{\text{total}} = \sigma_{\text{photo}} + \sigma_{\text{compton}} + \sigma_{\text{paar}}(+\dots) \quad [\text{cm}^2]$$

Die Wahrscheinlichkeit für (irgend)eine Reaktion eines Photons in der Absorberschicht der Dicke dx ist gegeben durch:

$$P_{\text{total}} = \sigma_{\text{total}} [\text{cm}^2] \cdot N [\text{cm}^{-3}] \cdot dx [\text{cm}]$$

mit N : Anzahldichte der absorbierenden Teilchen (Streuzentren)

Daraus folgt eine DGL für die γ -Intensität:

$$-dI(x) = I(x) \cdot P_{\text{total}} = I(x) \sigma_{\text{tot}} N dx$$

$$\Rightarrow I(x) = I_0 \cdot e^{-\sigma \cdot N \cdot x} = I_0 e^{-\frac{x}{\lambda_{\text{abs}}}} = I_0 e^{-\mu x}$$

mit $\mu := \sigma_{\text{tot}} \cdot N = \sigma_{\text{tot}} \left(\frac{\rho N_A}{A} \right) \quad [\text{cm}^{-1}]$

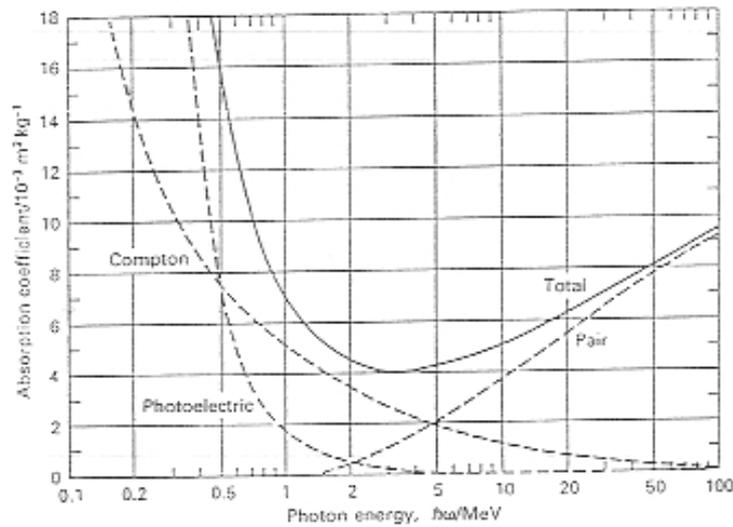
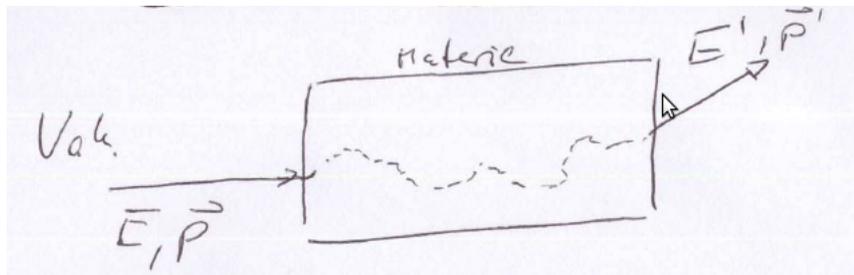


Abbildung 5.1: The total mass absorption coefficient for high energy photons in lead, indicating the contributions associated with the photoelectric absorption, Compton scattering and electron-positron pair production. (From H. A. Enge (1966). Introduction to nuclear physics, page 193, London: Addison-Wesley Publishing Co.)

5.4 Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie



Eintrittsenergie: E
 Austrittsenergie: E'
 Eintrittsimpuls: \vec{p}
 Austrittsimpuls: \vec{p}'
 $\Delta E = E - E'$ $\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}'$ („Ablenkung“)

Anders als bei Photonen tragen viele Kollisionen zwischen Teilchen und Materie zum Energieverlust bei. Man spricht von **statistischen** Effekten (bei Photonen: **stochastische** Effekte)

Die grundlegenden Prozesse können folgendermaßen klassifiziert werden:

1. inelastischer Stoß mit atomaren Elektronen (d.h. Ionisation bzw. Anregung)

W_i oder I : notwendige Energie um ein Elektron-Ion Paar zu erzeugen
 Bsp.: Die Austrittsarbeit von Argon ist $W_i \simeq 25\text{eV}$. Beträgt der gesamte Energieverlust $\Delta E \sim 1\text{MeV}$, so wurden ca. 40.000 freie Elektronen erzeugt.

2. δ -rays
 stochastisch kann ein großer Energie- und Impulsübertrag stattfinden („hard knock-on“)
3. elastische Streuung an Kernen (d.h. keine innere Anregung)
4. Strahlungsemission (Cherenkov-Strahlung)
5. inelastische Kernprozesse
 Aufbrechen des Kerns mit Produktion von Teilchen
6. Bremsstrahlung

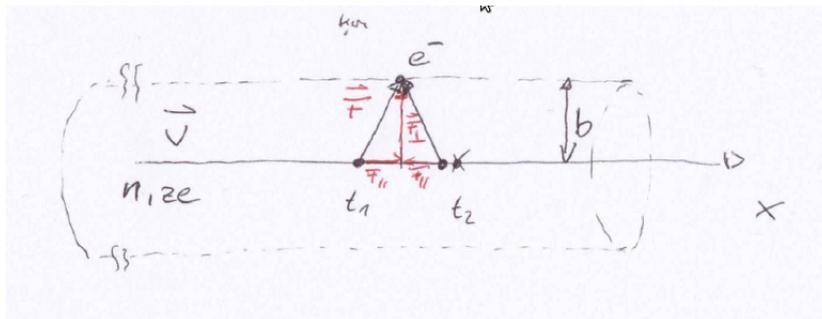
5.5 Energieverlust schwerer geladener Teilchen

Energieverlust pro Wegstrecke: $\frac{dE}{dx}$

Stoppingpower $\equiv S = -\frac{dE}{dx}$

5.5.1 Bohr's klassische Beschreibung des Energieverlusts schwerer Teilchen ($m \gg m_e$)

- Annahmen:
- „freie Elektronen“
 - in Ruhe (zu Beginn): „statisches Bild“
 - E-Feld der Anfangskonfiguration



$$\Delta p = \int F dt = \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = e \int E_{\perp} \frac{dx}{v}$$

Lösung des Integrals mittels Gauschen Satzes:

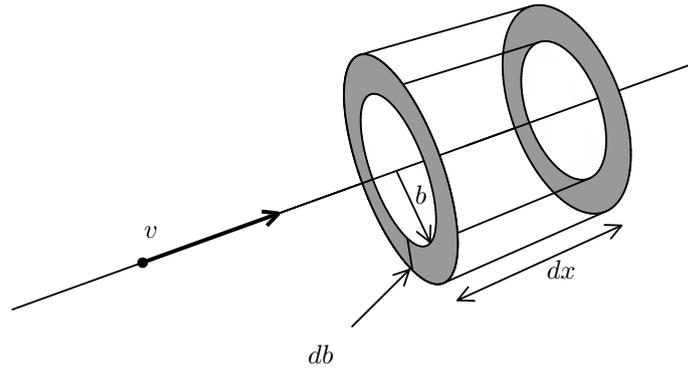
$$\begin{aligned} \int_A \vec{E} d\vec{A} &= \int E_{\perp} 2\pi b dx = 2\pi b \int E_{\perp} dx = 4\pi z e \\ \Rightarrow \int E_{\perp} dx &= \frac{2ze}{b} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{2ze^2}{bv}$$

Der Energieübertrag auf das Elektron beträgt damit:

$$\Delta E(b) = \frac{\Delta p^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{m_e v^2 b^2}$$

Der Energieverlust an Elektronen mit der Elektronendichte N_e zwischen b und $b+db$ beträgt:



$$\begin{aligned} -dE(b) &= \Delta E(b) N_e dV = \underbrace{N_e \cdot 2\pi b \cdot db \, dx}_{\text{Zahl der } e^- \text{ im Volumenelement}} \cdot \frac{2z^2e^4}{b^2v^2m_e} \\ &= \frac{4\pi z^2e^4}{m_e v^2} N_e \frac{db}{b} dx \end{aligned}$$

Um $\frac{dE}{dx}$ zu berechnen, darf man nicht von $b = 0$ bis $b = \infty$ integrieren, da dies den Annahmen widersprechen würde:

- Die Wechselwirkung für große b findet nicht in kurzer Zeit statt
- für $b = 0$ wäre der Energieübertrag unendlich groß

Man integriert also von b_{min} bis b_{max} :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2e^4 N_e}{v^2 m_e} \cdot \ln\left(\frac{b_{min}}{b_{max}}\right)$$

Nun müssen wir noch die Werte für b_{min} und b_{max} abschätzen:

- b_{min} : klassisch ist der maximale Energieübertrag auf ein Elektron bei head-on Kollision:

$$\frac{m_e(2v)^2}{2}$$

bzw. relativistisch:

$$2m_e\gamma^2v^2 \quad \text{mit } \gamma = (1 - \beta)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und } \beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{2z^2e^4}{m_e v^2 b_{min}} = 2m_e\gamma^2v^2$$

$$\Rightarrow b_{min} = \frac{ze^2}{m_e\gamma v^2}$$

- b_{max} : Elektronen sind (doch nicht) frei, sondern am Atom gebunden. Damit das Elektron absorbiert werden kann, muss die Zeit kurz sein im Vergleich zur Umlaufdauer des Elektrons:

$$\tau = \frac{1}{\nu} \quad \text{mit } \nu: \text{ Umlauffrequenz}$$

typische Kollisionszeit: $t = \frac{b}{v}$

relativistisch: $t \rightarrow \frac{t}{\gamma} = \frac{b}{\gamma v}$

$$\frac{t}{\gamma} \leq \tau \Rightarrow \frac{b}{\gamma v} \leq \tau = \frac{1}{\nu}$$

$$\Rightarrow b_{max} = \frac{\gamma v}{\bar{\nu}} \quad \text{mit } \bar{\nu}: \text{ mittlere Umlauffrequenz}$$

Somit folgt für den Energieverlust:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^3}{m_e v^2} N_e \ln \frac{m_e \gamma^2 v^3}{2e^2 \bar{\nu}}$$

Die Bohr'sche klassische Formel gibt eine gute Beschreibung für α -Teilchen und schwere Ionen, für Protonen jedoch nicht. Die Formel enthält allerdings trotzdem alle wesentlichen Eigenschaften!

5.5.2 Bethe-Bloch-Gleichung

Die quantenmechanische Beschreibung des Energieverlusts eines Teilchens der Ladung ze in einem Materialstück der Dicke dx liefert die Bethe-Bloch-Gleichung (gültig für $\beta\gamma > 0,01$):

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

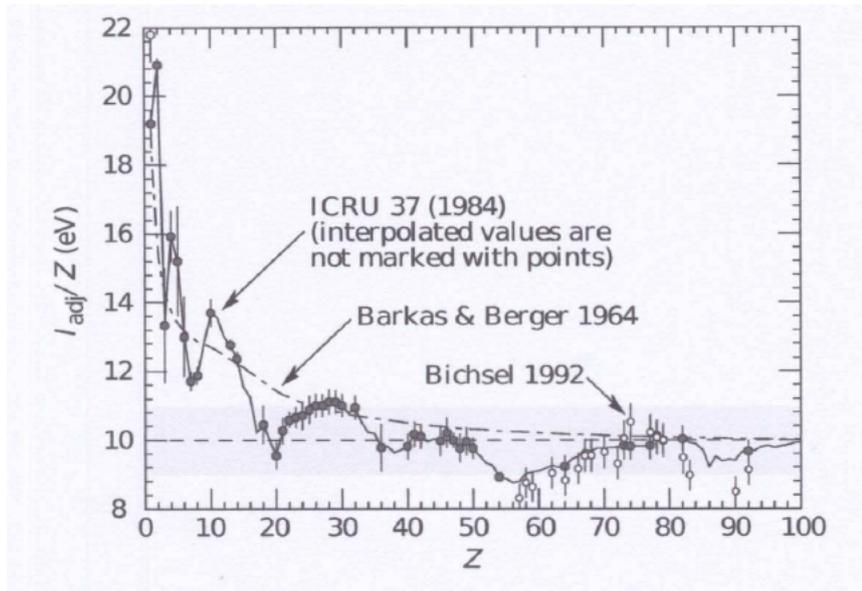
- $2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 = 0,1535 \text{ MeV } \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$
- r_e : klassischer Elektronenradius $2,817 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
- m_e : Elektronenmasse
- N_a : Avogadrozahl
- I : mittlere Anregungsenergie des absorbierenden Materials
- Z, A, ρ : Ordnungszahl, Massenzahl, Dichte des absorbierenden Materials
- z : Ladungszahl des Projektils (Teilchens)
- $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}^{-1}$
- δ : Dichte Korrektur: Das Projektil polarisiert Medium längs seines Weges. E-Feld für das entfernte Elektron wird abgschirmt
- $W_{max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$

NB: Der Energieverlust hängt von der Geschwindigkeit und Ladung des Teilchens ab, aber nicht von der Masse.

$I \approx h\bar{\nu}$ (aus Bohr'schen Formel)

$$\frac{I}{Z} = (12 + \frac{7}{Z})\text{eV} \quad Z < 13$$

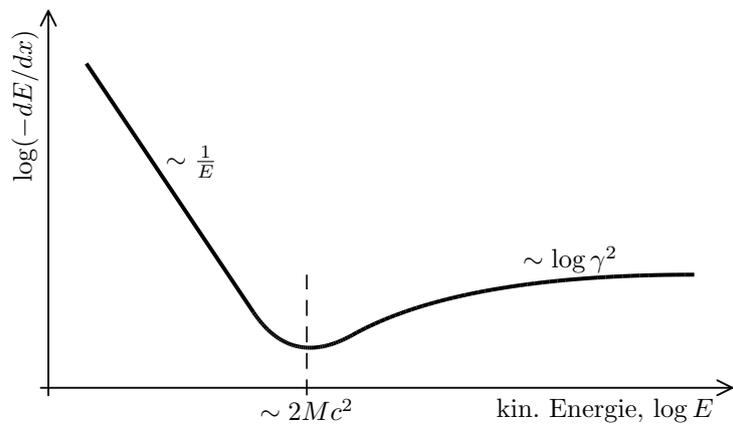
$$\frac{I}{Z} = (9,76 + 58,8(Z^{-1,19}))\text{eV} \quad Z > 13$$



Diskussion

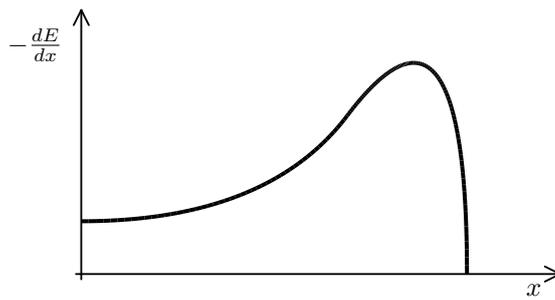
- bei nicht relativistischen Energien ist $\frac{dE}{dx} \propto \frac{1}{v^2} \propto \frac{1}{E}$
- Abnahmen von $\frac{dE}{dx}$ mit zunehmender Geschwindigkeit bis $v \approx 0,96c$, wo ein Minimum erreicht wird.
„MIP“: minimal ionizing particles
- Für $v > 0,96c$: Zunahme von $\frac{dE}{dx} \propto \ln \gamma^2$

Energieverlust als Funktion der Energie eines Teilchens:

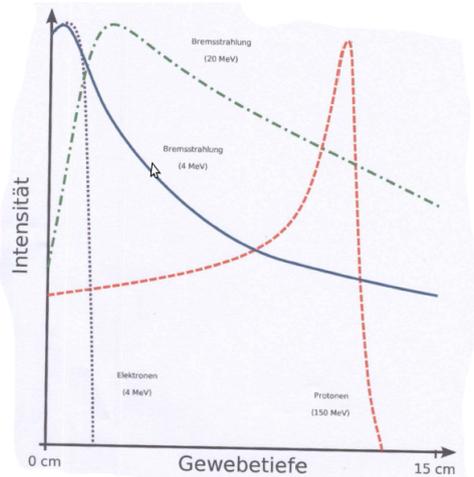


für $\beta\gamma \gtrsim 1000$ werden Strahlungsprozesse wichtig und dominieren $\frac{dE}{dx}$.
 Minimaler Energieverlust typisch $\simeq 2 \text{ MeV/cm}$.

Die Bragg-Kurve Energieverlust entlang der Teilchenspur: **Bragg-Kurve**



Maximaler Energieverlust am Ende der Spur. Anwendung in der Strahlentherapie mit schweren Ionen.



5.6 Wechselwirkung von Elektronen mit Materie

Im Gegensatz zu schweren Ionen entsteht ein zusätzlicher Energieverlust durch Bremsstrahlung aufgrund der geringen Masse des Elektrons.

klassische Beschreibung: Emission von EM-Strahlung aufgrund der Beschleunigung (d.h. Ablenkung von geradlinigen Bewegungen) durch das elektrische Feld des Kerns.

Bei wenigen MeV ist die Bremsstrahlung gegenüber $\frac{dE}{dx}$ gering. Bei einigen 10 MeV hingegen ist $\frac{dE}{dx}$ dominiert durch die Bremsstrahlung

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \underbrace{\left(\frac{dE}{dx}\right)_C}_{\text{Coulombstrahlung}} + \underbrace{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad}}_{\text{Bremsstrahlung}}$$

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} \simeq 4 \frac{N_A}{A} \rho Z^2 r_e^2 E \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \equiv \frac{E}{x_0}$$

kritische Energie E_C : $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_C$ für $E = E_C$

$$\Rightarrow E_C \approx \frac{800 \text{ MeV}}{Z + 1,2}$$

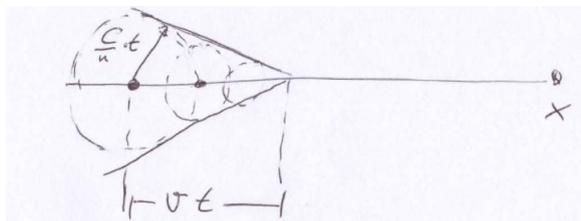
Beispiele: Pb: $E_C = 9,51 \text{ MeV}$
Al: $E_C = 51,0 \text{ MeV}$
 H_2O : $E_C = 92,0 \text{ MeV}$

$$-\left(\frac{dE}{E}\right) = \frac{dx}{x_0} \Rightarrow E(x) e^{-\frac{x}{x_0}}$$

5.7 Cherenkov Strahlung

Emission von EM Strahlung, wenn sich ein geladenes Teilchen mit einer Geschwindigkeit größer als die des Lichts in dem Medium ausbreitet.

$$v_{\text{particle}} > \frac{c}{n}, \quad n : \text{Brechungsindex des Mediums}$$



Wellenfront hat eine konische Form (Cherenkov Kegel) mit Öffnungswinkel Θ_C wobei $\cos \Theta_C = \frac{1}{\beta n(w)}$ gilt.

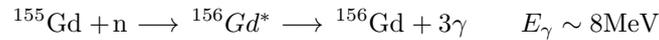
Der Energieverlust ist hierbei aber klein im Vergleich zu beispielsweise Kollisionsverlusten.

$$-\frac{dE}{dx} \approx 10^{-3} \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

Der Effekt wird zum Nachweis von Strahlung in Detektoren verwendet.

5.8 Nachweis von Neutronen

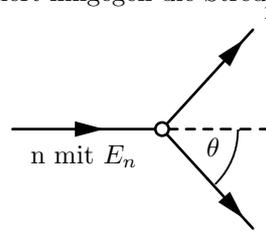
Nachweis über n-Einfang mit anschließender Emission von γ -Quanten



- Paarungsenergie wird frei
- Einsatz in großvolumigen Szintillationsdetektoren

Nachweis von schnellen Neutronen über elastische Streuung

Der n-Einfang ist dominant für „langsame“ Neutronen ($E_n \lesssim 0,5 \text{ eV}$). Für „schnelle“ Neutronen dominiert hingegen die Streuung.



$$E_R = \frac{2A}{(1+A)^2} (1 - \cos \theta^*) \cdot E_n$$

Rückstoßkern, E_R

mit

- A : Atomgewicht des Targetteilchen und
- θ^* : Streuwinkel des Teilchen im CMS, wobei

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta^*}{2}}$$

$$E_{R,max} = \frac{4A}{(1+A)^2} \cdot E_n$$

$$E_{R,max} = E_n \quad \text{für Wasserstoff}$$

Neutronen „thermalisieren“ effizient für leichte Absorbermaterialien (H_2O, C, H_{2N+2}, \dots)

Kapitel 6

Teilchenbeschleuniger

Der zentrale Parameter bei Teilchenbeschleunigern ist die Strahlenergie.

- Man benutzt ein „Mikroskop“, um kleinste Strukturen zu untersuchen. Die de Broglie Wellenlänge lautet:

$$\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$$

Somit gilt: Je größer die Energie (bzw. $|\vec{p}|$), desto kleiner sind die auflösbaren Strukturen

- Bei hochenergetischen Teilchenkollisionen werden neue (schwere, instabile) Teilchen produziert. Üblicherweise werden geladene und stabile Teilchen beschleunigt, wie z.B. e^- , e^+ , p , \bar{p} , schwere Ionen und in Zukunft auch μ^\pm . Es gibt zwei Möglichkeiten beschleunigte Teilchenstrahlen zur Kollision zu bringen:

1. Collider: Kollision mit zweitem (entgegenkommenden) Strahl
2. Kollision mit festem Target

In beiden Fällen können entstehende Teilchen und Wechselwirkungen untersucht werden. Mit festen Targets können zudem sekundäre Teilchen produziert werden, die elektrisch neutral sind und somit nicht beschleunigt werden können.

Beispiele für Auflösungen

$$|\vec{p}| = 1 \frac{\text{GeV}}{c} \rightarrow \lambda = 1,24 \cdot 10^{-15} \text{m} \approx \text{Größe eines Protons}$$

$$|\vec{p}| = 10^3 \frac{\text{GeV}}{c} \rightarrow \lambda = 1,24 \cdot 10^{-18} \text{m}$$

\approx Größe der Protonensubstruktur (Quarks)

Suche nach neuen Teilchen Kollision von Teilchen 1 mit m_1, \vec{p}_1 und Teilchen 2 mit m_2, \vec{p}_2 :

Energie im Laborsystem:

$$E_L = \sqrt{\vec{p}_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{\vec{p}_2^2 c^2 + m_2^2 c^4}$$

$$|\vec{p}_L| = |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|$$

LI: $E_L^2 - \vec{p}_L^2 c^2 \stackrel{\text{LI}}{=} E^{*2} - \vec{p}^{*2} c^2$

$$E^* = \sqrt{E_L^2 - \vec{p}_L^2 c^2}$$

Schwellenenergie für die Produktion neuer Teilchen $E^* = \sum_i m_i c^2$

$$pp \rightarrow \bar{p}ppp$$

$$m_1 = m_2 = m = 0,9383 \frac{\text{GeV}}{c^2}$$

$$|\vec{p}_L| = |\vec{p}_1|, \quad |\vec{p}_2| = 0$$

$$E^* = 4mc^2 = 3,75 \text{ GeV}, \quad |\vec{p}_1| = 6,5 \frac{\text{GeV}}{c}$$

6.1 Schwerpunktsenergie \sqrt{s}

Gesamtenergie aller an einem Prozess beteiligten Teilchen bezüglich ihres gemeinsamen Schwerpunktes:

$$\sqrt{s} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2}$$

p_i : Viererimpuls des i-ten Teilchens

- **Beispiel 1:** Kollision zweier Teilchen mit entgegengesetztem Impuls

$$p_1 = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} E \\ -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{\left[\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E \\ -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{pmatrix} \right]^2} = \sqrt{4E^2} = 2E$$

- **Beispiel 2:** Teilchen A mit E_a und m_a trifft auf Teilchen B mit m_b :

$$\sqrt{s} = \sqrt{\left[\begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2} = \sqrt{2E_a m_a + m_a^2 + m_b^2}$$

für Hochenergieexperimente, bei denen die Masse der Teilchen im Vergleich zur Strahlenergie vernachlässigbar ist, ist $\sqrt{s} \simeq \sqrt{2E_a m_b}$

NB: Schwerpunktsenergie wächst nur mit der Wurzel der Strahlenergie, beispielsweise hat $22\text{GeV} \rightarrow + \overleftarrow{22\text{GeV}}$ die gleiche Schwerpunktsenergie wie $1\text{TeV} \rightarrow + \text{fixed target}$
 $1\text{TeV} \rightarrow + \overleftarrow{1\text{TeV}} \Leftrightarrow 10^3\text{TeV} \rightarrow + \text{fixed target}$

6.2 Energieverlust durch Synchrotronstrahlung

Wird ein Teilchen mit Ladung e und Energie E auf einer Kreisbahn mit Radius r_0 gehalten, so wird sie beschleunigt und gibt somit Energie in Form von Strahlung ab. Die abgestrahlte Leistung beträgt:

$$P(E, r_0) = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 r_0^2} \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 = \frac{ec\gamma^4}{6\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

6.3 Luminosität und Reaktionsrate

Reaktionsrate R

$$R = \phi_p N_t \sigma_R$$

wobei

- ϕ_p : Fluss der Projektile (in $s^{-1}cm^{-2}$)
 - N_t : Anzahl der Targetkerne im Strahlquerschnitt
- und
- σ_R : der Wirkungsquerschnitt (in cm^2)

ist.

Luminosität L

Während der Wirkungsquerschnitt den Streuprozess beschreibt, charakterisiert die Luminosität die Performance des Beschleunigers.

$$R = L \cdot \sigma_R$$

$$L = \phi_p N_t = \frac{\dot{N}_p}{A} \cdot d \cdot A \cdot n_t = \dot{N}_p \cdot d \cdot n_t = n_p \cdot v_p \cdot N_t$$

mit

- d : Targetdicke
- n_t : Targetdichte

Collider: $L := f \cdot n \cdot \frac{N_1 N_2}{A}$ mit

- f : Umlauffrequenz

- n: Anzahl der „Teilchenpakete“
- $N_{1,2}$: Anzahl der Teilchen pro Paket
- A: Überlappende Fläche

Typische Luminositäten:

- **für $p\bar{p}$ - Collider:** $L \simeq 10^{32} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
beim LHC ist geplant: $L \simeq 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

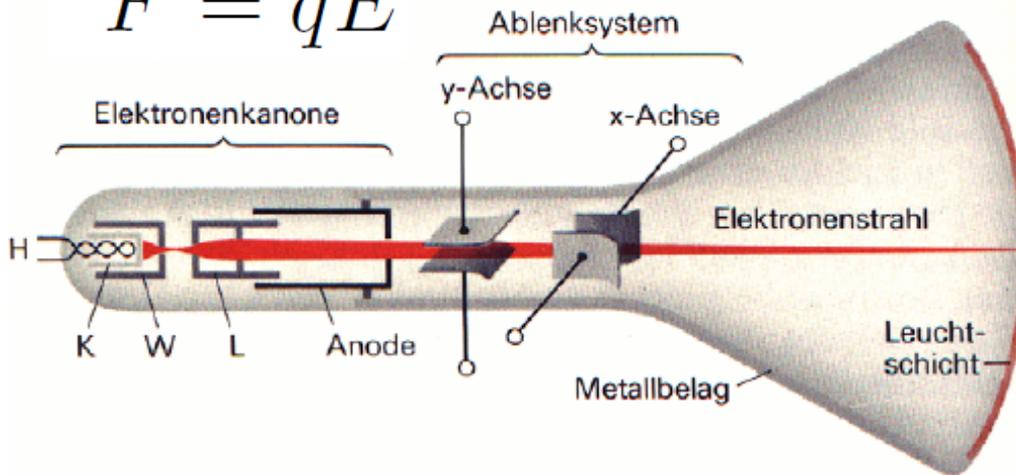
Für einen totalen Wirkungsquerschnitt von $\sigma_{tot} \approx 0,1\text{b}$ für $p\bar{p}$ Kollisionen bei $\sqrt{s} \approx 14\text{TeV}$ ergibt dies eine Reaktionsrate von 10^9 Ereignissen pro Sekunde!

- **für fixed-target:** Im Vergleich dazu betrachten wir ein fixed-target Experiment mit einem 1m langen Target aus flüssigem H_2 und einer Strahlungsintensität von 10^{12} Protonen/s:

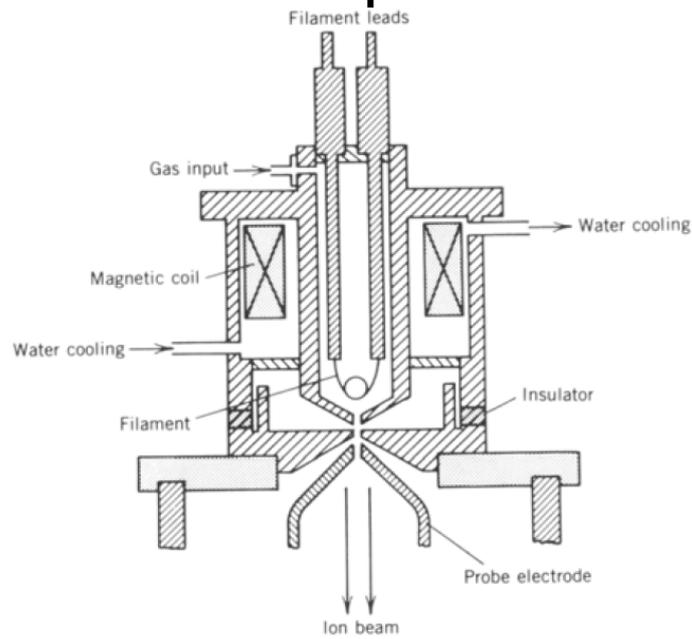
$$L_{max} \simeq 10^{37} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

6.4 Teilchenbeschleuniger und Teilchendetektoren

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

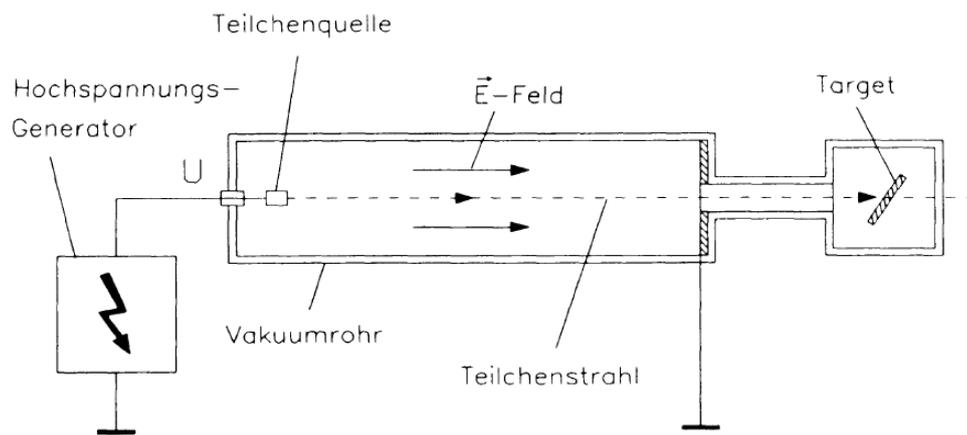


Ionenquelle

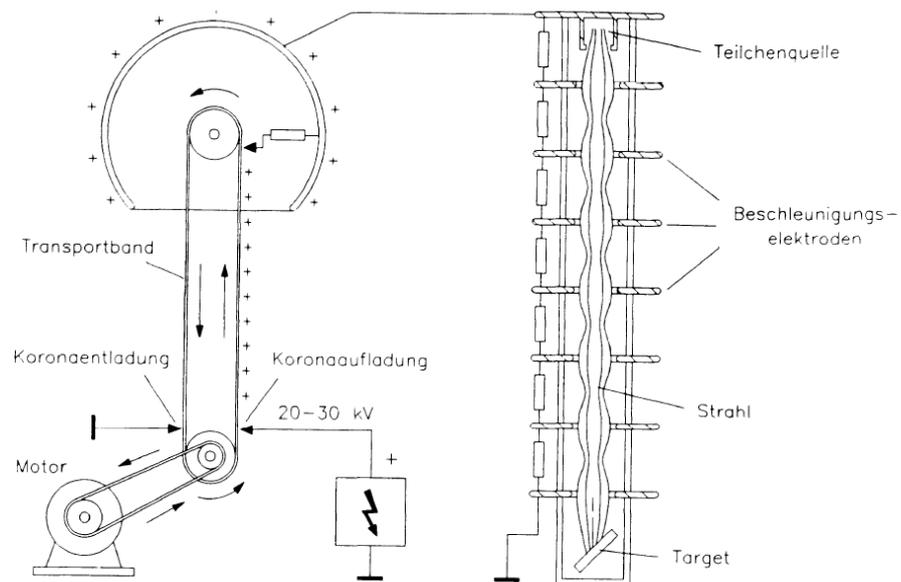


aus Krane

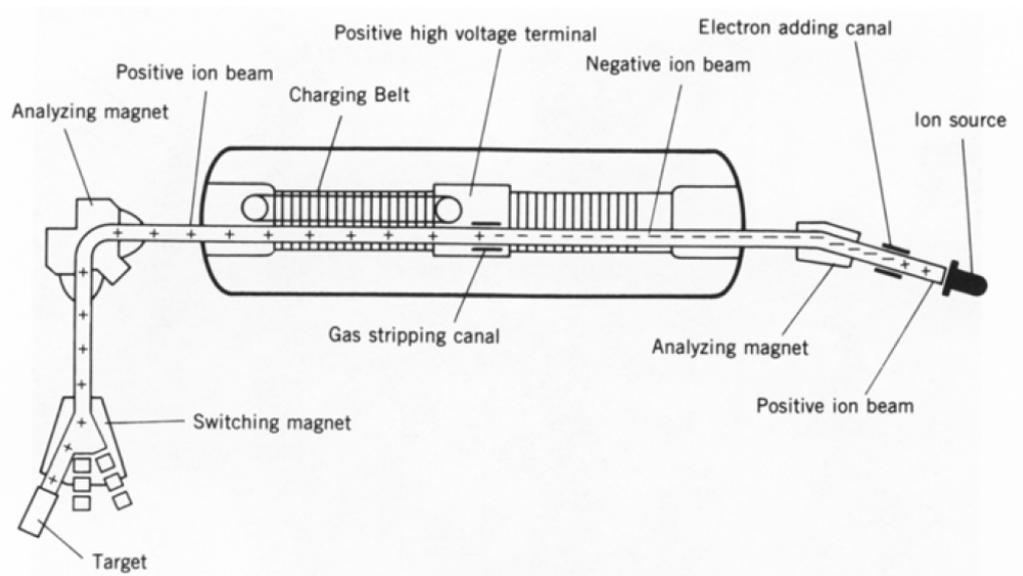
Elektrostatischer Beschleuniger



Van de Graaff Beschleuniger



Tandembeschleuniger



Münchner 15 MV Tandem



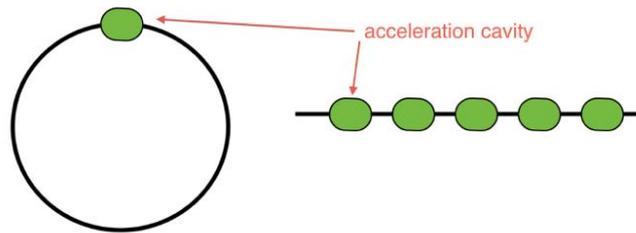


Figure 4.4: *Sketch of a circular (left) and linear (right) accelerator.* A circular machine needs to have one acceleration cavity, while a linear machine needs several cavities in series in order to reach high energies.

Cyclotron

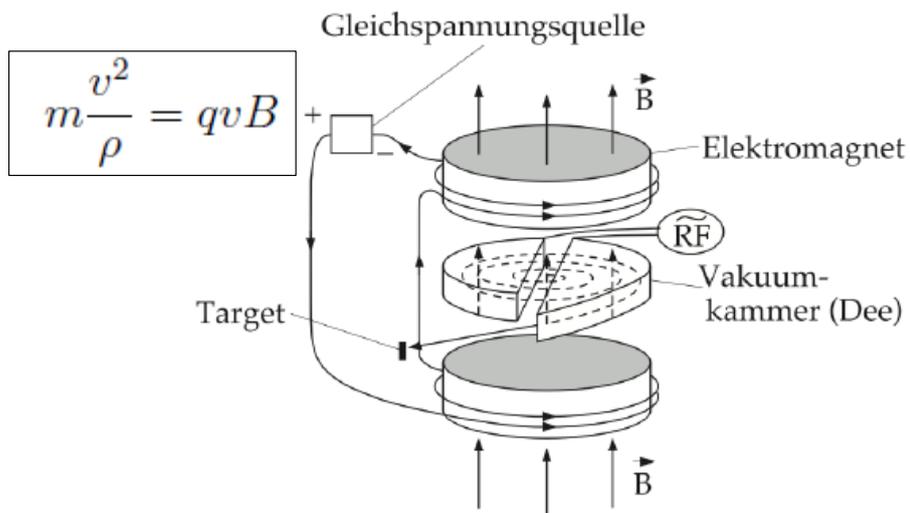


Figure 4.5: *Sketch of a cyclotron accelerator.* Source: [8, p. 108].

Cyclotrons

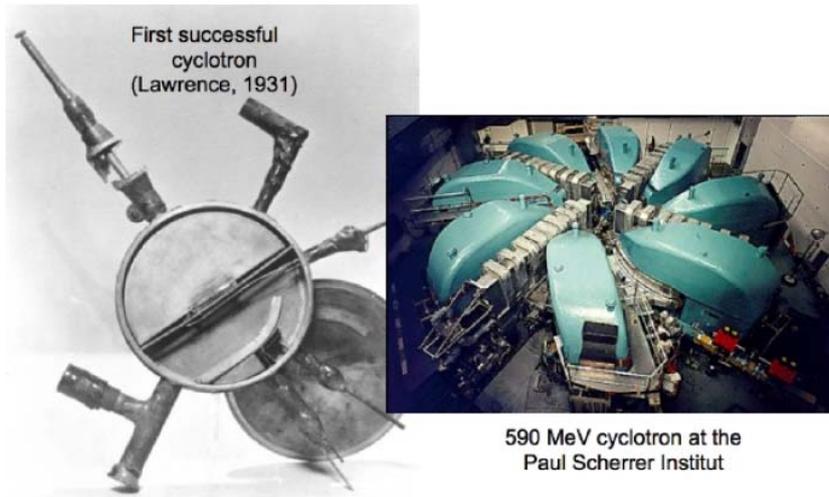
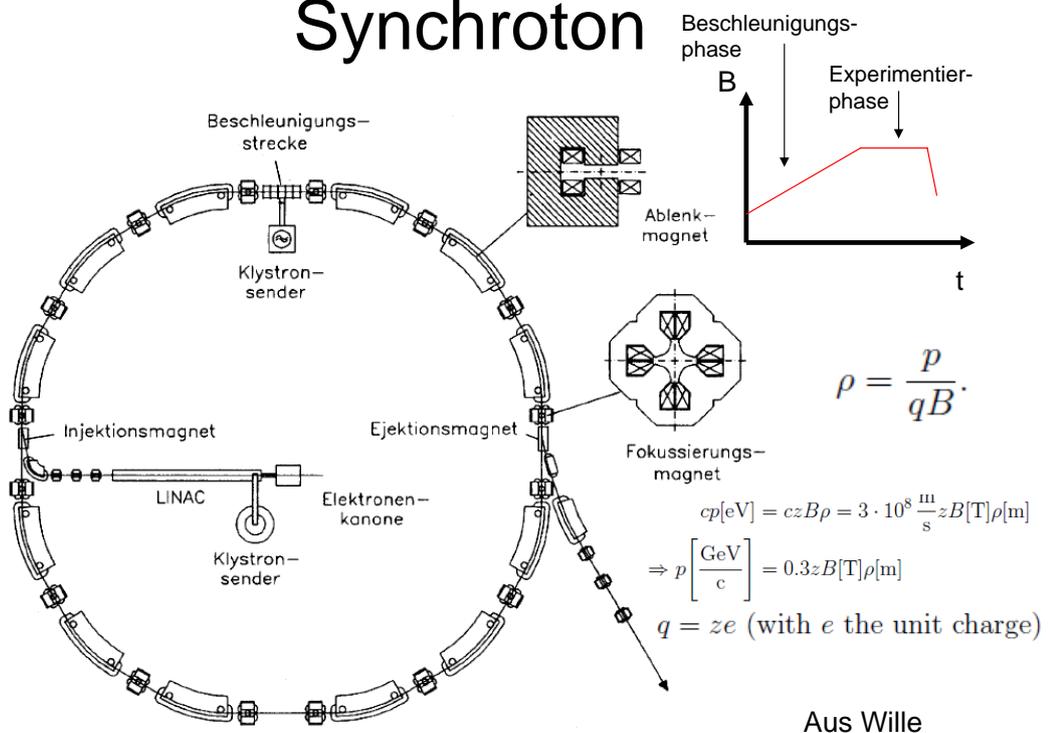


Figure 4.6: A first prototype of a cyclotron (by Lawrence) and the 590 MeV isochronous cyclotron at PSI.

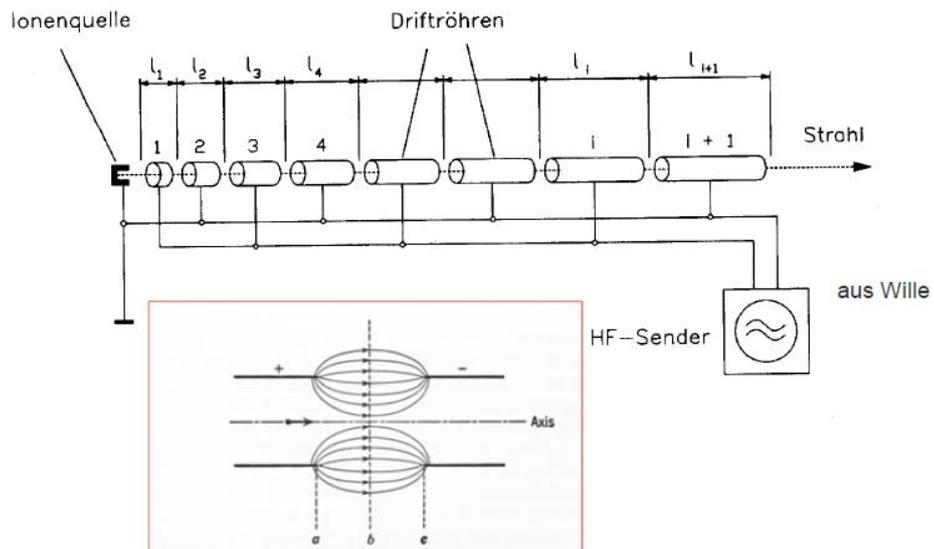
aus ETHZ Skript

Synchrotron

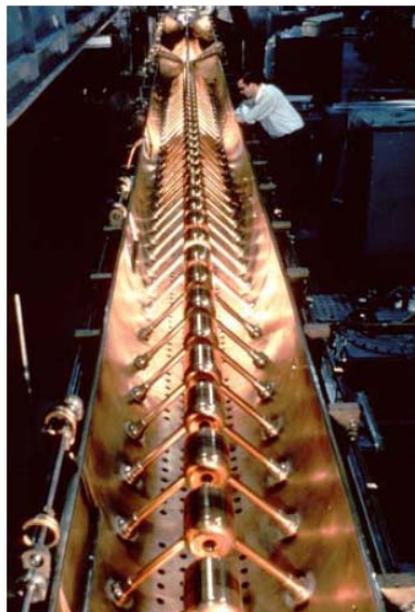


Aus Wille

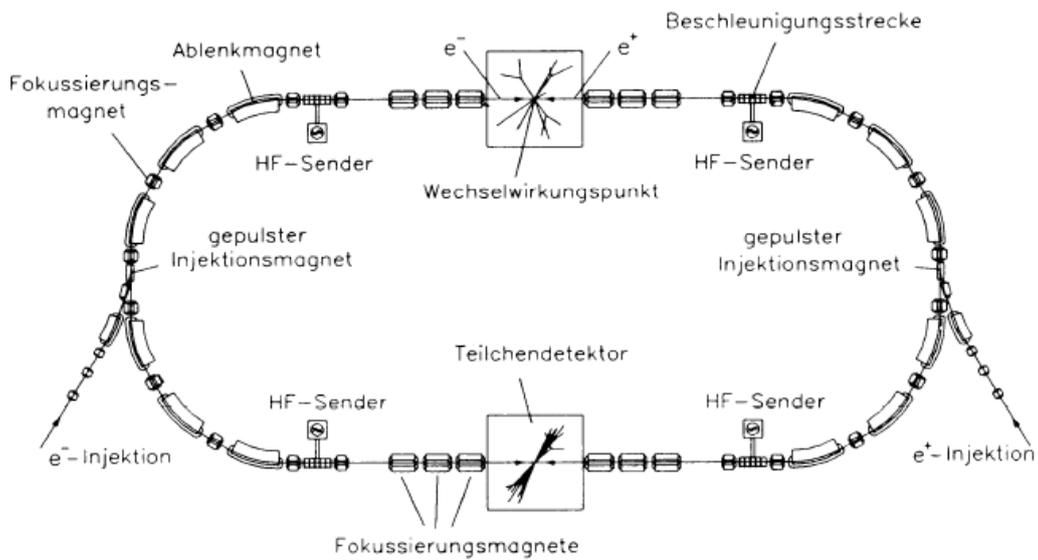
Linac (Wideroe type)



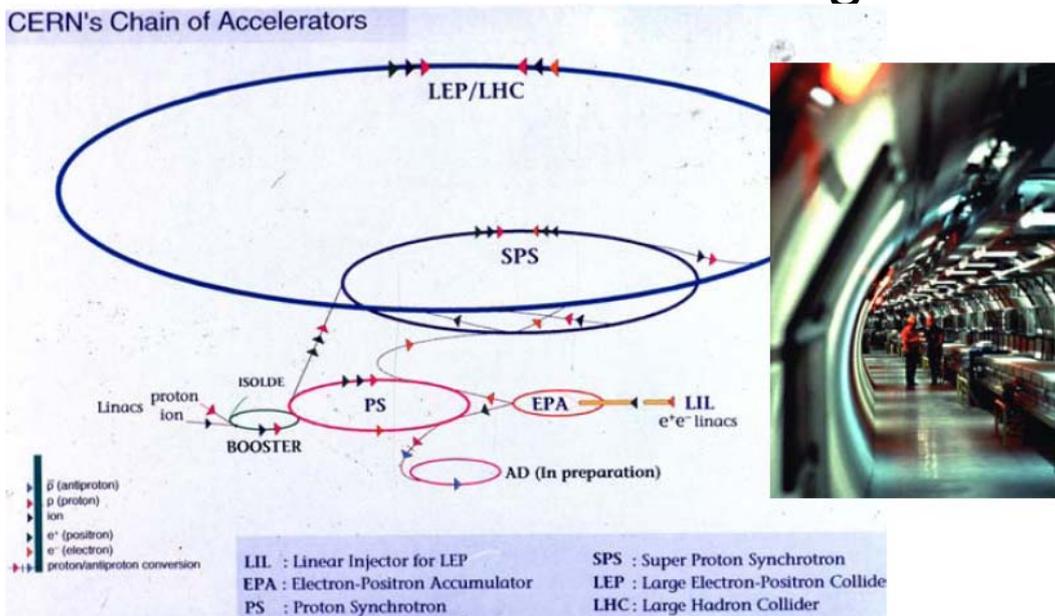
Protonen Linac



Collider



Die CERN Beschleuniger

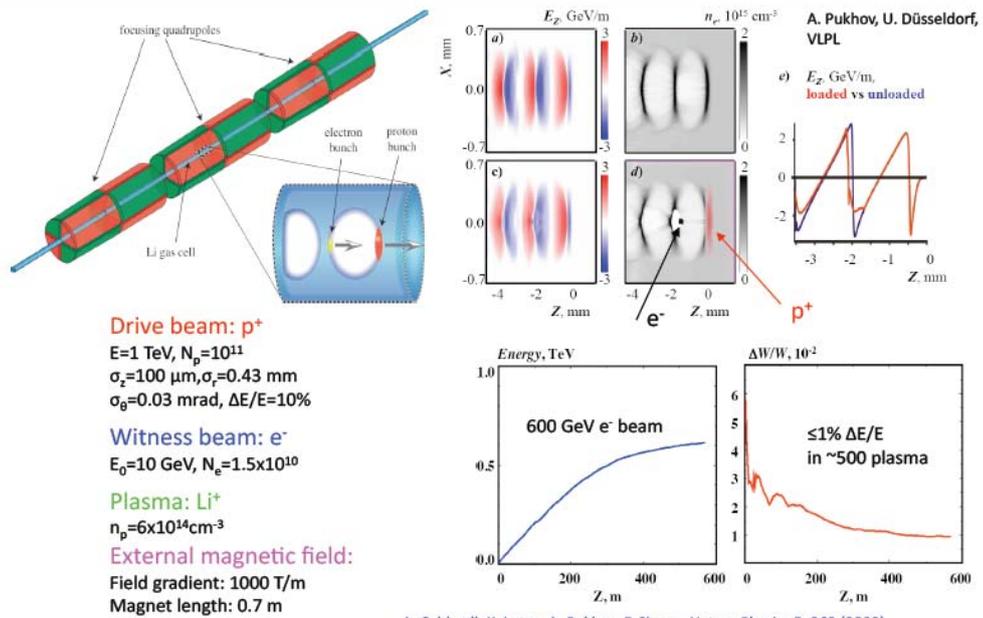


7 TeV protons => 5.4 T for $r=4.3$ km

CERN bei Genf



Proton-driven plasma wakefield acceleration (PDPWA)

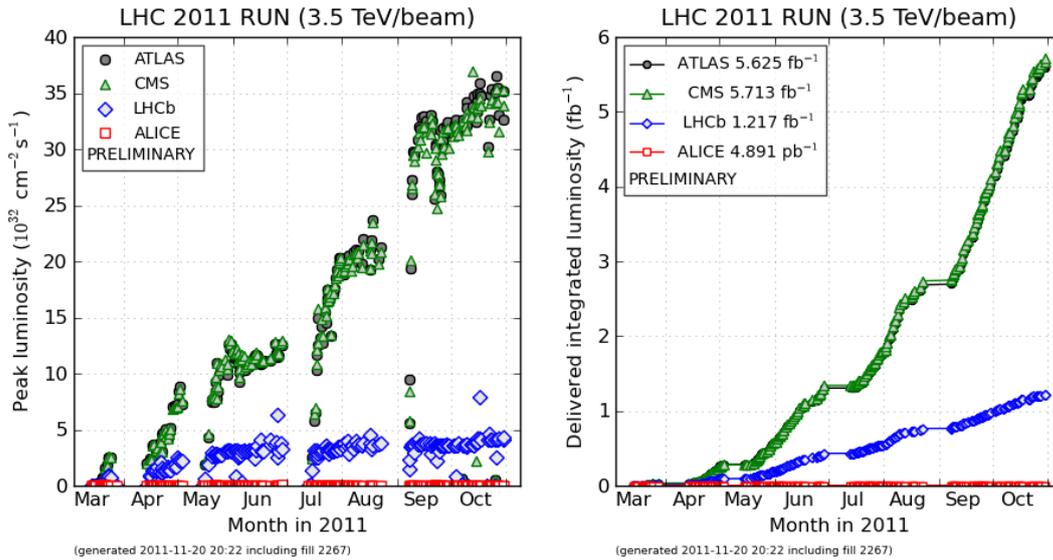


June 28, 2011

A. Caldwell, K. Lotov, A. Pukhov, F. Simon, Nature Physics 5, 363 (2009).

5

LHC Luminosity Plots for the 2011 Proton Run



Ziel: peak Lumi $L=10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

<http://lpc.web.cern.ch/lpc/lumiplots.htm>

Detectors at accelerators experiments

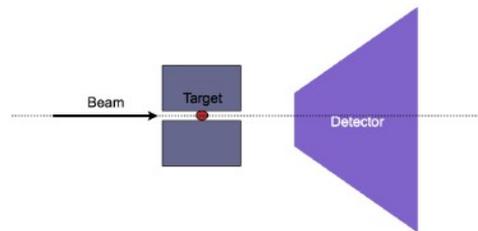


Figure 4.14: Schematic view of an experimental setup for a fixed target experiment.

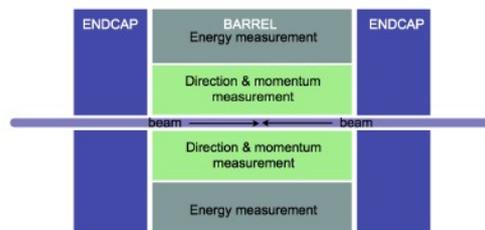


Figure 4.15: Schematic view of a detector for colliding beam experiments.

Bestimmung von

- Raumkoordinaten und Zeiten der Endzustände
- Impulse der Teilchen
- Energy der Teilchen
- Art der Teilchen (PID)

From https://edit.ethz.ch/itp/education/lectures_hs10/PPPI/2010_11_01.pdf

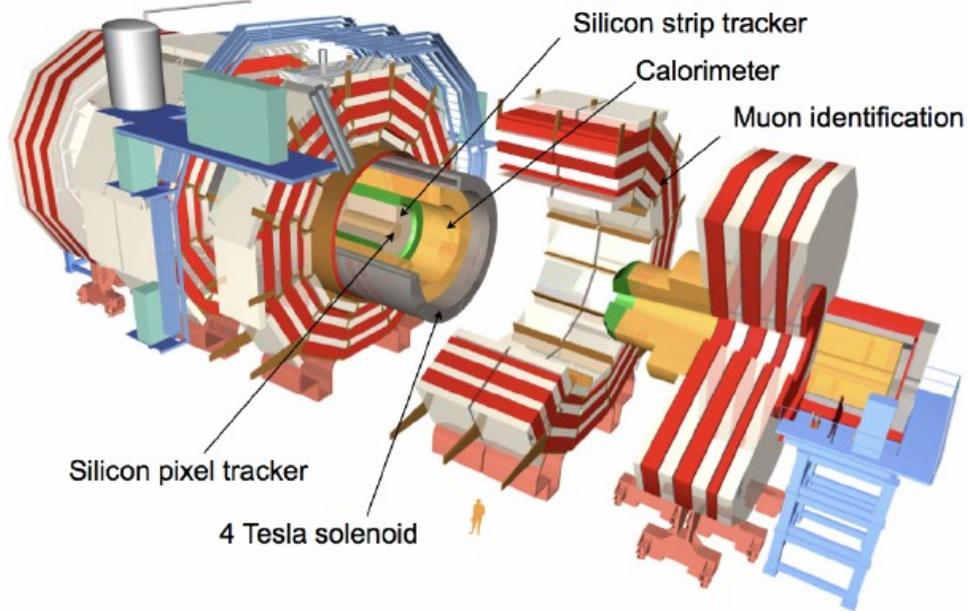


Figure 4.16: *The CMS experiment at the LHC.*

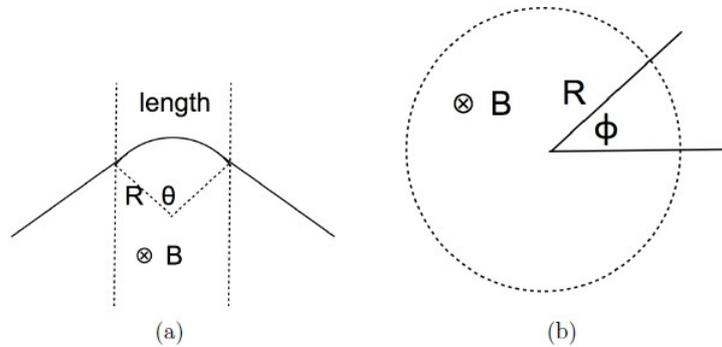


Figure 4.17: *Momentum measurement in collider experiments using a magnetic field. The magnetic field is parallel to the beams (orthogonal to the page).*

$$p = 0.3BR$$

$$\text{length} = l = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sim R\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\text{length}}{R} = \frac{0.3Bl}{p}$$

$$\Rightarrow p = \frac{0.3Bl}{\theta}$$

Transversaler u. longitudinaler Impuls

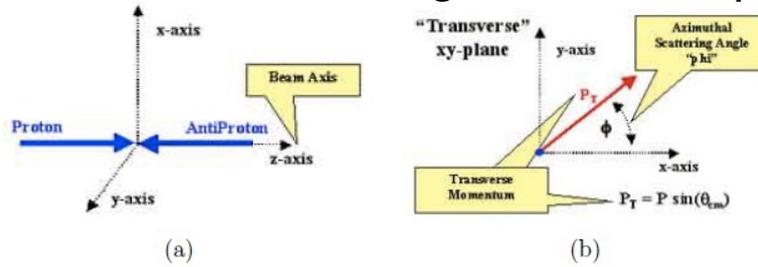


Figure 4.18: Axes labelling conventions (a) and definition of transverse momentum (b).
S

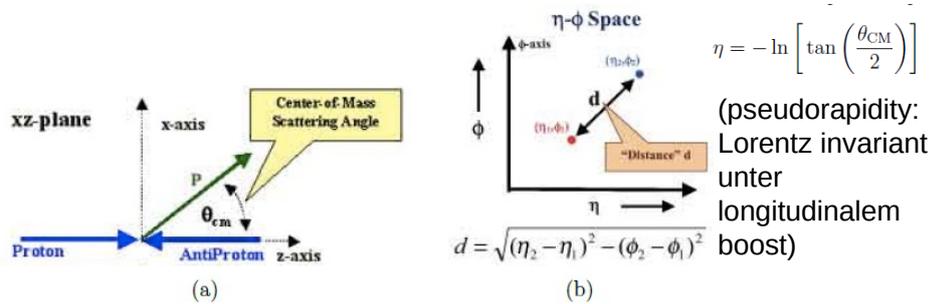


Figure 4.19: Definition of the longitudinal scattering angle θ_{CM} (a) and definition of particle distance in the η - ϕ plane (b). Source: [10].

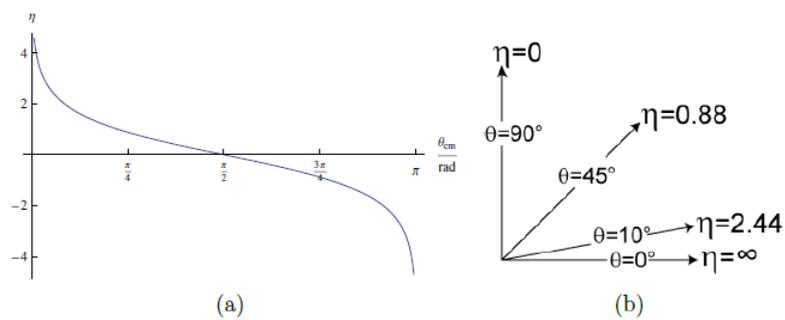
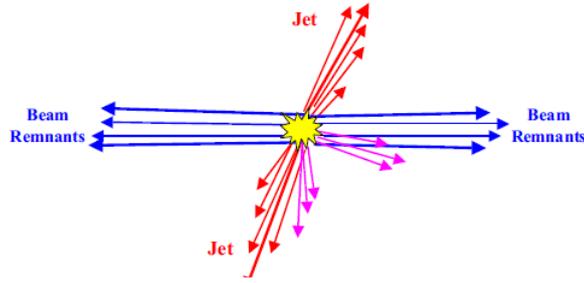


Figure 4.20: Pseudorapidity as a function of θ_{CM} (a) and pseudorapidity for various values of θ_{CM} (b). Source (b): [11].



Kein transversaler Impuls vor Streuprozess => Gesamt Transversalimpuls der final state Teilchen muss identisch null sein

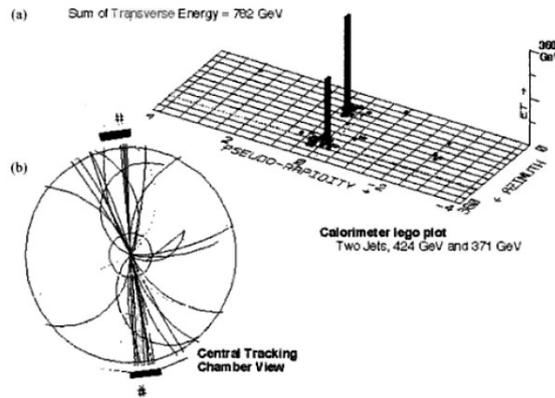


Figure 4.22: Two jet event, reconstructed in the tracking chamber (b) and calorimeter signals (a) of the $D\bar{O}$ experiment.

Missing mass method

A collision is characterized by an initial total energy and momentum ($E_{\text{in}}, \vec{p}_{\text{in}}$). In the final state we have n particles with total energy and momentum given by:

$$E = \sum_i^n E_i, \quad (4.10)$$

$$\vec{p} = \sum_i^n \vec{p}_i. \quad (4.11)$$

Sometimes an experiment may measure $E < E_{\text{in}}$ and $\vec{p} \neq \vec{p}_{\text{in}}$. In this case one or more particles have not been detected. Typically this happens with neutral particles, most often neutrinos, but also with neutrons, π^0 , or K_L^0 . The latter have a long lifetime and may decay outside the sensitive volume. To quantify this process, we introduce the concept of missing mass:

$$\text{missing mass} \times c^2 = \sqrt{(E_{\text{in}} - E)^2 - (\vec{p}_{\text{in}} - \vec{p})^2 c^2}. \quad (4.12)$$

The missing mass is measured for every collision and its spectrum is plotted. If the spectrum has a well-defined peak one particle has escaped our detector.

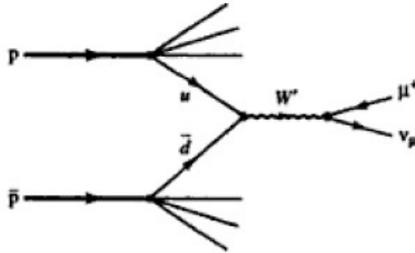


Figure 4.24: *Production and decay of a W^+ boson in a $p\bar{p}$ collision.*

Muon-Impuls wird gemessen, Neutrino entweicht Detektor
 Gesamtsumme des transversalen Impulses ist ungleich 0!
 Experimentelle Signatur: fehlender transversaler Impuls

Invariant mass method

The invariant mass is a characteristic of the total energy and momentum of an object or a system of objects that is the same in all frames of reference. When the system as a whole is at rest, the invariant mass is equal to the total energy of the system divided by c^2 . If the system is one particle, the invariant mass may also be called the rest mass:

$$m^2 c^4 = E^2 - \vec{p}^2 c^2.$$

For a system of N particles we have

$$W^2 c^4 = \left(\sum_i^N E_i \right)^2 - \left(\sum_i^N \vec{p}_i c \right)^2 \quad (4.13)$$

where W is the invariant mass of the decaying particle. For a particle of Mass M decaying into two particles, $M \rightarrow 1 + 2$, Eq. 4.13 becomes:

$$M^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2) = (p_1 + p_2)^2.$$

Invariante Masse: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

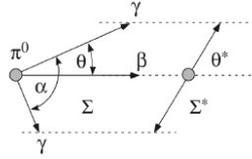


Figure 4.28: π^0 decay in two photons. Σ denotes the laboratory frame (left) and Σ^* denotes the pion rest frame (right). Source [8, p. 95].

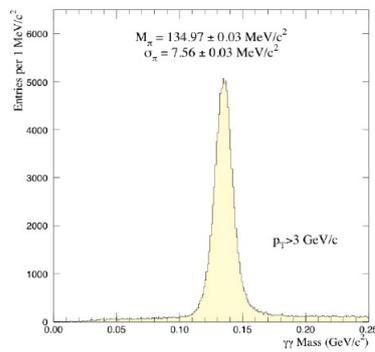
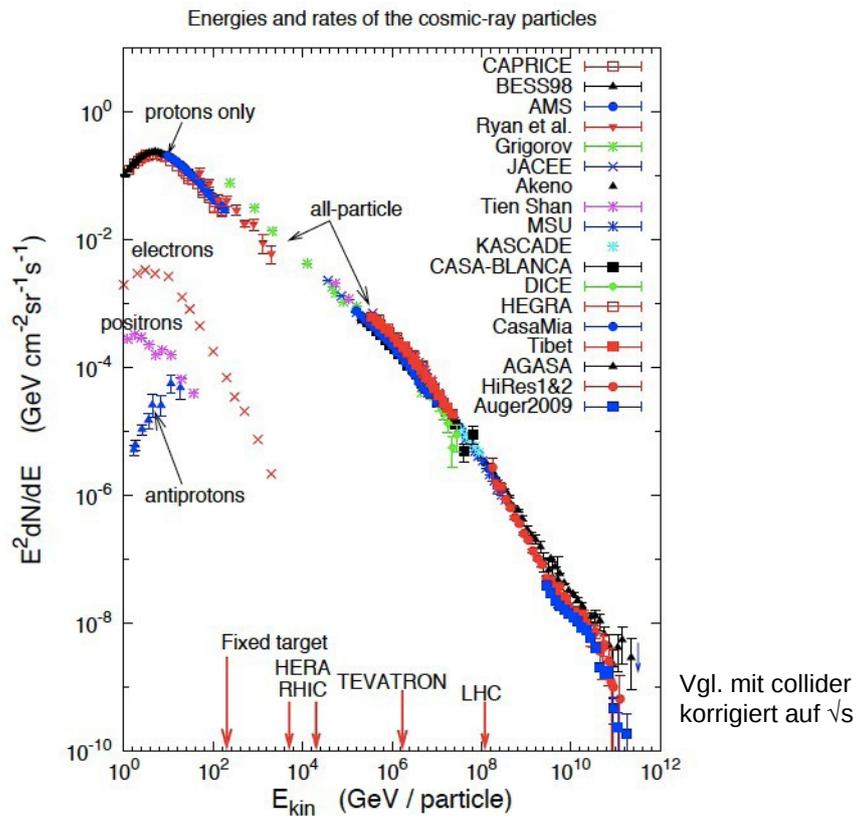


Figure 4.29: Invariant mass spectrum for photon pairs. The π^0 appears as a peak at the pion mass.



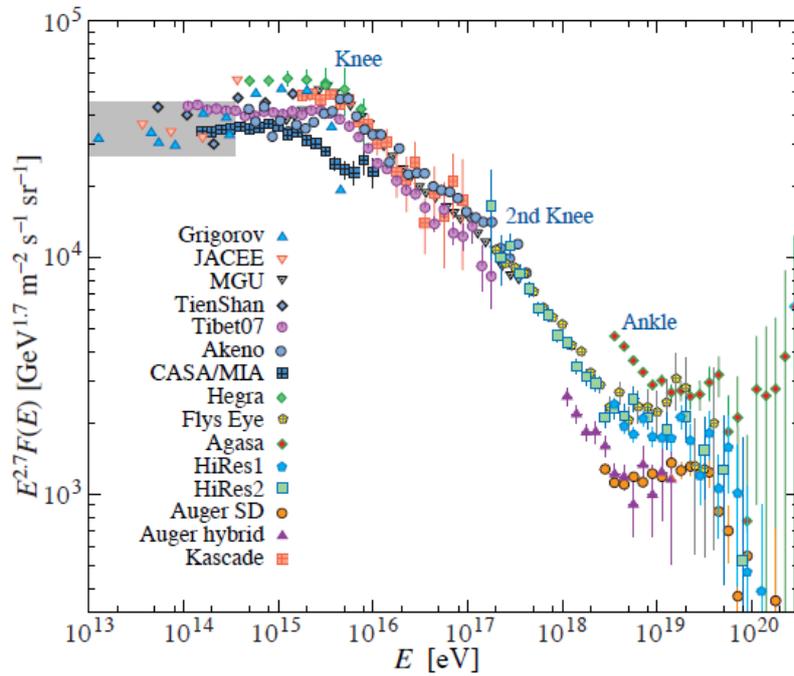
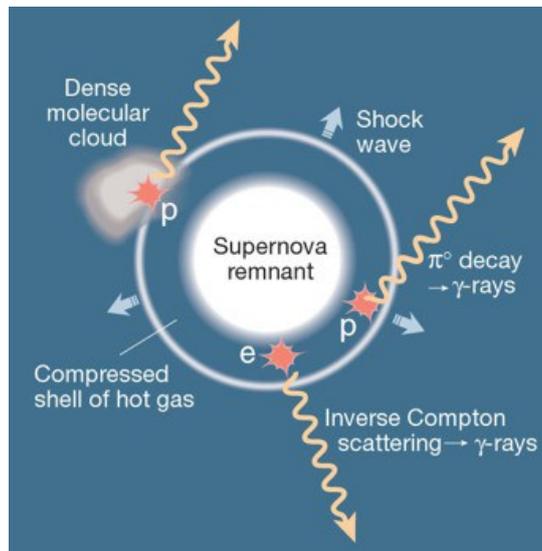


Figure 24.8: The all-particle spectrum from air shower measurements. The shaded area shows the range of the the direct cosmic ray spectrum measurements. See full-color version on color pages at end of book. T. Gaisser, T. Stanev in www.pdg.lbl.gov



Felix Aharonian, *Nature* **416**, 797-798,2002

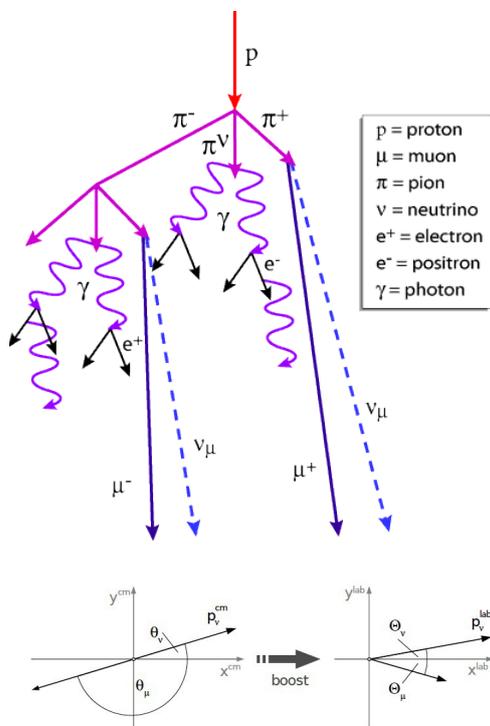
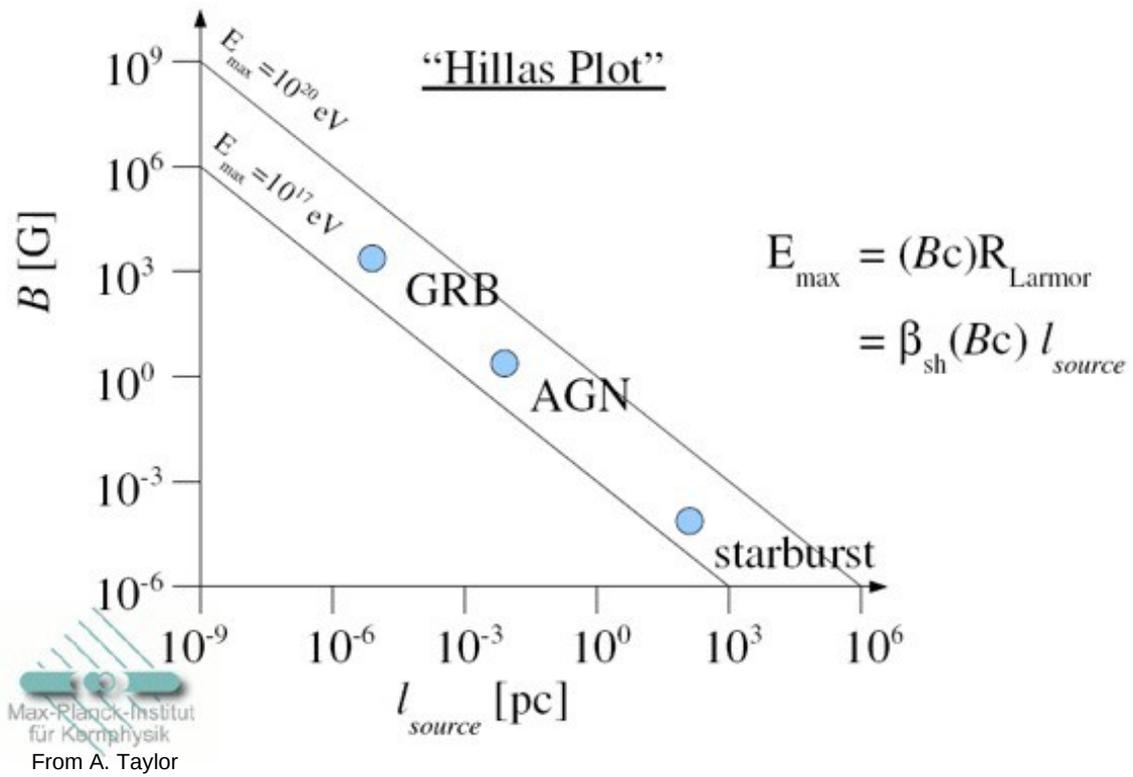


Figure 2.4: Two body decay of the parent meson into muon and neutrino. - The left figure displays the back-to-back kinematics in the meson center of mass (cm) frame. The right figure shows the momenta after Lorentz transformation into the laboratory frame.



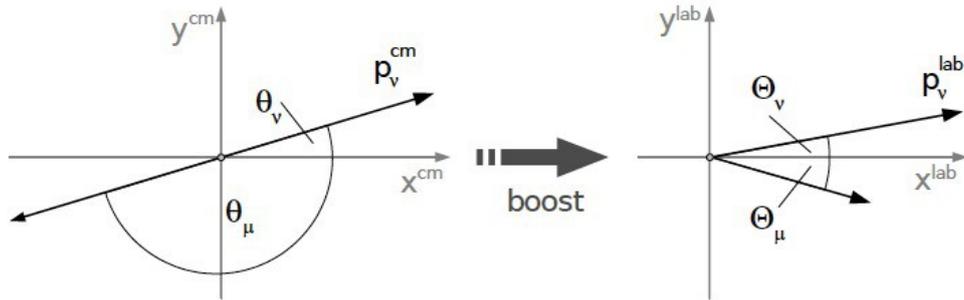


Figure 2.4: Two body decay of the parent meson into muon and neutrino. - The left figure displays the back-to-back kinematics in the meson center of mass (cm) frame. The right figure shows the momenta after Lorentz transformation into the laboratory frame.

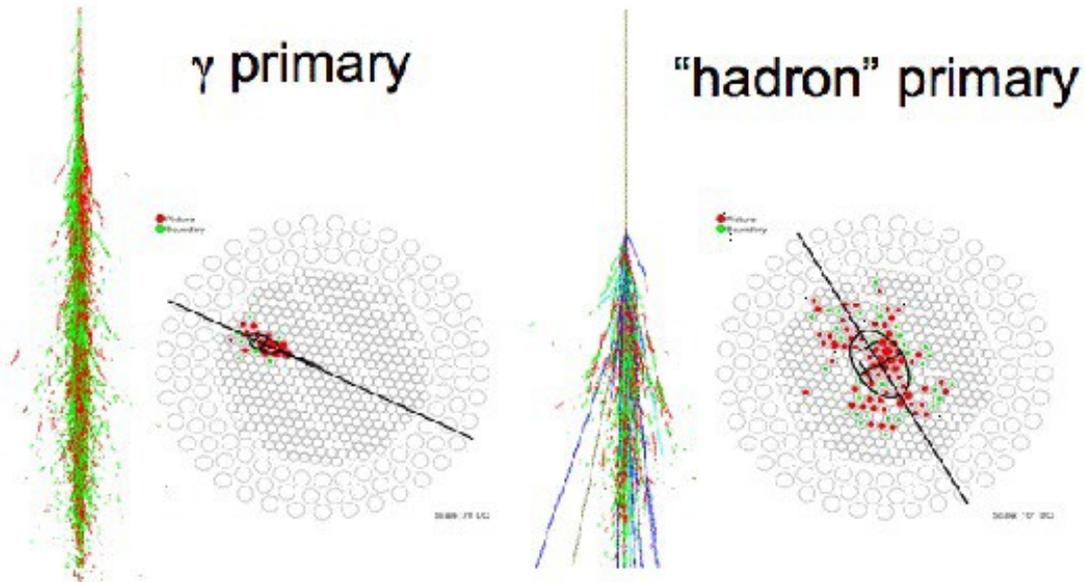
$$E_\nu = \gamma E_\nu^{cm} + \beta \gamma p_{x\nu}^{cm} \quad p_{x\nu}^{cm} = |p^{cm}| \cos \theta_\nu \quad \text{and}$$

$$E_\mu = \gamma E_\mu^{cm} + \beta \gamma p_{x\mu}^{cm}, \quad p_{x\mu}^{cm} = |p^{cm}| \cos(\theta_\nu - \pi) = -|p^{cm}| \cos \theta_\nu,$$

$$E_\nu = \gamma |p^{cm}| (1 + \cos \theta_\nu) \quad \text{and} \quad r_i = m_\mu^2 / m_i^2$$

$$E_\mu = \gamma |p^{cm}| \left(\frac{1 + r_i}{1 - r_i} - \cos \theta_\nu \right).$$

Aus Schoenert et al., Phys.Rev.D79:043009,2009



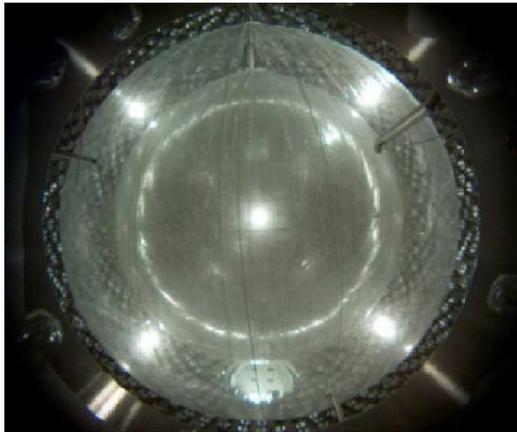
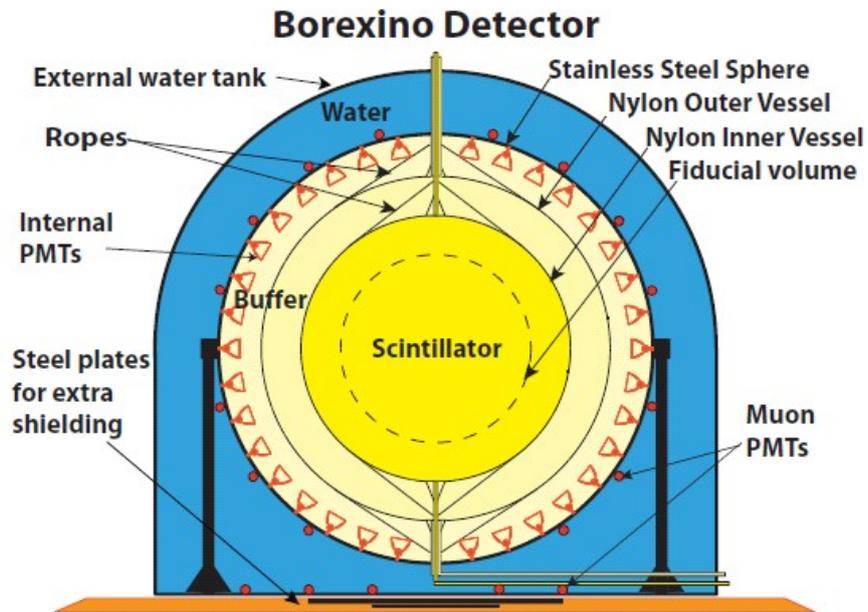


Fig. 2. The Inner and Outer Nylon Vessels installed and inflated with nitrogen in the Stainless Steel Sphere.

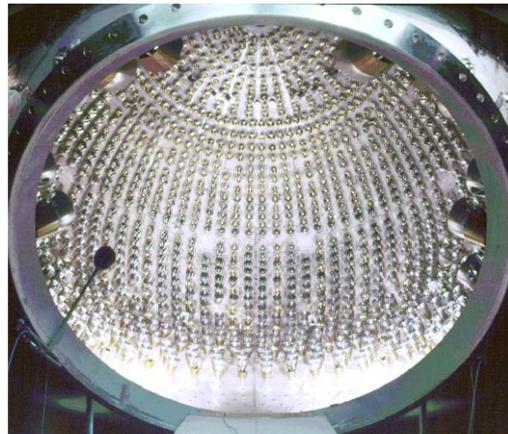


Fig. 3. Inner surface of the Stainless Steel Sphere. The picture is taken from the main SSS door, and shows the internal surface of the sphere with PMTs evenly mounted inside. The total number of PMTs is 2212.

a buffer is convenient because it matches both the

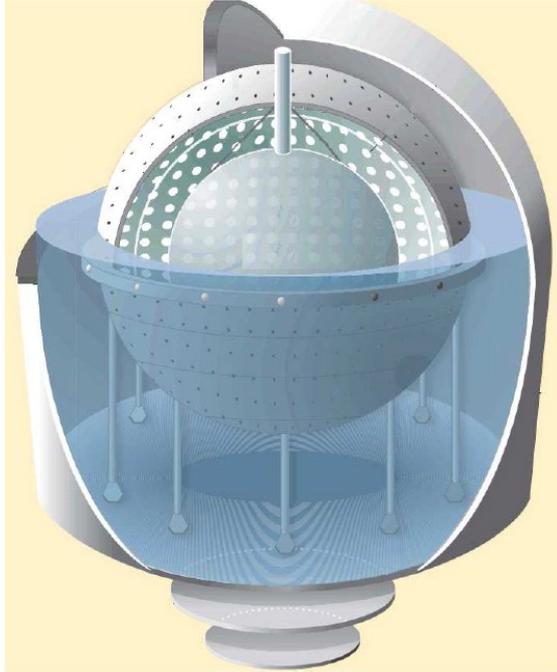


Fig. 4. A pictorial drawing of the Borexino detector. Inside the Water Tank, the Stainless Steel Sphere is supported by 20 steel legs. Within the sphere, the drawings shows some PMTs (white full circles) and the Inner and Outer Nylon Vessels. The steel plates beneath the tank improve the shielding against radiation from the rock.



Fig. 5. The inner surface of the Water Tank covered with layer of Tyvek. The Tyvek sheets improve light collection in the Outer Detector by reflecting the photons back into the water.

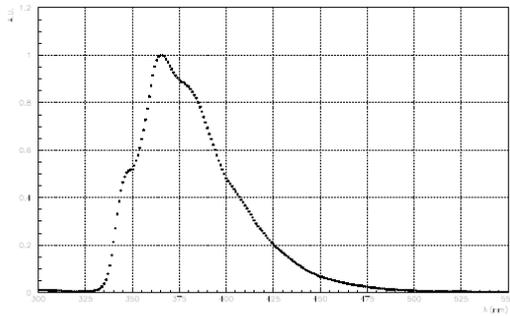


Fig. 6. Emission spectrum of the PC+PPO mixture used in Borexino

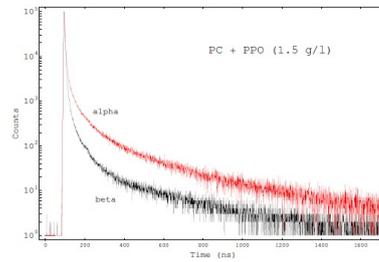


Fig. 8. Time response of the Borexino scintillator mixture for α and β particles.

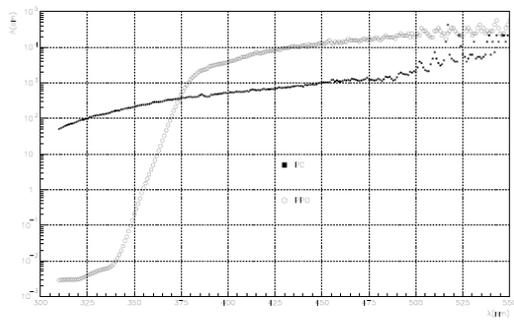


Fig. 7. Attenuation length of PC (full squares) and PPO (empty circles).

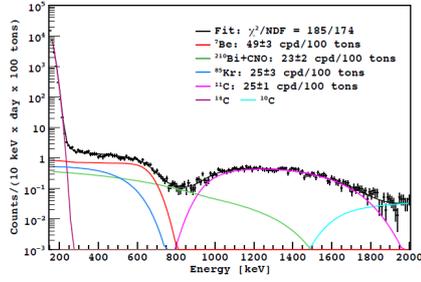


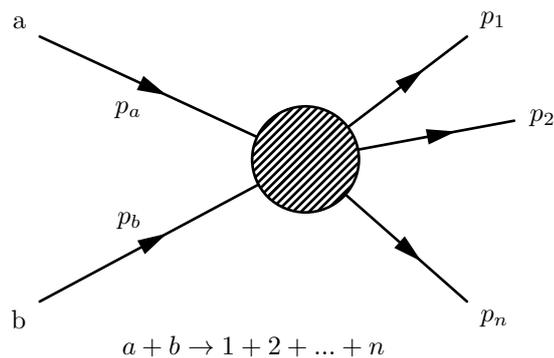
Figure 2. Spectral fit in the energy region 160–2000 keV. Contributions from ^{214}Pb , pp , and pep neutrinos, not shown, are almost negligible with respect to those in the figure.

Kapitel 7

Elektromagnetische Streuprozesse

7.1 Wirkungsquerschnitt

relativistisch, i.A. mit Erzeugung und Vernichtung von Teilchen.



$$|i\rangle = |p_a, p_b\rangle, \quad P_i = p_a + p_b$$

$$|f\rangle = |p_1, \dots, p_n\rangle, \quad P_f = p_1 + \dots + p_n$$

Übergangsamplitude S_{fi} :

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \underbrace{(2\pi)^4}_{\text{Konvention}} \cdot \underbrace{\delta^4(p + P - p' - P')}_{\text{4-Impuls-Erhaltung}} \cdot \underbrace{\mathcal{T}_{fi}}_{\text{aus Feynman-Regeln}}$$

$$\mathcal{T}_{fi} = \underbrace{\mathcal{M}_{fi}}_{\text{aus Feynman-Diagrammen}} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}} \right]^{2+n}$$

Übergangswahrscheinlichkeit: differentiell, für Übergang in Phasenraumelement

$$d\Phi = |\mathcal{S}_{fi}|^2 d\Phi$$

, da kontinuierliches Spektrum

Problem: $[\delta^4(P_i - P_f)]^2$ nicht definiert

Umgehung des Problems:

- endliches Volumen $V = L^3$
- endliche Zeit T

für die 0-te Komponente ergibt sich also:

$$2\pi\delta(\omega) \simeq \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega t}}_{T \rightarrow \infty: 2\pi\delta(\omega)} = \frac{2}{\omega} \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)$$

$$[2\pi\delta(\omega)]^2 \rightarrow T \cdot \underbrace{\frac{2}{\omega T} \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}_1 \cdot \underbrace{\frac{2}{\omega} \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}_{\delta(\omega) \cdot 2\pi}$$

also: $[2\pi\delta(\omega)]^2 \rightarrow T \cdot 2\pi\delta(\omega)$

analoge Rechnung für die 3 Raumkomponenten.

$$\Rightarrow [(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f)]^2 \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) \cdot T \cdot V$$

$$\Rightarrow dW = V \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) |\mathcal{T}_{fi}|^2 d\Phi$$

$$\frac{dW}{T} = \text{Übergangsrate} = \frac{\ddot{\text{Ü-Wahrscheinlichkeit}}}{\text{Zeit}}$$

$$\boxed{\frac{dW}{T} = V(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) |\mathcal{T}_{fi}|^2 d\Phi}$$

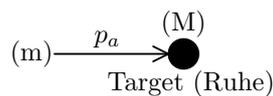
Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{dW}{T} \cdot \frac{1}{|\vec{j}|N}$$

\vec{j} : Stromdichte einlaufend (z.B. a)

N : Anzahl der Targetteilchen in V (z.B. b)

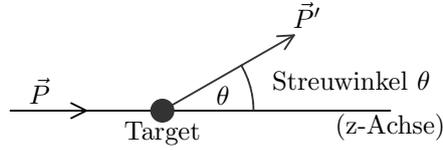
Beispiel:



$$p_a = (p_a^0, \vec{p}_a) \equiv (p^0, \vec{p}) \equiv p$$

$$p_b = (M, \vec{0}) \equiv P$$

Raumwinkel



$$d\Omega = d \cos \theta d\phi$$

Bestimmung von \vec{j} und N

Kontinuum:

$$\langle p|p' \rangle = 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

für endliches Volumen:

$$(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \rightarrow V \cdot \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\langle p|p' \rangle \rightarrow V \frac{2p^0}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

$$\langle p|p \rangle \rightarrow V \frac{2p^0}{(2\pi)^3} = N_a, \text{ Teilchenzahl in } V$$

$$\langle P|P \rangle \rightarrow V \frac{2P^0}{(2\pi)^3} = \frac{2M}{(2\pi)^3} = N (= N_b)$$

Teilchendichte:

$$\varrho_a = \frac{N_a}{V} = \frac{2p^0}{(2\pi)^3}$$

Stromdichte:

$$\vec{j} = \varrho_a \vec{v} = \frac{2p^0}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\vec{p}}{p^0}, \quad |\vec{j}| = \frac{2|\vec{p}|}{(2\pi)^3}$$

Anzahl der Target-Protonen:

$$N = V \frac{2P^0}{(2\pi)^3} = V \frac{2M}{(2\pi)^3}$$

Damit ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{dW}{T} \frac{(2\pi)^3}{2|\vec{p}|} \frac{(2\pi)^3}{2M}$$

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{10}}{4M|\vec{p}|} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \delta^4(P_i - P_f) d\Phi$$

Anmerkung: $|\vec{j}| \cdot N$ kann invariant geschrieben werden:

$$|\vec{j}| \cdot N = M|\vec{p}| = P^0|\vec{p}| = \sqrt{(p \cdot P)^2 - m^2 M^2}$$

Der Wirkungsquerschnitt ist somit in jedem Inertialsystem auswertbar, z.B. im Laborsystem (Target ist in Ruhe) oder im CMS (Schwerpunktsystem: $\vec{p} = -\vec{P}$)

Spezialfälle

- (i) ohne Rückstoß (Rückstoß vernachlässigbar)
 $m \ll M, |\vec{p}|, |\vec{p}'| \ll M, P'^0 \simeq P^0 = M, (\vec{P}' \simeq 0)$
 \rightarrow ruhendes Target, Laborsystem

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{16M^2} |\mathcal{T}_{fi}|^2 d\Omega$$

$$\mathcal{T}_{fi} = \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}} \right]^4 \mathcal{M}_{fi}$$

- (ii) Target mit Rückstoß: $\vec{P}' \neq \vec{P}$
 nur wichtig für große Energien $|\vec{p}| \gtrsim M$.
 $p^0 = |\vec{p}| \equiv E, p'^0 = |\vec{p}'| \equiv E'$.

$$\delta^4(p + P - p' - P') \cdot \frac{d^3 P'}{2P'^0} \cdot \frac{d^3 p'}{2p'^0}$$

über $d^4 P'$ integrieren mittels δ -Funktion ergibt:

$$\delta^4(p + P - p' - P') \cdot \underbrace{\frac{d^3 P'}{2P'^0}}_{\delta((p+P-p')^2 - M^2)} \cdot \underbrace{\frac{d^3 p'}{2p'^0}}_{\frac{1}{2} |\vec{p}'| dp'^0 d\Omega}$$

Es gilt: $|\vec{p}'| d|\vec{p}'| = p'^0 dp'^0$ (ohne Beweis)

Somit ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt nach der allgemeinen Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^{-2}}{16M^2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{M}{M + E(1 - \cos \theta)}$$

für $m \approx 0$, d.h. $|\vec{p}| \gg m$

Energie des gestreuten e^- als Funktion des Streuwinkels. (siehe auch Compton-Streuung mit $M = m_e$)

7.2 Elastische Elektron-Proton-Streuung

Verschiedenen Stufen der Approximation

- (i) statisches Proton (ohne Rückstoß)
Dirac-Proton: Masse M , Spin $\frac{1}{2}$, punktförmig, magnetisches Moment mit $g = 2$

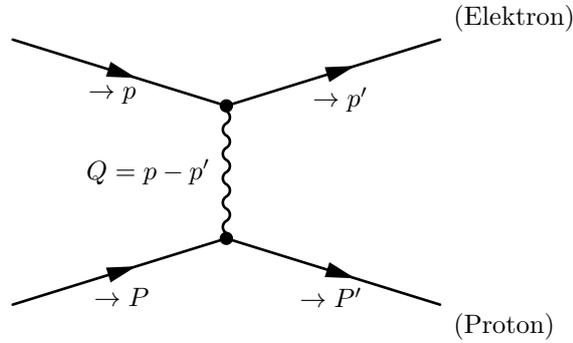
- (ii) mit Rückstoß, Dirac-Proton
- (iii) realistisches Proton (physikalisch)
 - räumliche ausgedehnte Ladungsverteilung
 - magnetisches Moment mit $g \neq 2$

7.2.1 Statisches Proton (Coulomb-Feld)

Notation:

- Elektron-Spinoren: $u(p), u(p')$
- Dirac-Proton: $U(P), U(P')$

Das Matrixelement \mathcal{T}_{fi} ergibt sich graphisch für e^- -Proton-Streuung aus den Feynman-Regeln:



$$\mathcal{M}_{fi} = \bar{u}(p') ieQ_e \gamma^\mu u(p) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{Q^2} \right) \bar{U}(P') (-ieQ_p \gamma^\nu) U(P)$$

$Q^2 = (p - p')^2 \neq 0$, daher $\epsilon \rightarrow 0$ für $|\vec{p}|, |\vec{p}'| \ll M$: $\vec{P} = \vec{P}' = 0$, $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$, $Q_e = -1$, $Q_p = +1$ mit

$$Q^2 = (p^0 - p'^0)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 = -(\vec{p} - \vec{p}')^2 = -\vec{Q}^2 = -4|\vec{p}|^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{fi} = -i \frac{e^2}{Q^2} (\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p)) (U^\dagger(0) \gamma_\mu U(0))$$

$$U(P') = U(P) = U(0) = \sqrt{2M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(normiert gemäß $\bar{U}U = 2M$)

$$\bar{U}(0) \gamma^0 U(0) = U^\dagger(0) U(0) = 2M$$

$$\bar{U}(0) \vec{\gamma} U(0) = \bar{U}(0) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} U(0) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}(0) \gamma^\mu u(0) = (2M, \vec{0})$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{ie^2}{Q^2} \bar{U}(p') \gamma^0 U(p') \cdot 2M$$

$$\mathcal{M}_{fi} = i \frac{e^2}{\vec{Q}^2} \cdot 2M \cdot \bar{u}(p') \gamma^0 u(p)$$

Damit folgt für den Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^{10}}{16M^2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{12}} (2M)^2 \left(\frac{e^2}{\vec{Q}^2} \right)^2 |\bar{u}(p') \gamma^0 u(p)|^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{\vec{Q}^2} \right)^2 |\bar{u}' \gamma^0 u|^2 \quad 1$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{\vec{Q}^2} \right)^2 |\bar{u}' \gamma^0 u|^2$$

Weiteres Vorgehen:

- (a) nicht-relativistische Näherung
- (b) relativistische Rechnung

(a) nicht relativistisch: $|\vec{p}| \ll m$

$$u(p) \simeq u(p') = u(0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u} \gamma^0 u \simeq 2m$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{e^2}{\vec{Q}^2} \right)^2 \cdot 4m^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2} |\tilde{U}(\vec{Q})|^2$$

mit $e^2 = 4\pi\alpha$ und $\vec{Q}^2 = 2\vec{p}^2(1 - \cos\theta) = 4\vec{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$
ergibt sich der **Rutherford-Wirkungsquerschnitt:**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 \alpha^2}{4\vec{p}^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

mit der Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$.

Für die Streuung am Kern mit Z Protonen gilt: $\alpha^2 \rightarrow Z^2 \alpha^2$ und $U(r) \rightarrow ZU(r)$
Dieser Wirkungsquerschnitt entspricht der Streuung von nicht-relativistischen Elektronen an einem ortsfesten Coulomb-Potential.

¹beachte: $U(r) = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$ Coulomb-Potential eines punktförmigen „Protons“; Fourier-Transformation ergibt: $\int d^3x e^{i\vec{Q}\vec{x}} U(r) = \frac{e^2}{\vec{Q}^2} \equiv \tilde{U}(\vec{Q})$

Bemerkenswerte Eigenschaften

- (i) stimmt mit dem klassischen Ergebnis überein
- (ii) ergibt sich aus der nicht-relativistischen Quantenmechanik (Born'scher Näherung) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$ wobei $\psi = e^{ipz} + f(\theta)\frac{e^{ipr}}{r}$, $p = |\vec{p}|$, $\vec{p} = e_z p$, die asymptotische Form der Wellenfunktion bei Streuung am Potential $U(r)$ mit $f(\theta) = \frac{m}{2\pi}\tilde{U}(\vec{Q})$, $\tilde{U} = \int d^3x e^{i\vec{Q}\vec{x}}U(r)$
- (iii) ist zugleich exaktes Ergebnis in Quantenmechanik (!)
- (iv) folgt aus QED in nicht-relativistischer Näherung und Approximation des Protons als statische Punktladung

Ergänzung: Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung

Gegeben: $\rho(\vec{x})$ statische Ladungsverteilungsdichte.

$$\begin{aligned}
 U(\vec{x}) &= \frac{e}{4\pi} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
 \tilde{U}(\vec{Q}) &= \int d^3x e^{i\vec{Q}\vec{x}} U(\vec{x}) = \\
 &= \frac{e}{4\pi} \int d^3x \int d^3x' \frac{e^{i\vec{Q}\vec{x}} \rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \\
 &= \frac{e}{4\pi} \int d^3\xi \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\xi|} e^{i\vec{Q}\vec{x}'} e^{i\vec{Q}\xi} = \\
 &= \frac{e}{4\pi} \int d^3\xi \frac{e^{i\vec{Q}\xi}}{|\xi|} \underbrace{\int d^3x' \rho(\vec{x}') e^{i\vec{Q}\vec{x}'}}_{\tilde{\rho}(\vec{Q})} = \\
 &= \underbrace{\int d^3\xi e^{i\vec{Q}\xi} \left(\frac{e}{4\pi|\xi|}\right)}_{\tilde{U}(\vec{Q})} \cdot eF(\vec{Q}^2)
 \end{aligned}$$

mit $F(\vec{Q}^2)$: Formfaktor, $F(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &\rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot F(\vec{Q}^2)^2 \\
 \tilde{\rho}(0) &= \int d^3x' \rho(\vec{x}') = Q (= e)
 \end{aligned}$$

(b) relativistische (allgemeine) Rechnung

$$\begin{aligned}
 |\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)|^2 &= [\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)] \underbrace{[\bar{u}(p')\gamma^0 u(p)]^*}_{\bar{u}(p)\gamma^0 u(p')} = \\
 &= \bar{u}(p')\gamma^0 u(p)\bar{u}(p)\gamma^0 u(p') = \\
 &= \text{Tr}[(u(p')\bar{u}(p'))\gamma^0(u(p)\bar{u}(p))\gamma^0]
 \end{aligned}$$

Jetzt: Summe über End-Helizitäten und Mittelung über Anfangs-Helizitäten (unpolarisierte Elektronen):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} |\bar{u}_{\sigma'}(p') \gamma^0 u_{\sigma}(p)|^2 = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \text{Tr} [u_{\sigma'}(p') \bar{u}_{\sigma'}(p') \gamma^0 u_{\sigma}(p) \bar{u}_{\sigma}(p) \gamma^0] = \\
& = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\underbrace{\left(\sum_{\sigma'} u_{\sigma'}(p') \bar{u}_{\sigma'}(p') \right)}_{=\not{p}'+m} \gamma^0 \underbrace{\left(\sum_{\sigma} u_{\sigma}(p) \bar{u}_{\sigma}(p) \right)}_{=\not{p}+m} \gamma^0 \right] = \\
& = \frac{1}{2} \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0] = \\
& = \frac{1}{2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^0 \not{p} \gamma^0] + \frac{m^2}{2} \text{Tr} [(\gamma^0)^2] = \\
& = 4m^2 + 4|\vec{p}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

Ergebnis für **Mott-Wirkungsquerschnitt**:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4|\vec{p}|^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(m^2 + |\vec{p}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

- Für $|\vec{p}| \ll m$: Rutherford-Wirkungsquerschnitt
- Für $|\vec{p}| \gg m$: $|\vec{p}| \simeq p^0 = E$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{(Z^2) \alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

physikalisch nur sinnvoll für $|\vec{p}| \ll M$ oder für schwere Kerne ($|\vec{p}| \ll A \cdot M$), großes Z

7.2.2 Proton mit Rückstoß

hochenergetische Näherung ($m \simeq 0$), $|\vec{p}| \gtrsim M$; Proton wird weiterhin als Dirac-Teilchen betrachtet;

Für die Matrixelemente gilt:

$$\vec{P} = 0, \vec{P}' \neq 0, Q^2 = (p - p')^2 = (E - E')^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2, E \neq E'$$

$$\mathcal{T}_{fi} = \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^4 \cdot \mathcal{M}_{fi}$$

$$\mathcal{M}_{fi} = -i \frac{e^2}{Q^2} (\bar{u}'_{\sigma'} \gamma^{\mu} u_{\sigma}) (\bar{U}'_{\lambda'} \gamma_{\mu} U_{\lambda})$$

Spin-Summation und Mittelung (auch über die Proton-Helizitäten (λ, λ')):

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}(\sigma, \sigma', \lambda, \lambda')|^2 \equiv |\overline{\mathcal{M}}|^2$$

Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^{-2}}{16M^2} \left(\frac{E'}{E}\right)^2 |\mathcal{M}|^2$$

mit $Q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$ (aus $Q^2 = (p - p')^2$) und $E' = E \frac{M}{M+E(1-\cos\theta)}$ folgt für den Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\frac{\alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}}_{\substack{\text{Mott-WQ,} \\ \text{CoulombPot}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos\theta)}}_{\substack{\text{Rückstoß-,} \\ \text{Effekt}}} \underbrace{\left[1 - \frac{Q^2}{2M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2}}\right]}_{\text{neu(!)}}$$

Mott-WQ mit Rückstoß

Ursache für den neuen Term: magnetische Eigenschaften des Protons, magnetisches Moment \leftrightarrow Spin, zusätzlich zum Coulomb-Potential $\vec{\mu} = g \frac{e}{2M} \vec{S}$, ($g = 2$ für Dirac-Teilchen)

Exkurs: Magnetisches Moment von Dirac-Teilchen

nicht-relativistischer Limes der Dirac-Gleichung.

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \psi = 0$$

mit $(A^\mu) = (\phi, \vec{A})$. $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$, wobei $\chi = \underbrace{O\left(\frac{p}{m}\right)}_{\ll 1} \cdot \varphi$ wobei φ, χ 2-komponentigen Spinoren darstellen.

Zeitentwicklung gemäß Massenterm in H abspalten:

$$\psi = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

in Dirac-Gleichung einsetzen und nach $\frac{p}{m}$ entwickeln, Terme $O\left(\frac{p}{m}\right)$ vernachlässigen ergibt (nach einiger Rechnung)

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{m} (-i \text{grad} - e\vec{A})^2 + e\phi - \frac{e}{2m} \underbrace{g}_{g=2} \vec{S} \cdot \vec{B} \right] \varphi \quad \text{Pauli-Gleichung}$$

Für ein Dirac-Proton sollte daher gelten:

$$\vec{\mu}_P = \frac{e}{2M} g \vec{S} \quad \text{mit } g = 2$$

tatsächlich jedoch:

$$g_P = 2 + 2\kappa_P \simeq 5,6$$

$$\frac{g_P - 2}{2} = 1,79 = \kappa_P \quad \text{exp. bestimmt}$$

Ursachen:

- im Raum ausgedehnte Verteilung eines zusätzlichen magnetischen Moments
- Daneben ist auch die elektrische Ladung räumlich verteilt. Diese wird durch einen Formfaktor beschrieben
- Entsprechend wird auch die magnetische Momentverteilung durch einen weiteren magnetischen Formfaktor beschrieben.

7.2.3 Realistisches Proton

physikalische Proton:

- räumliche Ausdehnung
- magnetisches Moment $\vec{\mu}_p$ mit $g_p \neq 2$
 $\vec{\mu}_p = \frac{e}{2M} g_p \vec{S}, g_p = 5,6 = 2(1 + k_p)$

Folgerungen:

- Ladungsverteilung \rightarrow Formfaktor am Vertex

$$e\gamma^\mu \rightarrow e\gamma^\mu F_1(Q^2)$$

- zusätzlicher magnet. WW-Term zu κ_p

addiere zu \mathcal{H}_{int} einen magnetischen Term $-\vec{\mu}_p \vec{B} \kappa_p$ (nicht kovariant)
kovariant:

$$-\kappa_P \frac{e}{4M} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu} \equiv \Delta \mathcal{H}_{int}^m$$

Dabei bedeuten:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

$$(F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \vec{B}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}) = \vec{\Sigma}$$

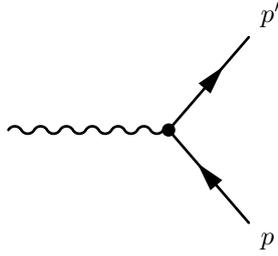
$$\vec{\Sigma} = \left(\begin{array}{c|c} \vec{\sigma} & 0 \\ \hline 0 & \vec{\sigma} \end{array} \right), \quad \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad \text{Pauli-Matrizen}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\kappa_p \frac{e}{4M} \bar{\psi} \sigma_{kl} \psi F^{kl} &= -\kappa_p \frac{e}{2M} \cdot 2 \cdot (\bar{\psi} \vec{\Sigma} \psi) \vec{B} \\ &= -\kappa_p \frac{e}{2M} \cdot \underbrace{2}_{g=2} \cdot (\bar{\psi} \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \psi) \vec{B} \end{aligned}$$

Mit der Störungsrechnung erhält man das S-Matrixelement in 1. Ordnung:

$$S = 1 - \int d^4x \mathcal{H}_{int}$$

Aus $\Delta \mathcal{H}_{int}$ ergibt sich dann der Vertex:



$$\frac{e}{2M} \kappa_p \sigma_{\mu\nu} (P - P')^\nu$$

Begründung:

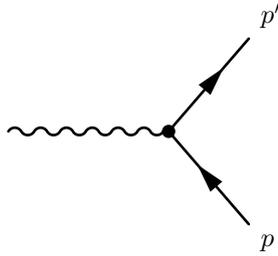
$$\begin{aligned} -\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu} &= 2(\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi) \partial^\nu A^\mu \\ &= -2\partial^\nu (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi) A^\mu + 2 \underbrace{\partial^\nu (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \cdot A^\mu)}_{\rightarrow \sigma} \\ &\quad \left(\int d^4x \partial^\nu (\dots)_\nu \rightarrow 0, \text{Oberflächenterm} \right) \\ &= -2 \underbrace{[(\partial^\nu \bar{\psi}) \sigma_{\mu\nu} \psi + \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} (\partial^\nu \psi)]}_{\text{auswerten: } -i\langle P' | \dots | P \rangle \cdot \frac{e}{4M} \kappa_p} \cdot A^\mu \\ &= (-i) \frac{e}{4M} \kappa_p (-2) [iP'^\nu - iP^\nu] \sigma_{\mu\nu} \\ &= \frac{e}{2M} \kappa_p \sigma_{\mu\nu} (P - P')^\nu \end{aligned}$$

man beobachtet, dass κ_p nicht konstant ist, sondern einer Verteilung unterliegt.

→ Formfaktor $F_2(Q^2)$

κ_p : statisches magnetisches Moment

$F_2(Q^2)$: räumliche Verteilung, $F_2(0) = \kappa_p$

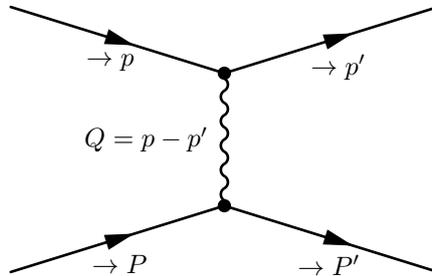


$$ie\gamma_\mu F_1(Q^2) + \frac{e}{2M} F_2(Q^2) \sigma_{\mu\nu} (P - P')^\nu \equiv -ie\Gamma^\mu$$

effektiver Vertex, nicht fundamental

F_1, F_2 : Proton-Formfaktoren (elastisch), empirisch bestimmt

Normierung: $F_1(0) = 1, F_2(0) = \kappa_P$



$$\mathcal{M} = (\bar{u}'_{\sigma'} ieQ_e \gamma^\mu u'_\sigma) \left(\frac{-i}{(p - p')^2} \right) (\bar{U}'_{\lambda'} ie\Gamma_\mu U_\lambda) = \mathcal{M}(\sigma, \sigma', \lambda, \lambda')$$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}(\sigma, \sigma', \lambda, \lambda')|^2$$

Ergebnis:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot \left(\frac{E'}{E} \right) \cdot \left[\left(F_1^2 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) - \frac{Q^2}{2M^2} \cdot \underbrace{(F_1 + F_2)^2}_{\text{eigentl. magn. Formfaktor}} \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

andere Kombination: **Sachs-Formfaktoren:**

$G_E = F_1 + \frac{Q^2}{4M^2} F_2$ $G_M = F_1 + F_2$	$G_E(Q^2 = 0) = 1$ $G_M(Q^2 = 0) = 1 + \kappa_P$
--	--

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ in den G_E, G_M ausgedrückt, ergibt die **Rosenbluth-Formel** (elastische Elektron-Proton-Streuung):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot \left(\frac{E'}{E} \right) \cdot \left[\frac{G_E^2 - \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 - \frac{Q^2}{4M^2}} - \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Anmerkungen:

- gilt auch für Neutronen: G_E^N, G_M^N (zu Formfaktoren siehe Povh, Rith, ...)
- hier: $Q^2 = (p - p')^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} < 0$
häufige andere Konvention: $Q^2 = -(p - p')^2 > 0$ ($Q^2 \rightarrow -Q^2$)
- Die Formfaktoren zeigen schnellen Abfall mit Q^2 im GeV-Bereich \rightarrow Wirkungsquerschnitt für die elastische e-p-Streuung fällt schneller ab als für ein punktförmiges Dirac-Teilchen.
Stattdessen: Zunahme des inelastischen Wirkungsquerschnittes für $Q^2 \gg M^2$

Anmerkung zur Umrechnung $F_1, F_2 \rightarrow G_E, G_M$:

$$\begin{aligned} & G_E^2 - \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2 = \\ &= F_1^2 + \left(\frac{Q^2}{4M^2} \right) F_2^2 + 2F_1 F_2 \frac{Q^2}{4M^2} - \frac{Q^2}{4M^2} (F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2) = \\ &= F_1^2 + \left(\frac{Q^2}{4M^2} \right)^2 F_2^2 - \frac{Q^2}{4M^2} F_1^2 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 = \\ &= F_1^2 \left(1 - \frac{Q^2}{4M^2} \right) - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \left(1 - \frac{Q^2}{4M^2} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{Q^2}{4M^2} \right) \left(F_1^2 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \end{aligned}$$

7.3 Fermi's goldene Regel

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E') \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_e} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E') V$$

mit Übergangselement $\mathcal{M}_{fi} = \langle \Psi_F | H_{int} | \Psi_i \rangle$

$$\mathcal{M}_{fi} = \int \Psi_F^* H_{int} \Psi_i dV$$

„Final state“ Wechselwirkungsoperator „initial state“

und mit $\rho(E') =$ Zahl der Endzustände im Energieintervall dE' :

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'}$$

Ein Teilchen „beansprucht“ ein Phasenraumvolumen von $(2\pi\hbar)^3$. Das verfügbare Phasenraumvolumen zwischen $|\vec{p}'|$ und $(|\vec{P}'| + dp')$ ist:

$$\underbrace{V}_{\text{Ortsraum}} \times \underbrace{4\pi p'^2 dp'}_{\text{Impulsraum}}$$

mit $E' = E'(p')$ ist somit $\frac{dn(E')}{dE'}$ bestimmbar.

7.4 Berechnung des Streuquerschnitts

Wir benutzen die **Born'sche Näherung**, d.h. einlaufende und auslaufende Teilchen werden als ebene Wellen beschrieben.

[NB: Anwendbar, wenn die Wechselwirkung „weit weg“ vom Streuzentrum (vom Ort der Quelle und des Detektors) vernachlässigbar ist.]

$$\Psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar} \quad \Psi_F = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}'\vec{r}/\hbar}$$

$$W = \frac{\sigma v_e}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{dn}{dE'}$$

$$\frac{d\sigma \cdot v_e}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{dn}{dE'} \cdot \left(\frac{d\Omega}{4\pi} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V}{v_e} \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot \frac{V 4\pi p'^2 dp'}{(2\pi\hbar)^3 dE'} \left(\frac{1}{4\pi} \right)$$

Im hochrelativistischen Grenzfall ($E_{e^-} \gg m_e c^2 = 0,511 \text{ MeV}$) gilt:

$$v_e \simeq c \quad \text{und} \quad p' \simeq \frac{E'}{c}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dabei:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 2\pi}{\hbar c} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{E'^2}{c^2 (2\pi\hbar)^3 c} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

7.5 Berechnung des Matrixelements \mathcal{M}_{fi}

Elektromagnetische Wechselwirkung: $H_{int} = e \cdot \phi(\vec{r})$ mit $\phi(\vec{r})$ als elektrostatisches Potential.

$$\mathcal{M}_{fi} = \int \Psi_F^* H_{int} \Psi_i d^3r = \frac{e}{V} \int e^{-i\vec{p}'\vec{r}/\hbar} \phi(r) e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar} d^3r = \frac{e}{V} \int \phi(r) \cdot e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r$$

mit $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$. \vec{q} ist die Differenz von „Eingangsimpuls“ minus „Ausgangsimpuls“ des Elektrons, oder der Impulsübertrag auf den Kern. $\mathcal{M}_{fi} = M_{fi}(\vec{q})$, \mathcal{M}_{fi} hängt also vom Impulsübertrag ab und kann als Fouriertransformierte des Potentials betrachtet werden.

Nun kennen wir $\phi(r)$ und verwenden $\Delta\phi = -\rho(r)$ (Poissongleichung) sowie die **Greensche Gleichung** (gültig bei hinreichend grossen Integrationsgrenzen, so daß die Integranden verschwinden):

$$\int u(\Delta v) d^3r = \int (\Delta u) \cdot v d^3r$$

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{e}{V} \int \phi(r) \underbrace{e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}}_{-\frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2} \Delta e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}} d^3r = \frac{-e\hbar^2}{V|\vec{q}|^2} \int \Delta\phi(r) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{fi} = \frac{e\hbar^2}{V|\vec{q}|^2} \int \rho(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r}$$

Das Matrixelement (i.e. Übergangselement) \mathcal{M}_{fi} kann auch als Ladungsverteilung (i.e. der Protonen) angesehen werden. Für kugelförmige Ladungsverteilungen gilt: $\rho(\vec{r}) = \rho(r) = Ze \cdot F(r)$ mit $F(r) :=$ radiale Verteilungsfunktion der Protonen. (Normierung: $\int F(r) d^3r = 4\pi \int F(r) dr = 1$)

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{4\pi Z\alpha\hbar^3 c}{V|\vec{q}|^2} \cdot \int F(r) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r$$

mit $\alpha := e^2/4\pi\hbar c$ und endlich

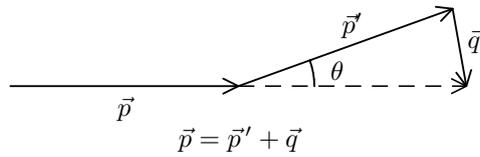
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|\vec{q}c|^4} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

mit $F(\vec{q}) = \int F(r) \exp(i\vec{q}\vec{r}/\hbar) d^3r$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{\substack{\text{Streuung am} \\ \text{punktförmigen} \\ \text{Potential}}} \times |F(\vec{q})|^2}$$

Messen des differentiellen Wirkungsquerschnitts und die Abweichung von der Rutherfordformel erlaubt die Bestimmung des **Formfaktors** $|F(\vec{q})|^2$ und damit der radialen Verteilungsfunktion der elektrischen Ladung.

Zusammenhang Impulsübertrag-Streuwinkel:

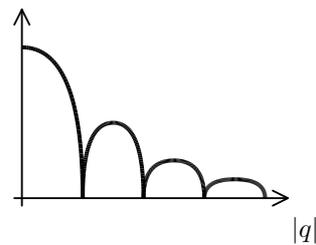
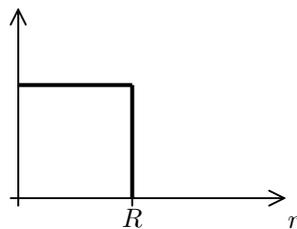
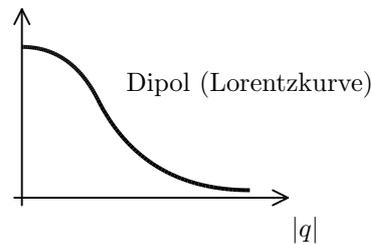
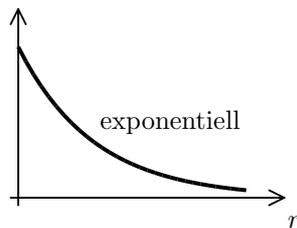
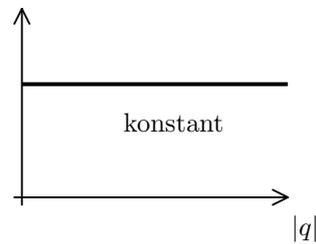
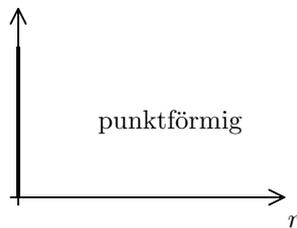


Für elastische Streuung gilt $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$ und $\frac{q}{2p} = \sin(\theta/2)$, $q = 2p \sin(\theta/2)$. Damit wird der differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4E'^2 \sin^4(\theta/2)}}_{\text{Rutherfordstrahlung}} \cdot \underbrace{|F(\vec{q})|^2}_{\substack{\text{Abweichung vom} \\ \text{punktförmigen} \\ \text{Streuzentrum}}}$$

Beispiele für Ladungsverteilungen und Formfunktionen

	$F(r)$	$F(q^2)$	
(Punkt)	$\frac{\delta(r)}{4\pi}$	1	(konstant)
(exponentiell)	$\sim \exp(-ar)$	$\sim (1 + \frac{q^2}{a^2 \hbar^2})^{-2}$	(Dipol)
(Gauß)	$\sim \exp(-\frac{a^2 r^2}{2})$	$\sim \exp(-\frac{q^2}{2a^2})$	(Gauß)
(hom. Kugel)	$\begin{cases} c & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	$\sim (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ mit $\alpha = \frac{ q R}{\hbar}$	(oszillierend)



- a) Elektron-Elektronstreuung (Elektronen sind „punktförmig“; sie sind Elementarteilchen)
- b) Elektron-Protonstreuung (Protonen sind offensichtlich nicht punktförmig)
- c) z. B. Elektron-⁴⁰Ca-Streuung (mit abgerundetem Rand): Analogon zur Beugung in der Optik. Dort ist die Intensität $I = I(\theta)$ die Fouriertransformierte der räumlichen Apertur (z. B. Spalt)

Ladungsverteilung der Kerne

Aus den gemessenen Formfaktoren wurden Ladungsverteilungen der Atomkerne bestimmt. In guter Näherung kann die radiale Verteilung mit einer Fermifunktion mit 2 freien Parametern beschrieben werden:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

mit c : Radius für $\rho(c) = \frac{1}{2}\rho(0)$ und a : Maß für Randbereich. Für größere Kerne gilt: $c \simeq 1,07 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$ und $a \simeq 0,54 \text{ fm}$ (\Rightarrow unabhängig von A) (1 fm = 10^{-13}cm)

Folgerungen:

- i) Kerne sind keine „Kugeln“ mit scharf begrenzten Oberfläche.
- ii) Im Inneren ist die Ladungsdichte nahezu konstant. Bestätigung des Bildes vom Tröpfchenmodell.

Bemerkungen zur Herleitung

Die Ableitung der Rutherfordgleichung basierte auf folgenden Annahmen:

- i) Die Born'sche Näherung
- ii) Elastische Streuung
- iii) Einfallendes Teilchen und Targetkern haben keinen Spin

Zu i): Man kann zeigen, dass Bornsche Näherung erfolgreich die Streuung beschreibt, wenn gilt: $Z\alpha \ll 1$. Für sehr schwere Kerne sind Korrekturen nötig; die wesentlichen physikalischen Aspekte sind aber auch mit der Bornschen Näherung zu verstehen.

Zu ii): $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |q|^{-4}$ bleibt gültig, auch wenn der Rückstoß des Kerns berücksichtigt wird. Nur $q = 2p \sin(\theta/2)$ darf nicht mehr verwendet werden!

Abschätzung der Rückstoßenergie (Übung)

4-er Vektoren, z. B. Ort und Impuls $x = (ct, \vec{x})$, $p = (E/c, \vec{p})$ Skalarprodukte von 4-er Vektoren sind Lorentzinvariant! Allgemein gilt für 2 4-er Vektoren:

$$ab := a_0 b_0 - \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{\substack{\text{gew. Skalarprodukt} \\ \text{v. d. räuml. Komp.}}$$

z.B. $p^2 = (E/c)^2 - \vec{p}^2$ konstant in jedem Inertialsystem. Im Ruhesystem gilt:
 $\vec{p} = 0$ und $E = m_0 c^2$

$$\Rightarrow p^2 = m_0^2 c^2$$

$$\Rightarrow (\text{in jedem System}) E^2 = m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$$

Kinematik der e^- - Streuung am Kern

$e^- \leftrightarrow p$, Kern $\leftrightarrow P$

$$\text{vor der Streuung: } p = (E/c, \vec{p})$$

$$P = (Mc, 0)$$

$$\text{nach der Streuung: } p' = (E'/c, \vec{p}')$$

$$P' = (E'_K/c, \vec{P}')$$

Energie- und Impulserhaltung:

$$p + P = p' + P'$$

Quadrieren auf beiden Seiten:

$$p^2 + 2pP + P^2 = p'^2 + 2p'P' + P'^2$$

weil $p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2$ und $P^2 = P'^2 = M^2 c^2$, gilt $pP = p'P'$ bzw.

$$pP = p'(p + P - p') = p'p + p'P - m_e^2 c^2$$

$$E \cdot M = E'E/c^2 - \underbrace{\vec{p} \cdot \vec{p}'}_{|\vec{p}||\vec{p}'| \cos \theta} + E' \cdot M - m_e^2 c^2$$

Für den hochrelativistischen Fall, also $E \gg m_e c^2$ und $E' \gg m_e c^2$ ($\simeq 511 \text{keV}$) gilt: $|\vec{p}| \simeq E/c$ und $|\vec{p}'| \simeq E'/c$, also:

$$E \cdot M = E'E/c^2 - E'E/c^2 \cos \theta + E'M - m_e^2 c^2 = E' \left(\frac{E}{c^2} (1 - \cos \theta) + M \right) - m_e^2 c^2$$

$$E' \approx \frac{E \cdot M}{\frac{E}{c^2} (1 - \cos \theta) + M}$$

z.B. für $E \simeq 0,5 \text{GeV}$ und $A \simeq 50$ ist $\frac{\Delta E}{E} = \frac{E' - E}{E} \simeq 2\%$

Zu iii) (Spin des Elektrons): Bisher wurde nicht die Wechselwirkungsenergie des magnetischen Moments von e^- mit dem Magnetfeld des Kerns berücksichtigt. Im Ruhesystem des e^- : Magnetfeld des geladenen Kerns (\rightarrow elektr. Strom erzeugt \vec{B}) ergibt WW-Energie $W \sim \vec{\mu}_e \vec{B}$.

Herleitung von Mott für Targetkerne

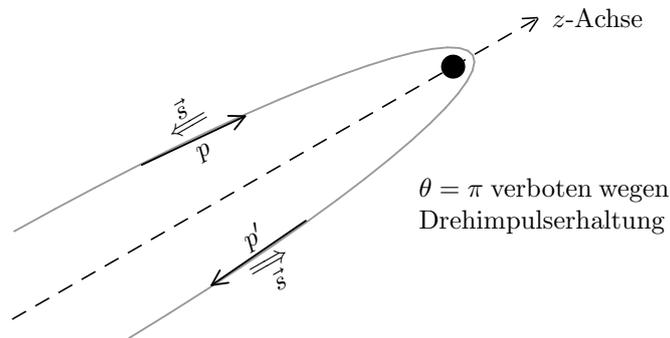
ohne Spin (Rückstoß vernachlässigt):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) (1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

Bemerkungen:

- Für $\beta \rightarrow 0$ wird $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth.}$ (für $\beta \rightarrow 0$ entsteht kein Magnetfeld)
- Für hohe Werte von β wird Abfall des Wirkungsquerschnitts mit θ noch deutlicher.
- Für $\beta = 1$ ist $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth.} \cos^2 \frac{\theta}{2}$ und $\rightarrow 0$ für $\theta = \pi$

Dies ist äquivalent zur Aussage: Bei der (elektromagnetischen) Streuung von hochrelativistischen e^- an spinlosen Kernen bleibt die relative Stellung des e^- -Spins zum e^- -Impuls erhalten!



Nur wenn die „Helizität“ $H = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| |\vec{p}|}$ bei der Streuung von z. B. $H = -1$ zu $H = +1$ geändert werden dürfte, wäre Rückwertsstreuung erlaubt. In der Tat bleibt H in der elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten (allgemein: in jeder V- oder A-WW).

Kapitel 8

Elektromagnetische Strahlungsübergänge

8.1 Allgemeine Vorbetrachtung

In einem physikalisches System mit diskreten Energieniveaus (Atom oder Kern) entstehen durch die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischem Feld Übergänge durch Emission oder Absorbition von Photonen.

Eine wichtige Größe ist $\frac{d}{\lambda}$,

mit d : Durchmesser der Quelle und λ : Wellenlänge der Strahlung

- Hülle: $E_\gamma \sim O(1 \text{ eV})$, $\lambda \sim \cdot 10^{-7} \text{ m}$, $d \sim \cdot 10^{-10} \text{ m}$, $\frac{d}{\lambda} \sim \cdot 10^{-3}$, $E_\gamma = \Delta E_{\text{Hülle}} \ll m_e \simeq 0,5 \text{ MeV}$, daher nicht-relativistisch.
- Kern: E_γ bis $O(1 \text{ MeV})$, λ bis 10^{-13} m , $d \simeq \cdot 10^{-15} \dots \cdot 10^{-14} \text{ m}$ (Kern), $\frac{d}{\lambda} \simeq \cdot 10^{-2}$ typisch.

Klassische Elektrodynamik: Für $\frac{d}{\lambda} \ll 1$ dominiert Dipol-Strahlung (falls erlaubt)

Bei Kernen sind auch höhere Multipole wichtig!

8.1.1 Zeitabhängige Störungstheorie für Übergänge

$$H = H_0 + H_{int}$$

mit

- H_0 : zeitunabhängiges, ungestörtes System;
- $H_{int}(t)$: Stör-Operator, Wechselwirkungsoperator

Wechselwirkungsbild:

- Operatoren: Heisenberg-Bild, Dynamik $\sim H_0$
- Zustände: Schrödinger-Bild, Dynamik $\sim H_{int}$

$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$ mit $i\frac{dU}{dt} = H_{int}U$, $U(t_0, t_0) = 1$

$$\Leftrightarrow U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_{int}(t') U(t', t_0)$$

\Rightarrow iterative Lösung in 1. Ordnung Störungsrechnung:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_{int}(t')$$

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} U(t, t_0)$$

$|i\rangle$: Zustand zur Zeit t_0 ($\rightarrow -\infty$)

$\langle f|$: Zustand zur Zeit t ($\rightarrow +\infty$)

S-Matrixelement (Übergangs-Amplitude):

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f|H_{int}|i\rangle$$

für $|f\rangle \neq |i\rangle$ und in 1. Ordnung

$|i\rangle, |f\rangle$ seien Eigenzustände von $H_0 \equiv$ stationäre Zustände des ungestörten Systems $\Rightarrow \langle f|H_{int}|i\rangle \sim e^{i(E_f - E_i)t}$

Falls $H_{int} \sim e^{i\omega t}$ (periodische Zeitabhängigkeit)

$$S_{fi} = -i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - E_i + E_f)t}}_{2\pi\delta(\omega - E_i + E_f)} \underbrace{\langle f|\dots|i\rangle}_{M_{fi}}$$

$|S_{fi}|^2 =$ Übergangs-Wahrscheinlichkeit

$$|S_{fi}|^2 = 2\pi \cdot \delta(\omega - E_i + E_f) \cdot |M_{fi}|^2$$

Trick (analog zu Kap. 7.1):

$$2\pi\delta(\omega - \omega') \cong \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(\omega - \omega')t}$$

$$|2\pi\delta(\omega - \omega')|^2 \cong 2\pi T \delta(\omega - \omega')$$

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{\text{Ü-Wahrscheinlichkeit}}{\text{Zeit}} =: \text{Übergangsrate}$$

$$\Rightarrow \frac{|S_{fi}|^2}{T} = 2\pi\delta(\omega - E_i + E_f) \cdot |M_{fi}|^2$$

$$dw_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{T} dw \quad \text{für Übergang in } [w, w + dw]$$

Übergangswahrscheinlichkeit:

$$w_{fi} = 2\pi \int dw \frac{|S_{fi}|^2}{T}$$

$$\boxed{w_{fi} = 2\pi |M_{fi}|^2 \Big|_{\omega = E_i - E_f}} \quad (\text{Fermis Goldene Regel})$$

8.1.2 Übergänge im Atomkern

Verbleibendes Problem: Berechnung des restlichen Matrixelements M_{fi} .

H_0 sei ab jetzt ein ungestörtes Atom/Kern.

Effektives 1-Teilchen-Modell:

Übergänge zwischen den diskreten Energieniveaus von H_0 erfolgen jeweils durch ein Elektron/Nukleon. Befindet sich in einem effektiven Potential V_{eff} , gebildet von allen anderen Elektronen+Kern (Atom) oder von allen anderen Nukleonen (Kern).

Kern: Nukleon angeregt (Schalen-Modell) \rightarrow Energiezustand durch Emission von γ -Quant. (jedoch gibt es auch kollektive Anregungen.)

WW mit elektromagnetischem Strahlungsfeld $A^\mu(x)$:

nicht relativistisch ergibt sich der Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2M} (\vec{P} - e\vec{A})^2 + \underbrace{V_{\text{eff}}}_{\text{Kern-Bindungs-Potential}} - \underbrace{\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}}_{\text{magn. WW vom Spin}}$$

mit

- M : Elektron-/Nukleon-Masse
- $\vec{\mu}_s = g \frac{e}{2M} \vec{S}$: magnetisches Moment vom Spin
- \vec{A} : Strahlungsfeld mit $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ (Strahlungseichung), $A^0 = 0$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$,
 $E = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$H = \underbrace{\frac{1}{2m} \vec{P}^2 + V_{\text{eff}}}_{=H_0} - \underbrace{\frac{e}{2M} (\vec{P} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{P})}_{=H_{\text{int}}} - \vec{\mu}_s \cdot \vec{B} + \underbrace{\frac{e^2}{2M} \vec{A}^2}_{\substack{\text{trägt} \\ \text{nicht} \\ \text{zu den} \\ \text{Übergängen} \\ \text{bei}}}$$

Wegen $\nabla \vec{A}$ ist $\vec{P} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{P}$

$$\Rightarrow H_{\text{int}} = -\frac{e}{M} \vec{A} \vec{P} - \vec{\mu}_s \cdot \nabla \times \vec{A}$$

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ als klassisches Feld hat Probleme:

- spontane Emission: $\vec{A} = 0$ für $t \rightarrow -\infty$
- woher kommen die „Photonen“?

Konsistentes Verfahren: Strahlungsfeld als Quantenfeld (Operator), Erzeugung und Vernichtung von Photonen.

also ab jetzt: $\vec{A}(\vec{x}, t)$ als **Quantenfeld**

8.2 Elektromagnetisches Strahlungsfeld

Bisher haben wir Photonen als Impuls- und Helizitätszustände $(k^\mu, \vec{\epsilon}_\lambda)$ ($\lambda = \pm 1$) betrachtet.

Die $|i\rangle$ und $|f\rangle$ sind Drehimpuls-Zustände (von H_0). Daher sind dies auch die Drehimpuls-Zustände von Photonen (wegen Drehimpulserhaltung).

Wir werden nun $\vec{A}(\vec{x}, t)$ nach Drehimpuls-Wellenfunktionen entwickeln.

Klassische Betrachtung

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = e^{i\omega t} \vec{A}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta + k^2)\vec{A}(\vec{x}) = 0}, \quad \omega = k = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

Die ist die Helmholtz-Gleichung (folgt aus $\square \vec{A} = 0$)

Die Lösungen sind sphärisch: $\vec{A}(r, \theta, \varphi)$

zunächst: skalares Problem $(\Delta + k^2)\phi(r, \theta, \varphi) = 0$;

Lösungen in Polarkoordinaten r, θ, φ :

$$\phi(r, \theta, \varphi) \equiv u_{klm} = g_l Y_{lm}(\theta, \varphi) = k \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

wobei:

- $l=0, 1, 2, \dots$
- $k \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(kr) =: g_l(kr)$
- j_l : sphärische Bessel-Funktionen (siehe QM, Streutheorie, Partialwellen)
- u_{klm} vollständiges Orthonormalsystem
- $\int d^3x u_{klm}^* u_{k'l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(k - k')$

allgemeine Lösung durch Entwicklung nach u_{klm} .

jetzt: Vektorproblem $(\Delta + k^2)\vec{A} = 0$;

Der quantenmechanische Bahndrehimpulsoperator

$$\vec{L} = \frac{1}{i} (\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

ist nur von θ und φ abhängig. Somit gilt

$$[\Delta, \vec{L}] = 0$$

,da $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \vec{L}^2$.

daher

$$(\Delta + k^2)\vec{L}u_{klm} = \vec{L} \underbrace{(\Delta + k^2)u_{klm}}_{=0} = 0$$

$\vec{A} \sim \vec{L}u_{klm}$ ist Lösung von $(\Delta + k^2)\vec{A} = 0$.

$$\vec{Y}_{lm} := \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{L} Y_{lm} \quad \text{Vektor-Kugelfunktionen } (l > 0)$$

Eigenschaften:

- orthogonal: $\int d\Omega \vec{Y}_{lm} \cdot \vec{Y}_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$
- transversal: $\nabla \cdot \vec{Y}_{lm} = 0$
- $\Rightarrow \nabla \cdot [g_l(kr) \vec{Y}_{lm}] = 0$

Es gibt 2 Typen von Lösungen, bezeichnet als

- M_l : magnetische 2^l -Pol-Strahlung
- E_l : elektrische 2^l -Pol-Strahlung

mit $l=1$: Dipol, $l=2$: Quadrupol, $l=3$: Oktupol, ...

M_l :

$$\vec{u}_{klm}^{(M)} := g_l(kr) \vec{Y}_{lm} \quad M_l\text{-Strahlung}$$

E_l :

$$\vec{u}_{klm}^{(E)} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{u}_{klm}^{(M)} = \frac{1}{k} \nabla \times [g_l(kr) \vec{Y}_{lm}] \quad E_l\text{-Strahlung}$$

$\vec{u}_{klm}^{(M,E)}$ sind zusammen vollständig und orthonormiert [quantisiert: Drehimpuls-zustände des Photons]

quantisiertes Feld

Entwicklung nach den Drehimpuls-Eigenzuständen des Photons

$$\vec{J}^2, J_3, \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, |jm\rangle, j = 1, 2, \dots$$

Photonenzustände: $|M(E), ljm\rangle$; M,E zunächst aus der klassischen Terminologie Benutze die sphärischen Lösungen $\vec{u}_{kjm,E}$ und $\vec{u}_{kjm,M}$ (hier j statt l). Damit schreibt sich die Entwicklung für \vec{A} :

$$\begin{aligned} \vec{A} = \sum_{j,m} \int \frac{dk}{\sqrt{2\omega}} & \left(a_{kjm,E} \vec{u}_{kjm}^{(E)} e^{-i\omega t} + \right. \\ & + a_{kjm,M} \vec{u}_{kjm}^{(M)} e^{-i\omega t} + \\ & + a_{kjm,E}^\dagger \vec{u}_{kjm}^{(E)*} e^{i\omega t} + \\ & \left. + a_{kjm,M}^\dagger \vec{u}_{kjm}^{(M)*} e^{i\omega t} \right) \end{aligned}$$

a, a^\dagger sind wieder Vernichter/Erzeuger von Photonen, in den Zuständen $|E, kjm\rangle$ und $|M, kjm\rangle$

$$\begin{aligned} a_{kjm,E}^\dagger |0\rangle &= |E, kjm\rangle \quad (k = \omega) \\ a_{kjm,M}^\dagger |0\rangle &= |M, kjm\rangle \\ a_{kjm,E} |E, k'j'm'\rangle &= \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta(k - k') |0\rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

(usw.)

Exkurs: Kopplung von \vec{L} und Spin \vec{S} ($S = 1$)

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ 3×3 Matrizen.

$\vec{S}^2 = 1 \cdot (1 + 1)1$, $S_3 \vec{\chi}_{m_s}$, $m_s = 0, \pm 1$ Eigenwerte von S_3 , $\vec{\chi}_{m_s}$ zugehörige Eigenvektoren (3-komponentige Vektoren).

Eigenwerte von \vec{J}^2 , J_3 : j, m

zu gegebenen $l, s = 1$ gibt es für j die Werte $j = l + 1, l, l - 1$ ($l > 0$).

Die Eigenzustände von $\vec{J}^2, J_3, \vec{L}^2, \vec{S}^2$ sind $|jml\rangle$.

$$|jml\rangle = \sum_{\substack{m_l, m_s \\ m_l + m_s = m}} |lm_l, 1m_s\rangle \underbrace{\langle lm_l, 1m_s | jml\rangle}_{\text{Clebsch-Gordon-Koeffizienten}} \quad \star$$

In der Ortsdarstellung: $|lm_l\rangle = Y_{lm_l}(\theta, \varphi)$, $|1m_s\rangle = \vec{\chi}_{m_s}$. Dann lautet \star konkret:

$$\mathcal{Y}_{jm}^l(\theta, \varphi) = \sum_{m_l, m_s} Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \vec{\chi}_{m_s} \langle lm_l, 1m_s | jml\rangle$$

Die \mathcal{Y}_{jm}^l sind 3-komponentige Vektoren: Vektor-Kugelfunktionen (im weiteren Sinn), auch Kugel-Vektoren, sphärische Vektoren.

Bei Raumpiegelung \mathbb{P} ist die Parität bestimmt durch: $\mathcal{P} = (-1)^{l+1}$

$$\mathbb{P}\mathcal{Y}_{jm}^l = (-1)^{l+1}\mathcal{Y}_{jm}^l$$

da $\mathbb{P}Y_{lm_l} = (-1)^l Y_{lm_l}$ und $\mathbb{P}\vec{\chi}_{m_s} = -\vec{\chi}_{m_s}$.

Parität $\mathcal{P} =$ Eigenwert von \mathbb{P}

Für jedes l : 3 Werte für j : $j = l + 1, l, l - 1$

Für jedes j : 3 Werte für l : $l = j - 1, j, j + 1$ ($j > 0$)

$$l = j \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P} = (-1)^{l+1} = (-1)^{j+1}$$

$$l = j \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P} = (-1)^{(j \pm 1) + 1} = (-1)^j$$

Das folgende hier ohne Beweis:

- für $l = j$ gilt:

$$\mathcal{Y}_{jm}^{l=j} = \vec{Y}_{jm} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \vec{L} Y_{jm}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_{kjm}^{(M)} = g_j(kr) \mathcal{Y}_{jm}^{l=j}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = (-1)^{j+1}} (M_j)$$

- für $l = j \pm 1$ gilt: es gibt Linearkombination von \mathcal{Y}_{jm}^{j+1} und \mathcal{Y}_{jm}^{j-1} :

$$\vec{u}_{kjm}^{(E)} = \frac{1}{k} \nabla \times (g_j(kr) \mathcal{Y}_{jm}^j)$$

$$= a_j(r) \mathcal{Y}_{jm}^{j+1} + b_j(r) \mathcal{Y}_{jm}^{j-1}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = (-1)^j} (E_j)$$

$${}^1\nabla \times (g(r) Y_{jm}) = i \left(\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{j}{r} g \right) \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \mathcal{Y}_{jm}^{j+1} + i \left(\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{j+1}{r} g \right) \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \mathcal{Y}_{jm}^{j-1}$$

8.3 Multipol - Strahlung

Wir betrachten im Folgenden die **Emission** (Absorption analog)

$$S_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f | H_{int} | i \rangle$$

$$H_{int} = -\frac{e}{M} \underbrace{\vec{A}\vec{P}}_{\text{Operatoren}}$$

mit

- \vec{A} : Photonfeld in (jm -Entwicklung
- $|i\rangle = |a\rangle$: Atom-/Kernzustand, stationär, Energie E_a
- $|f\rangle = \underbrace{|E, k, j, m\rangle}_{\text{Photon-Zustand}} |b\rangle$
 mit $\omega = k$,
 Drehimpuls j, m
 Parität $(-1)^j$
- $|b\rangle$: Atom-/Kernzustand stationär, Energie E_b
- $\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{x})$ Wellenfunktionen von $|a\rangle, |b\rangle$

$$\langle E, k, j, m | \vec{A} | 0 \rangle = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \vec{u}_{k, j, m}^{(M, E)*} \quad \text{Wellenfunktion des Photons}$$

(i) E_j - **Strahlung** (elektrische 2^j -Pol-Strahlung)

$$\langle f | H_{int} | i \rangle = -\frac{e}{M} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \int d^3x \psi_b^* \left(\vec{u}_{k, j, m}^{(E)*} \cdot \vec{P} \right) \psi_a$$

Benutze nun:

- stat. Zustände \rightarrow Faktor $e^{i(\omega - E_a + E_b)t}$
- \vec{P} ist Operator im Heisenberg - Bild:

$$\dot{\vec{P}} = M\dot{\vec{X}} = M(-i)[\vec{x}, H_0] = -iM(\vec{x}H_0 - H_0\vec{x}) \Rightarrow \text{Faktor } (E_a - E_b)$$

$$\langle f | H_{int} | i \rangle = i \underbrace{e^{i(\omega - E_a + E_b)t}}_{\text{t-Int. } \delta(\omega - E_a + E_b) \cdot 2\pi} \underbrace{\frac{E_b - E_a}{\sqrt{2\omega}} e \int d^3x \psi_b^* \left(\vec{u}_{k, j, m}^{(E)*} \cdot \vec{x} \right) \psi_a}_{=M_{fi}}$$

$$\boxed{w_{fi} = 2\pi |M_{fi}|_{\omega=E_a-E_b}^2} \quad \text{Übergangsrate}$$

Zur Berechnung von M_{fi} : benutze $\vec{u}_{k, j, m}^{(E)} = \frac{1}{k} \nabla \times [g_j(kr) \vec{Y}_{jm}]$, $\vec{x} = r\vec{e}_r$

$$g_j(kr) = k \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_j(kr)$$

Näherung für $kr \ll 1$ (da $kr < kR \sim \frac{d}{\lambda} \lesssim 1$, R : Atom-, Kernradius):

$$j_j(kr) \simeq \frac{(kr)^j}{(2j+1)!!}$$

mit $(2j+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2j+1)$
nach einiger Rechnung:

$$M_{fi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{j+1}{j}} \frac{\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!} \langle Q_{jm}^E \rangle_{ba}$$

$$\boxed{\langle Q_{jm}^E \rangle_{ba} = e \int d^3x \psi_b^* (r^j Y_{jm}^*) \psi_a} \text{ elektrisches } 2^j\text{-Pol-Moment}$$

Matrizelement des elektrischen Multipol-Operators

Zum Vergleich in der Elektrostatik: $Q_{jm}^E = \int d^3x \rho r^j Y_{jm}^*$

Übergangsrate:

$$\boxed{w_{fi} = \frac{2(j+1)\omega^{2j+1}}{j[(2j+1)!!]^2} |\langle Q_{jm}^E \rangle_{ba}|^2}$$

$w_{fi} \neq 0$, wenn $\langle Q_{jm}^E \rangle_{ba} \neq 0$. Dies liefert die **Auswahlregeln!**

- Paritätserhaltung: $\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_b \cdot \mathcal{P}_\gamma$, $\mathcal{P}_a \cdot \mathcal{P}_b = \mathcal{P}_\gamma$ mit $\mathcal{P}_\gamma = (-1)^j$ und $\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b$ Paritäten von $|a\rangle, |b\rangle$

$$\boxed{\mathcal{P}_a \cdot \mathcal{P}_b = (-1)^j} \text{ für } E_j\text{-Strahlung}$$

- Drehimpulserhaltung: $\vec{J}_a = \vec{J}_b + \vec{J}_\gamma$ (klassisch) quantenmechanische Addition: $j_a = j_b + j, \dots, |j_b - j|$ oder

$$\boxed{|j_a - j_b| \leq j \leq j_a + j_b}$$

Bem: $\langle Q_{jm}^E \rangle_{ba} \sim R^j$, $w_{fi} \sim R^{2j} \omega^{2j} \sim \left(\frac{d}{\lambda}\right)^{2j}$
(Höhere Multipole sind unterdrückt)

(ii) M_j - **Übergänge** (magnetische 2^j -Pol-Strahlung)

$$M_{fi} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{e}{M} \int d^3x \psi_b^* \left(\vec{u}_{kjm}^{(M)} \cdot \vec{P} \right) \psi_a$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{u}_{kjm}^{(M)} &= g_j(kr) \vec{Y}_{jm} = \\ &= \frac{\vec{L}}{\sqrt{j(j+1)}} (g_j(kr) Y_{jm}) = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} [\vec{r} \times \nabla (g_j(kr) Y_{jm})] \end{aligned}$$

benutze: $[\vec{r} \times \nabla(\dots)] \cdot \vec{P} = -(\vec{r} \times \vec{P}) \cdot \nabla(\dots)$ und die Entwicklung von g_j für $kr \ll 1$ ergibt:

$$M_{fi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{j+1}{j}} \frac{\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!} \cdot \langle Q_{jm}^M \rangle_{ba} \psi_a$$

$$\langle Q_{jm}^M \rangle_{ba} = \frac{1}{j+1} \int d^3x \psi_b^* \nabla (r^j Y_{jm}) \frac{e}{M} (\vec{r} \times \vec{P})$$

magnetisches 2^j -Pol-Moment

Zum Vergleich: in der Magnetostatik: $Q_{jm}^M = \frac{1}{j+1} \int d^3x (\vec{r} \times \vec{j}) \nabla (r^j Y_{jm})$
Übergangsrate:

$$w_{fi} = \frac{2(j+1)\omega^{2j+1}}{j[(2j+1)!!]^2} |\langle Q_{jm}^M \rangle_{ba}|^2$$

Beachte auch hier: $\langle Q_{jm} \rangle \sim d^j$. Daher $w_{fi} \sim (\omega d)^{2j} \sim \left(\frac{d}{\lambda}\right)^{2j}$; höhere Multipole sind für $d \ll \lambda$ entsprechend unterdrückt. (Stimmt gut für Hülle, bei Kernen nicht immer, da zusätzliche Effekte)

Für $J=1$: Magnetisches Dipolmoment

$$\langle Q_{1m}^M \rangle_{ba} = \int d^3x \nabla (r Y_{1m}) \psi_b^* \underbrace{\frac{e}{2M} (\vec{r} \times \vec{P})}_{\substack{\frac{e}{2M} \vec{L} = \vec{\mu}_L \\ \text{magnetisches} \\ \text{Moment der} \\ \text{Bahnbewegung}}} \psi_a$$

mit Spin: $\vec{\mu}_L \rightarrow \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$, mit $\vec{\mu}_S$: magnetisches Moment vom Spin

Auswahlregeln

- Parität: $\mathcal{P}_a \cdot \mathcal{P}_b = (-1)^{j+1} \equiv \mathcal{P}_\gamma$
- Drehimpuls: $|j_a - j_b| \leq j \leq |j_a + j_b|$

Winkelverteilung der Strahlung

$$\begin{aligned} dw_{fi} &\sim \vec{u}_{kjm}^{(E,M)*} \vec{u}_{kjm}^{(E,M)} d\Omega \\ &\sim \vec{Y}_{jm}^* \cdot \vec{Y}_{jm} d\Omega \equiv |\vec{Y}_{jm}|^2 d\Omega \end{aligned}$$

mit der richtigen Normierung:

$$\frac{dw_{fi}}{d\Omega} = w_{fi} |\vec{Y}_{jm}|^2 \quad \text{gleich für M und E und } w_{fi} = \int d\Omega \dots$$

Ergänzung

$$\langle Q_{jm} \rangle_{ba} = \int d^3x \underbrace{\psi_b^*}_{|j_b m_b\rangle} \cdots \underbrace{\psi_a}_{|j_a m_a\rangle}$$

Im Allgemeinen muss man hierbei über m_a, m_b summieren bzw. mitteln:

$$\frac{1}{2j_a + 1} \sum_{m_a} \sum_{m_b} |\langle Q_{jm} \rangle_{ba}|^2$$

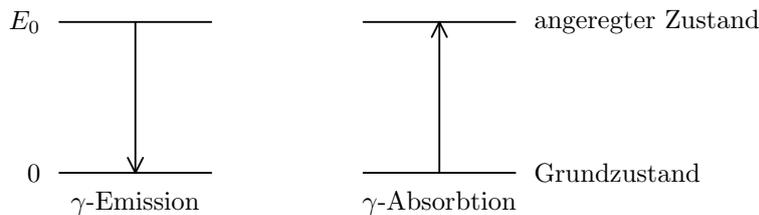
Dies kann man mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems umgehen.

$Q_{jm}^{(E,M)} \equiv Q_{jm}$ ist ein Tensor-Operator der Stufe $j \Rightarrow$ Anwendung des Wigner-Eckart-Theorems ergibt:

$$\begin{aligned} \langle Q_{jm} \rangle_{ba} &= \langle j_b m_b | Q_{jm} | j_a m_a \rangle = \\ &= \underbrace{\langle j_b m_b j m | j_a m_a j_b j \rangle}_{\text{Clebsch-Gordon-Koeffizient}} \cdot \underbrace{\langle j_b | Q_{jm} | j_a \rangle}_{\text{reduziertes Matrixelement von } m, m_a, m_b \text{ unabhängig}} \end{aligned}$$

8.4 Resonanzabsorbtion von γ -Strahlung

Die Resonanzabsorbtion tritt in der Regel dann auf, wenn das bei einem Zerfall eines angeregten Niveaus in den Grundzustand emittierte Photon von Kernen der gleichen Art absorbiert wird.



NB.: Wirkungsquerschnitt für Resonanzabsorbtion ist groß im Vergleich zur normalen Absorbtion. Der Prozess wird auch **Kernfluoreszenz** genannt. Die natürliche Linienbreite beträgt

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

Beispiel: für den 14,4 keV Übergang in ^{57}Fe ist $\tau = 1,4 \cdot 10^{-7}\text{s}$.

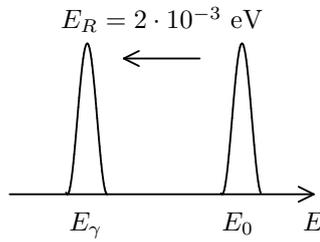
$$\Rightarrow \Gamma = 4,7 \cdot 10^{-9}\text{eV}$$

In den **meisten** Fällen von γ -Emission wird jedoch der Resonanzeffekt durch folgende Nebenerscheinungen beeinträchtigt.

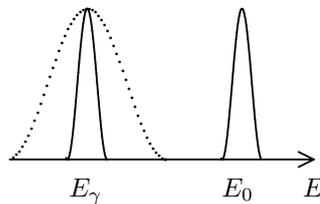
- **Rückstoßenergie:** γ -Strahlung wird mit der Energie E_γ emittiert, die kleiner als die Anregungsenergie E_0 ist. Die Energiedifferenz ist genau die Rückstoßenergie bei Emission:

$$E_r = \frac{p^2}{2M} = \frac{E_0^2}{2Mc^2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV für } ^{57}\text{Fe}$$

wobei M die Masse des Kerns ist.



- **Doppler-Effekt:** Die Linie wird infolge der thermischen Bewegung der emittierenden Kerne verbreitert.

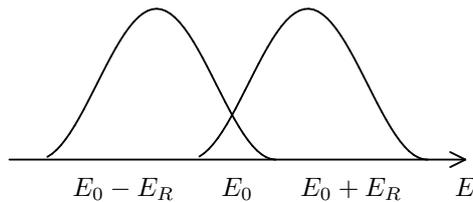


$$E_0 + \frac{p_0^2}{2m} = E_\gamma + \frac{(p_0 - p)^2}{2m}$$

$$\Delta E = E_0 - E_\gamma = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} \pm E_\gamma \frac{v_e}{c}$$

$$\left(\Delta T = E_0 \sqrt{\frac{2k_b T}{Mc^2}} \gg \Gamma \quad \text{für Maxwellsche Verteilung} \right)$$

Die gleichen Effekte treten bei der **Absorption** der γ -Strahlung auf, so dass Emission- und Absorptionsspektrum folgende Form haben:



Somit ist die Resonanzabsorption auf den kleinen Bereich um E_0 beschränkt.

Mößbauereffekt

Für Atome im Kristallgitter ist $\langle \bar{E}_{Phonon} \rangle \simeq 10^{-2} \text{ eV} > E_r$. Rückstoßfreie Emission, wenn kein Phonon emittiert wird.

Näherungsweise gilt:

$$f = 1 - \frac{E_r}{\langle \bar{E}_{Phonon} \rangle} \quad \text{für } E_r < \bar{E}_{Phonon}$$

f : Wahrscheinlichkeit für rückstoßfreie Emission (analog für Absorption)

Debye-Theorie: Frequenzspektrum der Oszillatoren mit maximaler Frequenz

ω_{max}

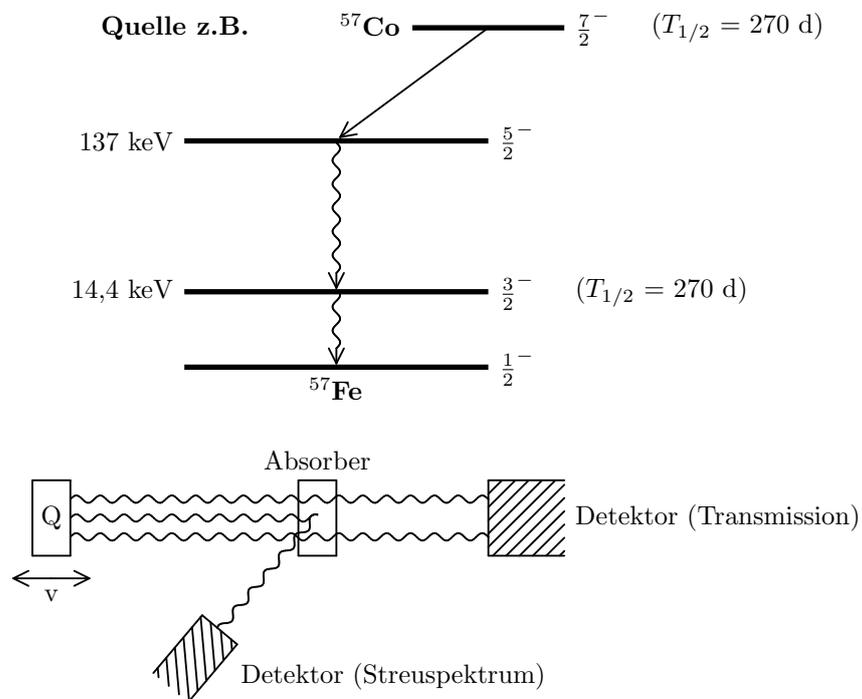
„**Debye-Temperatur**“ $\theta_D = \hbar\omega_{max}/k_B$
 (k_B = Boltzmannkonstante)

$$\Rightarrow f = \exp \left\{ -\frac{E_r}{k\theta} \left(\frac{3}{2} + \frac{\pi^2 T^2}{\theta^2} \right) \right\} \text{ (Debye-Waller-Faktor)}$$

Für den 14,4keV Übergang von ^{57}Fe ist bei Zimmertemperatur $\simeq 0,7$.
 Bemerkungen:

- i) E_r größer $\rightarrow f$ kleiner
- ii) T größer $\rightarrow f$ kleiner

Mößbauer-Apparatur



Meßbare relative Breite der Mößbauer-Linien:

$$^{191}\text{Ir} : \Gamma/E_\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$^{57}\text{Fe} : \Gamma/E_\gamma = 3 \cdot 10^{-13}$$

$$^{67}\text{Zn} : \Gamma/E_\gamma = 5 \cdot 10^{-16}$$

Anwendungen

- i) Test der allgemeinen Relativitätstheorie: Rotverschiebung im Gravitationsfeld der Erde

Photon der Energie $h\nu$ hat eine äquivalente Masse von $\frac{h\nu}{c^2}$. Die beim Durchqueren der Potentialdifferenz $\Delta\phi$ aufgenommene Energie ist

$$\delta E = m \cdot \Delta\phi = \frac{h\nu}{c^2} \Delta\phi = \frac{h\nu}{c^2} g d$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{gh}{c^2} \Rightarrow 10^{-16}/m$$

Höhe $d_{1/2}$, bei deren Durchquerung die γ -Strahlung unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes der Erde eine Linienverschiebung in eine halbe Halbwertsbreite erfährt, ist

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = 1,09 \cdot 10^{-18} d_{1/2} = \frac{\Gamma_0}{E_0}$$

$$d_{1/2} = \begin{cases} 3\text{km für } ^{57}\text{Fe} \\ 4,8\text{m für } ^{67}\text{Zn} \end{cases}$$

- ii) Isomerieverschiebung (chemische Verschiebung):
Unterschiedliche chemische Verbindungen in Quelle und Absorber (entspricht unterschiedlicher Elektronendichteverteilung)
- iii) Quadrupolaufspaltung:
Elektronenhülle unsymmetrisch (Feldgradienten), Kern deformiert (Quadrupolmoment)
- iv) Magnetische Aufspaltung:
Magnetfeld am Kernort \Rightarrow magnetische Hyperfeinstruktur

Im Festkörper ist der Atomkern von elektrischen Ladungen umgeben, die am Kernort ein Potential $\phi(\vec{r})$ erzeugen. Die Energie der Kernladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ in diesem äußeren Potential $\phi(\vec{r})$ wird durch folgenden Zustand beschrieben:

$$E_{\text{el}} = \int \phi(\vec{r}) \varrho(\vec{r}) d^3r$$

wobei $\int \varrho(\vec{r}) d^3r = z \cdot e$ Um E zu berechnen, wird $\phi(\vec{r})$ in eine Taylor-Reihe um $\vec{r} = 0$ entwickelt:

$$E_{\text{el}} = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)}$$

$$E^{(0)} = \phi(0) \int \varrho(\vec{r}) d^3r = \phi(0) \cdot Ze \text{ (Coulombenergie einer punktförmigen Ladungsverteilung)}$$

$$E^{(1)} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(0) \cdot \underbrace{\int \varrho(\vec{r}) x_i d^3r}_{\text{elektr. Dipolmoment des Kerns = 0 (wg. def. Parität der Kernzustände)}}$$

$$\varrho(\vec{r}) = q\psi * (\vec{r})\psi(\vec{r})$$

ψ definiert Parität $\Rightarrow \varrho(-\vec{r}) = \varrho(\vec{r})$, das Dipolmoment $\int \vec{r}\varrho(\vec{r}) d^3r$ ist Produkt aus gerader und ungerader Funktion $\Rightarrow 0$

$$E^{(2)} = \frac{1}{6} \sum_i \phi_{ii} \int \varrho(\vec{r}) r^2 d^3r + \frac{1}{2} \sum_i \phi_{ii} \int \varrho(\vec{r}) \left(x_i^2 - \frac{r^2}{3}\right) d^3r$$

mit $\phi_{ii} := \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i}$

Das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ genügt der Poisson-Gleichung. Am Kernort gilt

$$\Delta \phi(0) = \sum_i \phi_{ii} = \frac{e}{\epsilon_0} |\Psi(0)|^2$$

mit $-e|\psi(0)|^2 =$ Ladungsdichte und $|\psi(0)|^2 =$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen am Kernort

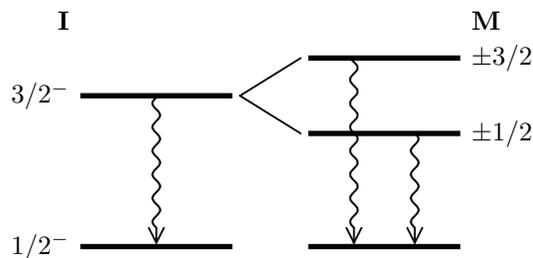
$$E^{(2)} = E_C + E_Q$$

$$E_C = \frac{e}{6\epsilon_0} |\psi(0)|^2 \int \varrho(\vec{r}) r^2 d^3r$$

\Rightarrow Isomerieverschiebung

$$E_Q = \frac{1}{2} \sum_i \phi_{ii} \int \varrho(\vec{r}) \left(x_i^2 - \frac{r^2}{3}\right) d^3r$$

\Rightarrow Quadrupolaufspaltung wenn der Kern deformiert ist und ein elektrischer Gradient durch die Elektronenhülle erzeugt wird. Beispiel ^{57}Fe :



Zusammenfassung der kernphysikalischen Anwendungen des Mößbauer-Effekts:

- i) τ insbesondere bei sehr kurzlebigen Übergängen ($\tau = \hbar/\Gamma$)
- ii) μ_N mit externem \vec{B} -Feld
- iii) Q_N mit $\frac{\partial E}{\partial z}$
- iv) $\langle r^2 \rangle$ über Isomerieverschiebung

Punkte ii) bis iv) insbesondere auch für angeregte Zustände.

8.5 Einschub: Natürliche Linienbreite/Breit-Wigner Resonanz

Die „mean lifetime“ eines instabilen Zustands ist

$$\tau = \frac{1}{W} \quad \Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar W = 2\pi|M|^2 \int \varrho_f d\Omega$$

Der Zusammenhang zwischen Lebensdauer τ und Breite Γ eines instabilen Zustandes folgt aus der Energie-Zeit-Unschärfe $\Delta E \Delta t \approx \hbar$.

Die Zerfallsrate eines Zustandes (oder eines Teilchens) A ist gegeben durch

$$\Gamma = -\hbar \frac{dN_A}{dt} \frac{1}{N_A}$$

$$N_A(t) = N_A(0) e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t}$$

Falls der Zustand (oder das Teilchen) in verschiedene Kanäle zerfallen kann, dann gilt

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i$$

Eine Wellenfunktion, die einen nicht stationären instabilen Zustand mit $w_R = \frac{E_R}{\hbar}$ (E_R : Resonanzfrequenz) und Lebensdauer $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$, lässt sich beschreiben durch

$$\psi(t) = \psi(0) e^{-i w_R t} e^{-\frac{t}{2\tau}} = \psi(0) e^{-\frac{1}{\hbar} (i E_R + \frac{\Gamma}{2}) t}$$

ab jetzt: $\hbar = c = 1$

Die Intensität $\psi^*(t)\psi(t)$ gehorcht dem radioaktiven Zerfallsgesetz $e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t}$

Die Fouriertransformierte der Wellenfunktion ist

$$g(w) = \int_0^\infty \psi(t) e^{i w t} dt$$

mit $w = \frac{E}{\hbar} = E$ ist die Amplitude als Funktion von E

$$\begin{aligned} \chi(E) &= \int \psi(t) e^{i E t} dt = \psi(0) \int e^{-t[\frac{\Gamma}{2} + i(E_R - E)]} dt \\ &= \psi(0) \left[\frac{e^{-t[\frac{\Gamma}{2} + i(E_R - E)]}}{(E - E_R) - i\frac{\Gamma}{2}} \right]_0^\infty = \frac{K}{(E - E_R) - i\frac{\Gamma}{2}} \end{aligned}$$

mit Konstante K

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand bevölkert wird (Teilchen a und Teilchen b bilden Resonanz c) ist proportional zu

$$\chi^*(E)\chi(E) \propto \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

für Teilchenproduktion: Wirkungsquerschnitt $\sigma(E)$

$\sigma(E) = \sigma_{\max} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad \text{Breit-Wigner-Formel}$
--

Bild4

Natürliche Linienbreite

mittlere Lebensdauer $\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \Rightarrow \Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$
 \Rightarrow **Lorentz-Verteilung**

$$I(w) = \frac{I_0}{(w - w_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

8.6 Innere Konversion

Ein angeregter Kern kann mit einem gebundenem Hüllenelektron in direkte Wechselwirkung treten, ihn seine Anregungsenergie übertragen und es auf diese Weise aus dem Atom hinauswerfen. (Die Coulombwechselwirkung zwischen Kern und Elektronen ist ähnlich wie der Auger-Elektronen nach Anregung der Elektronenhülle)

Die Energie des emittierten Elektrons ist gleich der Anregungsenergie E_γ minus der Bindungsenergie des Hüllenelektrons.

$$E_e = E_\gamma - B_e$$

Man spricht von **K-,L-,... Konversion** Die Konversion ist ein Alternativprozess zur Emission eines γ -Quants.

Die totale Übergangswahrscheinlichkeit λ_{tot} ist

$$\lambda_{tot} = \lambda_\gamma + \lambda_e = \lambda_\gamma(1 + \alpha)$$

$\alpha = \lambda_e/\lambda_\gamma$ heißt **Konversionskoeffizient**

NB: Die innere Konversion ist kein zweistufiger Prozess, bei dem ein γ -Quant emittiert wird, welcher dann wieder einen Photoeffekt macht.

Experimenteller Beweis: Halbwertszeit des isomeren Zustandes in ^{99}Te ($t_{1/2} = 6\text{h}$) ändert sich mit der chemischen Verbindung in dem Technetium vorliegt. Eine kleine Änderung der Elektronendichteverteilung ändert $\lambda_e \Rightarrow \lambda_{tot}$.

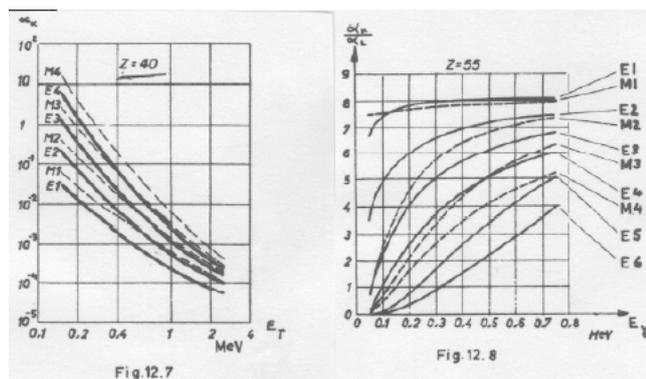


Abbildung 8.1: Verlauf der berechneten K-Konversionskoeffizienten

Der partielle Konversionskoeffizient für die zwei K-Elektronen ist bei elektrischen Multipolen der Ordnung 2^l ($l = 1, 2, 3, \dots$) näherungsweise

$$\alpha_k(E\lambda) \approx \frac{l}{l+1} Z^3 \left(\frac{1}{137}\right)^4 \left(\frac{2m_e c^2}{E_\gamma}\right)^{l+5/2}$$

analog:

$$\alpha_k(M\lambda) \approx \frac{l}{l+1} Z^3 \left(\frac{1}{137}\right)^4 \left(\frac{2m_e c^2}{E_\gamma}\right)^{l+3/2}$$

α_k steigt mit Z und l an und sinkt mit wachsender Übergangsenergie E_γ .

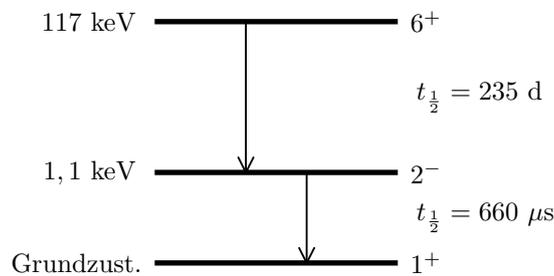
Isomere Zustände

Kerne in langlebigen angeregten Zuständen heißen Isomere

$$\tau_\gamma > 10^{-9} \text{s}$$

Für kleine Energien und hohe Multipole l sind deutlich längere τ_γ in Einzelfällen möglich.

z.B.: 2ter angeregter Zustand von ^{110}Ag :

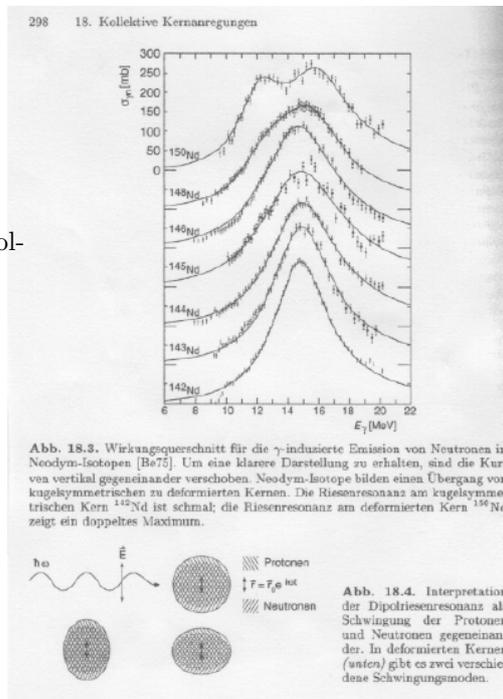


8.7 Kollektive Kernanregungen

Fluktuationen um Gleichgewichtslage in Vielteilchensystemen.

Dipolresonanz: Schwingung der Protonen und Neutronen im Kern gegeneinander.

Analog existieren Quadrupol- und Octopolresonanzen.



8.8 Rotationszustände

Wir betrachten gg -Kerne
(Spin \emptyset).

Klassisch: $E_{rot} = \frac{|\vec{J}_{rot}|^2}{2\Theta}$

mit Drehimpuls \vec{J} und Trägheitsmoment Θ

Quantenmechanisch: $H_{rot} = \frac{\vec{J}^2}{2\Theta}$

mit \vec{J} Dreimpulsoperator mit $E_J = J(J+1) \frac{\hbar^2}{2\Theta}$ als den Eigenwerten zu H_{rot}

Wegen $\Delta E = E_{J+1} - E_J = 2(J+1) \frac{\hbar^2}{2\Theta}$ nimmt der Abstand aufeinanderfolgender Zustände linear zu.

Anregung: Coulomb-Wechselwirkung durch Schwerionen

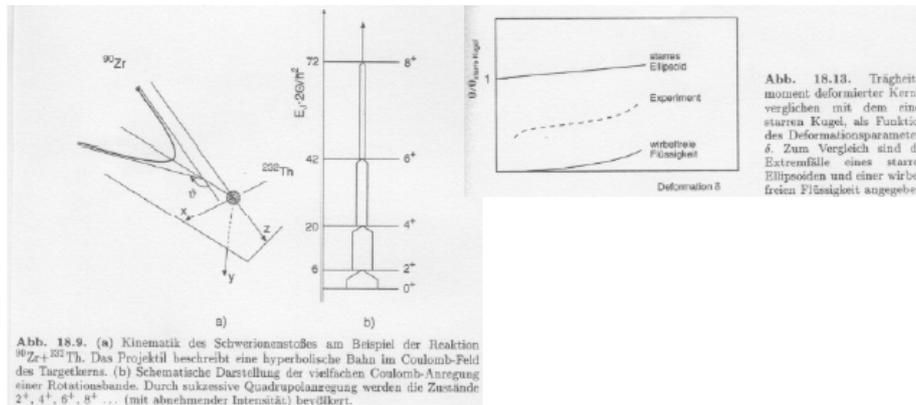
- Wechselwirkung: $\sigma \propto Z^2$
- $E_{CM} \lesssim$ Coulombbarriere um außerhalb der Reichweite der Kernkräfte zu bleiben

Trägheitsmomente: Starre Kugel $\Theta_{SK} = \frac{2}{5}MR_0^2$

Experimentell: $\Theta(^{232}\text{Th}) = 0,3 \times \Theta_{SK}$ (Deformation berücksichtigt)

Interpretation: Superfluide Komponente

Ursache: Paarungskraft (Bosonen $S = \emptyset$) tragen daher nicht zu einer Rotationsbewegung bei (analog: Copper-Paare in der Supraleitung)



Kapitel 9

Nukleosynthese

9.1 Primordiale Nukleosynthese (=NS im „Big Bang“)

Einschub: Standard Modell des frühen Universums

basiert auf experimentellen Befunden:

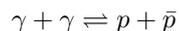
1. Hubble'sches Gesetz: $v = Hr$
2. Kosmische Hintergrundstrahlung (Penzias und Wilson)
3. kosmische Häufigkeit der leichten Elemente
4. Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung

Im sehr frühen Universum gab es extreme Temperaturen und Teilchendichten. Außerdem dehnte sich das Universum aus und kühlt ab. Sämtliche Teilchen waren im thermischen Gleichgewicht. Für $kT \gg Mc^2$ (k : Boltzmannfaktor, M : Teilchenmasse) muss die Zeit zwischen den Kollisionen (entspricht der Inversen der Kollisionsrate W) für ein bestimmtes Teilchen kurz sein im Vergleich zum Alter des Universums zu dieser Zeit $\Rightarrow W \gg t^{-1}$

$$W = \langle Nv\sigma \rangle$$

mit N : Teilchendichtezahl, v : Relativgeschwindigkeit, σ : Wirkungsquerschnitt
Die Teilchendichte kann aus folgenden Gründen unter die GG-Dichte fallen (sog. „freeze out“):

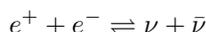
1. kT fällt unter die Schwellenenergie zur Produktion eines bestimmten Teilchens, z.B.



Sobald $kT_c \ll M_p c^2$ können p , \bar{p} noch annihilieren, werden aber nicht mehr produziert.

Sämtliche Hadronen haben eine Masse $Mc^2 > 100\text{MeV}$. Folglich zerfallen alle instabilen Hadronen in Leptonen, Photonen und Nukleonen für $kT < 100\text{MeV}$ ($\sim 10^{-6}\text{sec}$).

2. Der Wirkungsquerschnitt wird so klein, dass die Produktionsrate nicht aufrechterhalten werden kann. Bsp.:



sobald $kT < 3\text{MeV}$ ($t > 10^{-2}\text{sec}$)

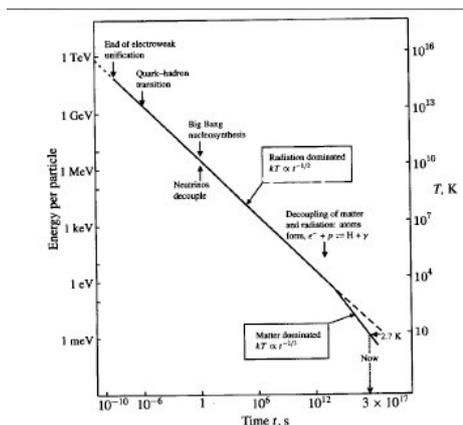
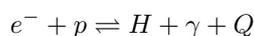


Abbildung 9.1: Entwicklung der Temperatur des Universums im Urknall Modell

Für einige 10^5 Jahre besteht das Universum aus p , e^- , H-Atomen und Photonen. Gleichgewichtsreaktionen:



Q : Ionisationspotential bei 13,6eV

Mittlere Photonenenergie bei T : $\langle T \rangle = 2,7T$

$$kT = 5eV \Rightarrow \langle kT \rangle \approx 13.6eV$$

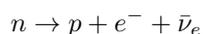
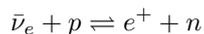
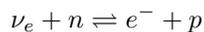
Photonendichte = 10^9 . Materiedichte

bei $kT = 0.3eV$: Entkopplung von Strahlung und Materie $t = 10^{13} \approx 3 \cdot 10^5 y$

zeitgleich: $\rho_m \propto T^{-3} \approx \rho_r (\propto T^{-4})$ bei $t \approx 10^6$

Materie dominiert Energiedichte. Erst nach der Entkopplung von Strahlung und Materie konnten sich Atome und Moleküle bilden.

Nach ca. 1 Sekunde sind neben Leptonen und Photonen nur Neutronen und Protonen übrig. Ihre relativen Anteile sind durch die folgenden Prozesse charakterisiert:



da $kT < M_p c^2$ gilt, sind Nukleonen nicht relativistisch. Die Boltzman-Faktoren beschreiben die Verhältnisse

$$\frac{N_n}{N_p} = e^{-\frac{Q}{kT}} \quad , \quad Q = (M_n - M_p)c^2 = 1,29\text{MeV}$$

$$kT_e = 0,87MeV$$

Zu Beginn der Entkopplung ist das Neutron-zu-Proton Verhältnis

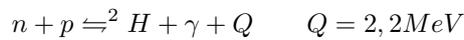
$$\frac{N_n(0)}{N_p(0)} = e^{-\frac{Q}{kT}} = 0,23$$

Zu späteren Zeiten verringert sich die Neutronenzahl aufgrund des β -Zerfalls des Neutrons:

$$N_n(t) = N_n(0) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$N_p(t) = N_p(0) + N_n(0)(1 - e^{t/\tau}) \quad \text{mit } \tau = 896s$$

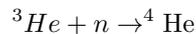
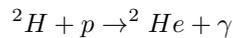
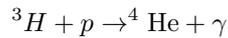
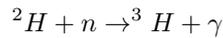
Die Nucleosynthese beginnt sofort über die Synthese des Deuterons



WQ: Photodisintegration(ER) $\sigma = 0,1mb$

Aufgrund der hohen Photonendichte findet der freeze-out erst bei $Q/40$ statt $\Rightarrow kT = 0,05MeV$

Sobald die Photodisintegration des Deuterons aufgehört hat, übernehmen folgende Reaktionen das Geschehen:



Bei $kT = 0,05MeV$ (bzw. $t \approx 400s$) ist das Neutron-zu-Proton Verhältnis $r = \frac{N_n}{N_p} = 0,14$.

NB: sobald ein Neutron im Deuteron gebunden ist, kann es nicht mehr zerfallen!

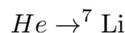
Wenn alle Neutronen in 4He gebunden sind, dann ist die Häufigkeit $N_{He} = N_n/2$.

$$\Rightarrow \frac{N_{4He}}{N_{tot}} = \frac{\frac{1}{2}N_n}{N_n + N_p} = \frac{\frac{1}{2} \frac{N_n}{N_p}}{\frac{N_n}{N_p} + 1} = \frac{r}{2(r+1)} = 0,06$$

Das Massenverhältnis ist $m_{4He} \approx 4m_p$

$$Y_{4He} := \frac{4N_{4He}}{N_{tot}} = \frac{2r}{r+1} = 0,25$$

Reaktion mit



Warum werden keine schweren Elemente produziert?

- Es gibt keine stabilen Elemente mit $A = 5$ und $A = 8$
- es gibt keine 3α -Reaktion wie in Sternen, da 4He -Dichte zu klein ist

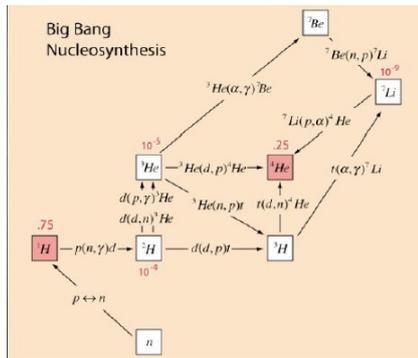


Abbildung 9.2: Elementeentstehung nach dem Big Bang

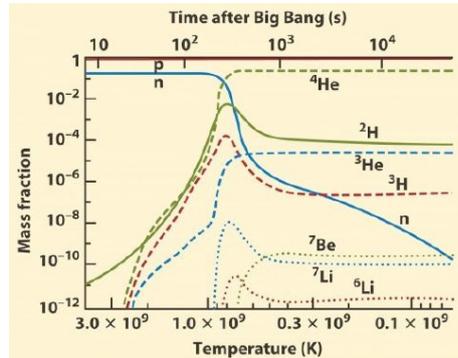


Abbildung 9.3: Massenverhältnisse der leichten Elemente nach dem Big Bang

Baryon-Antibaryon Asymmetrie

Betrachten wir eine Population von Nukleonen im Gleichgewicht mit der Strahlung:

$$p + \bar{p} \rightleftharpoons \gamma + \gamma$$

Man kann zeigen, dass der freeze-out bei $kT_e \approx 20 \text{ MeV}$ stattfindet.

$$\frac{N_B}{N_\gamma} = \frac{N_{\bar{B}}}{N_\gamma} \approx 10^{-18}$$

Dieses Verhältnis sollte bis heute unverändert sein. Beobachtet wird aber ein anderes Verhältnis:

$$\frac{N_B}{N_\gamma} (\text{observal}) \approx 10^{-9}$$

$$\frac{N_{\bar{B}}}{N_B} < 10^{-4}$$

Dies bedeutet, dass das Big Bang Modell um den Faktor 10^9 falsch ist.

Sacharow Kriterien (1966)

Unter der Annahme, dass anfänglich $B = 0$ ist, kann sich die Baryon-Asymmetrie entwickeln, falls

1. Baryonen-Zahl verletzende WW
2. Nicht-Gleichgewicht Situation (freeze-out)
3. CP und C Verletzung

9.2 Elementsynthese in Sternen

Die Bildung von Atomen fand erst 10^6 Jahre später statt, als $kT < eV$ galt. Das Photon zu Proton Verhältnis lag hier bei $\sim 10^8$. Durch die Gravitation kontrahieren Protosterne (im Wesentlichen aus H und

${}^4\text{He}$ (25%), wodurch sie sich stark aufheizen. Dadurch ist genug Energie vorhanden, um eine neue Brennstufe zu starten.

$$\Delta E(\text{Gravitation}) = \Delta(kT) + \Delta E(\text{Abstrahlung})$$

Virialtheorem: totale kinetische Energie = $-\frac{1}{2}$ · Gravitationsenergie

Für $M < 0,1M_{\odot}$ gilt: Die Kontraktion stoppt durch den Entartungsdruck (Pauli-Prinzip) ohne dass die Temperatur ausreicht, um die thermonukleare Reaktion in Gang zu setzen. Der Stern wird so zu einem sog. **braunen Zwerg**.

Die Energie der Reaktionspartner ist durch die Temperatur gegeben und kann durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung beschrieben werden.

$$n(E)dE \propto \sqrt{E} e^{-\frac{E}{k_b T}} dE$$

Damit die Reaktion stattfinden kann, muss die Coulomb-Barriere durchtunnelt werden. Die Tunnelwahrscheinlichkeit T wird durch den **Gamov-Faktor** beschrieben.

$$T \propto e^{-\frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{E}}}$$

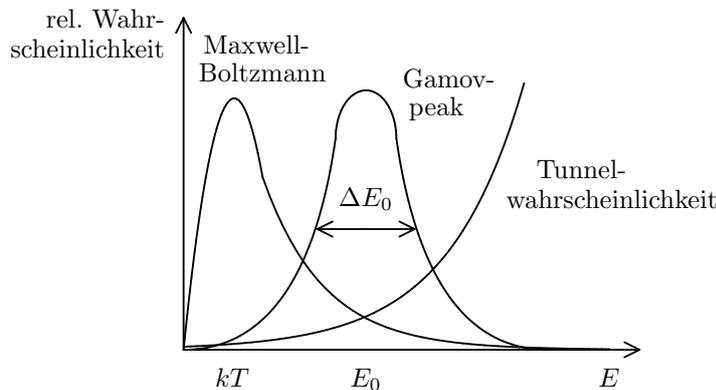
Der Wirkungsquerschnitt bei kleinen Energien kann durch s-Wellen beschrieben werden.

$$\sigma \propto \frac{1}{k^2} \propto E^{-1}$$

WQ:

$$\sigma(E) \propto E^{-1} e^{-\frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{E}}} \cdot S(E)$$

mit $S(E)$: astrophysikalischer S-Faktor (berücksichtigt Kernstruktureffekte)



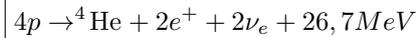
9.2.1 Wasserstoffbrennen

für $M > 0,1M_{\odot}$

1. Schritt: $p + p \xrightarrow{\text{schwache WW}} d + e^+ + \nu_e$ (+300keV)
2. Schritt: $p + d \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$ (schwache WW)
3. Schritt: ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p$ (starke WW)

Alternativ: Be, B, Li

Netto:



geringe Wahrscheinlichkeit für den 1. Schritt: stabiler Zustand $\sim 10^9\text{y}$

Strahlungsdruck = Gravitationsdruck

Die Zeit für ein Photon um aus dem Inneren an die Oberfläche zu kommen beträgt $\sim 10^6\text{y}$

9.2.2 Heliumbrennen und mittelschwere Kerne

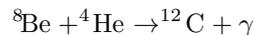
Für den CNO-Zyklus benötigt man Kohlenstoff. Dieser wird durch He-Brennen erzeugt. CNO wird dominant, wenn H im Sterninneren verbraucht ist. Ist der Wasserstoff verbraucht, kontrahiert der Stern. Dies führt zu einer Temperaturerhöhung von $\sim 10^8\text{K}$, wodurch nun Heliumbrennen möglich ist.



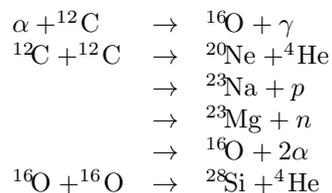
Der Grundzustand von ${}^8\text{Be}$ ist nicht gebunden und die Fusionsreaktion ist im Gleichgewicht mit der Dissoziationsreaktion.

Bei $T = 2 \cdot 10^8\text{K}$ ist $\langle E \rangle = 10\text{keV}$.

\Rightarrow Gleichgewichtskonzentration $\sim e^{-\frac{9,2}{17}} \sim 4 \sim 10^{-3}$



Nachfolgende Reaktionen (T abhängig):



Zusammenfassung der Brennphasen:

Stoff	T / 10^9K	Produkte	Brenndauer
${}^1\text{H}$	0,02	${}^4\text{He}, {}^{14}\text{N}$	$7 \cdot 10^6\text{a}$
${}^4\text{He}$	0,2	${}^{12}\text{C}, {}^{16}\text{O}, {}^{22}\text{Ne}$	$5 \cdot 10^5\text{a}$
${}^{12}\text{C}$	0,8	${}^{20}\text{Ne}, {}^{23}\text{Na}, {}^{24}\text{Mg}$	600 a
${}^{20}\text{Ne}$	1,5	${}^{28}\text{Si}$	1 a
${}^{16}\text{O}$	2,0	${}^{32}\text{S}$	180 d
${}^{28}\text{Si}$	3,5	${}^{54}\text{Fe}, {}^{56}\text{Ni}, {}^{52}\text{Cr}$	1 d

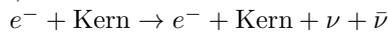
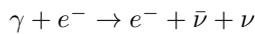
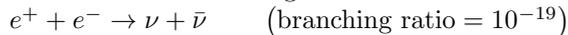
Nach dem Verbrennen eines Brennstoffs kontrahiert der Stern. Dadurch erhöht sich seine Temperatur und die Fusion des nächsten schwereren Brennstoffs beginnt.

Im Gleichgewicht gilt folgende Relation:

$$\text{Energiegeneration} = \text{Energieabstrahlung}$$

Bei niedrigen Temperaturen (H -, ${}^4\text{He}$ -Brennen) dominiert die Diffusion bzw. Konvektion von Photonen. Bei Temperaturen über $5 \cdot 10^8 K$ dominiert die Neutrinoabstrahlung die Energieabstrahlung!

Neutrinos werden in folgenden thermischen Prozessen gebildet:



N.B.: Neutrinos können aus dem Sterninneren ohne Wechselwirkung entkommen ($L_\nu \gg L_\gamma$).

Im Gleichgewicht gilt: $\epsilon_{nuc} = \epsilon_\nu \Rightarrow$ Temperatur, bei der die Fusionsreaktion stattfindet.

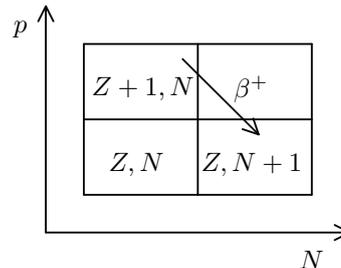
9.2.3 Brennen schwerer Elemente ($A > 60$)

Oberhalb von $A \approx 60$ werden schwere Elemente über Einfangreaktionen erzeugt. Man unterscheidet hierbei drei Prozesse:

- p-Prozess (Anlagerung von Protonen)
- s-Prozess (langsame (slow) Anlagerung von Neutronen)
- r-Prozess (schnelle (rapid) Anlagerung von Neutronen)

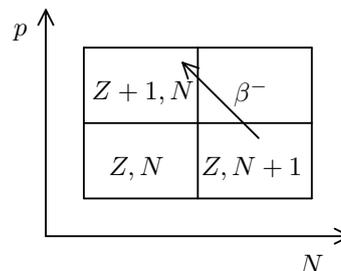
p-Prozess

- Einfang von Protonen in (p, γ) -Reaktionen
- Ist der neue Kern stabil (bzw. langlebig), kann er als Ausgangspunkt für den nächsten Einfangschritt dienen



s-Prozess

- Einfang von Neutronen in (n, γ) -Reaktionen
- Neutronen müssen keine Coulombbarriere durchtunneln. Deshalb findet dieser Prozess leichter statt als der p-Prozess.

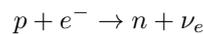


r-Prozess

Probleme:

- a) theoretische Modellierung schwierig, da die Kernstruktur exotischer Kerne nur unzureichend bekannt ist
- b) es werden hohe Neutronendichten benötigt \Rightarrow **Super Nova**

Neutronen entstehen über folgenden Prozess:



Diese Reaktion kann nur ablaufen, wenn der Entartungsdruck groß wird. Der Entartungsdruck steht mit der Dichte des Sterns in folgender Beziehung:

$$P \propto \rho^{5/3} \quad (\text{nicht relativistischer Fall})$$

$$P \propto \rho^{4/3} \quad (\text{relativistischer Fall})$$

Chandrasekhar-Limit

Die Chandrasekhar-Masse ist maximale Masse eines stabilen weißen Zwerges. Die Gravitation wird hierbei durch den Entartungsdruck aufrechterhalten. Wird M größer als M_{Ch} , kommt es zu einem Gravitationskollaps.

$$M_{Ch} \simeq 1,4M_{\odot} = 2,8 \cdot 10^3 \text{kg}$$

$$M_{Ch} = \frac{w_3^0 \sqrt{3\pi}}{2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e m_H)^2}$$

mit μ_e : mittleres molekulares Gewicht pro Elektron
 m_H : Masse des H-Atoms
 $w_3^0 = 2,01$

Super Nova Energetik

$$\Delta E_B \simeq \frac{3}{5} \frac{GM_{NS}}{R_{NS}} - \frac{3}{5} \frac{GM_{NS}}{R_{core}} \simeq 3 \cdot 10^{53} \text{ergs} \simeq 2 \cdot 10^{59} \text{MeV}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{kin. Energie} \simeq 10^{-2} \Delta E_B \\ \text{em. Energie} \simeq 10^{-4} \Delta E_B \end{array} \right\} \Rightarrow E_{\nu} \approx 99\% E_B$$

Kapitel 10

Quantenelektrodynamik (QED)

Die QED ist die Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung (kurz: em WW). Sie ist eine fundamentale Theorie, d.h. sie ist nicht auf andere Theorien zurückzuführen.

QED im engeren Sinn: Wechselwirkung von Photonen mit e^+/e^-

QED im weiteren Sinn: Wechselwirkung von Photonen mit fundamentalen Dirac-Teilchen (e^\pm, μ^\pm, τ^\pm , Quarks)

→ Anknüpfung an Kapitel 4 Die genannten Dirac-Teilchen bilden (zusammen mit den Neutrinos) die fundamentalen Fermionen.

QED = fundamentale e.m. WW zwischen den fundamentalen Fermionen. Die QED ist ein Musterbeispiel einer erfolgreichen Theorie

- sie ist fundamental
- sie ist konsistent mit den Prinzipien der Relativitätstheorie und Quantentheorie (basiert auf QFT)
- sie macht präzise Vorhersagen → Präzisionstests der QED: beste Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment (auf 8-10 Stellen)

10.1 Grundgleichungen, Feynman-Regeln

- em Feld: $A^\mu(x)$ (Operator, kovariante Formulierung)
freies Feld (in Impuls-Helizitäts-Basis):

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{2k^0} \left[a_\lambda(k) \epsilon_{(\lambda)}^\mu(k) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(k) \epsilon_{(\lambda)}^\mu(k)^* e^{ikx} \right]$$

$\lambda = \pm 1$: Helizität

($\lambda = 0$ existiert nicht wegen Transversalität: $\vec{\nabla} \vec{B} = \vec{\nabla} \vec{E} = 0$)

$\epsilon_{(\lambda)}^\mu$: Polarisationsvektoren

$\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$, $\epsilon_{(\lambda)} \cdot \epsilon_{(\lambda')} = -\delta_{\lambda\lambda'}$

$\epsilon_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1^\mu \pm i\epsilon_2^\mu)$, $\epsilon_{1,2}^\mu$: lineare Polarisation

$\epsilon_{1,2}^\mu = (0, \epsilon_{1,2}^i)$ $\epsilon_{1,2}^i \cdot \vec{k} = 0$

- Dirac-Feld: $\psi_f(x)$ (Operator) für jedes geladene Dirac-Fermion f
em-Strom: $j^\mu = \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f Q_f$

$$Q_f = \begin{cases} -1 & \text{für } e, \mu, \tau \\ +\frac{2}{3} & \text{für } u, c, t \text{ Quarks} \\ -\frac{1}{3} & \text{für } d, s, b \text{ Quarks} \end{cases}$$

zunächst weiter für e^\pm -Feld (ψ)

Bewegungsgleichungen

- (1) Maxwell-Gleichung (in Potentialen)

$$\square A^\mu = e j^\mu \quad (j^\mu = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$$

$$e > 0, \quad \frac{e^2}{4\pi} = \alpha$$

- (2) Dirac-Gleichung

$$[(i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m) \psi = 0$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = e\gamma^\mu A_\mu \psi$$

Lösung von (1)

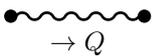
(mit Hilfe der Green-Funktion $D^{\mu\nu}$)

$$A^\mu(x) = e \int d^4y D^{\mu\nu}(x-y) j_\nu(y) \quad (\mathbf{A})$$

$D^{\mu\nu}$: Green'sche Funktion

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} e^{-iQ(x-y)} D_{\mu\nu}(Q)$$

mit $D^{\mu\nu}(Q) = -\frac{g^{\mu\nu}}{Q^2 + i\epsilon}$ (siehe Kap. ??) und $i\epsilon$: kausale Randbedingung. \rightarrow Feynman-Propagation für Photonen.

Graphisches Symbol:  (innere Photonlinie)

Zur Lösung von (2)

dazu: Greensche Funktion der Dirac-Gleichung

Bezeichnung: $S(x-y) \leftarrow 4 \times 4$ - Matrix

definierende Gleichung:

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) S(x-y) = \delta^4(x-y) 1$$

Fourier-Ansatz:

$$S(x-y) = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} e^{-iQ(x-y)} S(Q)$$

$$\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} e^{-iQ(x-y)}$$

Einsetzen in DGL ergibt eine algebraische Gleichung für $S(Q)$:

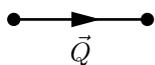
$$\boxed{(\not{Q} - m)S(Q) = 1 \quad \text{wobei } \not{Q} = \gamma^\mu Q_\mu}$$

Lösung:

$$S(Q) = (\not{Q} - m)^{-1} = \frac{Q + m}{Q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Fermion-Propagator, $i\epsilon$: kausales Verhalten entspricht den Randbedingungen. $S(x - y)$ beschreibt die Ausbreitung eines

$$\begin{cases} \text{Teilchen von } y \rightarrow x, & \text{wenn } y^0 < x^0 \\ \text{Anti-Teilchen von } x \rightarrow y, & \text{wenn } x^0 < y^0 \end{cases}$$

Graphisches Symbol:  (innere Fermionlinie)

(Q in Pfeilrichtung = Richtung des Ladungsflusses des Teilchens)

Lösung von (2)

mit Hilfe von $S(x - y)$:

$$\psi(x) = -e \int d^4y S(x - y) \gamma^\mu A_\mu(y) \psi(y) \quad (\mathbf{F})$$

(formale Lösung, Integralgleichung für ψ)

Die Darstellungen (A) und (F) werden benutzt, um S-Matrixelemente zu berechnen.

Berechnung von S-Matrixelementen

Störungstheorie im WW-Bild, Felder mit **freier** Dynamik

Anfangszustand $|i\rangle$, Endzustand $|f\rangle$ in niedrigster Ordnung Störungstheorie gilt

$$\mathcal{S}_{fi} = \langle f | \mathcal{S} | i \rangle = -i \int d^4x \langle f | \mathcal{H}_{int}(x) | i \rangle$$

El.-magn. Wechselwirkung:

$$\boxed{\mathcal{H}_{int} = e j^\mu A_\mu}$$

mit j^μ : Fermionenstrom und e : Kopplungskonstante

$$\mathcal{H}_{int} = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x)$$

$$\langle f | \mathcal{H}_{int} | i \rangle = -e \langle f | \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\text{(F) einsetzen} \\ \Rightarrow \text{Prozesse mit} \\ \text{äußeren Photonen}}} \underbrace{A_\mu(x)}_{\substack{\text{(A) einsetzen} \\ \Rightarrow \text{Prozesse zw.} \\ \text{Fermionen (Kap. 4.3)}}} | i \rangle$$

äußere Photonen

- in $|i\rangle$: $\langle f | \dots A_\mu | \gamma, k\lambda \dots \rangle \rightarrow \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \langle f | \dots | 0, \dots \rangle$
- in $|f\rangle$: $\langle \gamma, k\lambda, \dots | \dots A_\mu | i \rangle \rightarrow \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)^* \langle 0, \dots | \dots | i \rangle$

Vorgehen analog zu 4.3

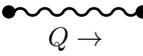
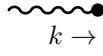
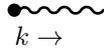
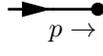
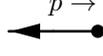
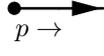
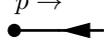
- Fourier-Darstellung für $A^\mu, \psi, \bar{\psi}$ einsetzen mit Erzeugern und Vernichtern
- Fourier-Darstellung für $S(x - y)$ bzw. $D_{\mu\nu}(x - y)$ einsetzen.
- Integration d^4x und d^4y liefert Impulserhaltung an jedem Vertex und globale Impulserhaltung, so dass

$$\mathcal{S}_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f) \cdot \mathcal{M}_{fi} \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^{n_i+n_f}$$

($n_i + n_f$: Zahl der Teilchen in $|i\rangle$ und $|f\rangle$)

\mathcal{M}_{fi} ist das Matricelement, das dann den Feynman-Graphen entspricht.

Vollständige Liste der Feynman-Regeln für QED

	$\frac{-ig_{\mu\nu}}{Q^2+i\epsilon}$	innere Photon-Linie
	$i\frac{Q+m}{Q^2-m^2+i\epsilon}$	innere Fermion-Linie
	$ie\gamma^\mu(Q_f)$	Vertex (Q_f : von 1 abweichende Ladung)
	$\epsilon_\mu(k)$ $\epsilon_\mu^*(k)$	einlaufendes } Photon auslaufendes }
		
	$u(p)$	einlaufendes Fermion
	$\bar{v}(p)$	einlaufendes Anti-Fermion
	$\bar{u}(p)$	auslaufendes Fermion
	$v(p)$	auslaufendes Anti-Fermion

Vorgehen:

- Zeichne alle Graphen, durch Vertex verbunden, für einen gegebenen Streuprozess
- analytische Ausdrücke nach Feynman - Regeln einsetzen. Spinoren entgegen der Pfeilrichtung anordnen
- Impulserhaltung an jedem Vektor
- Graphen aufsummieren, dabei Vorzeichen beachten:
 - Zeichen bei Vertauschen von zwei Fermion-Linien (Pauli-Prinzip)
- Ergebnis: \mathcal{M}_{fi}

Wirkungsquerschnitt

für $a + b \rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_r$

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{10}}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^{(2+r) \cdot 2} \delta^4(P_i - P_f) d\Phi$$

$$d\Phi = \frac{d^3 p_1}{2p_1^0} \dots \frac{d^3 p_r}{2p_r^0}$$

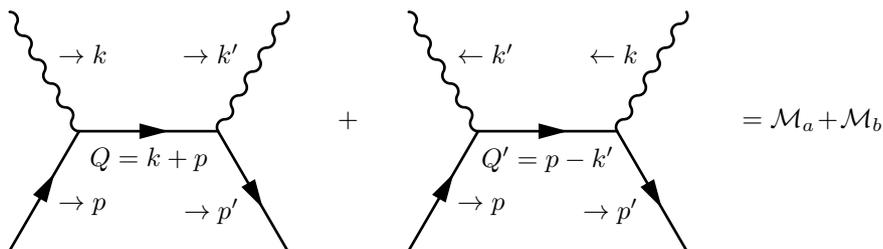
mit $P_i = p_a + p_b$ und $P_f = p_1 + \dots + p_r$

10.2 Beispiele für QED-Prozesse

in niedrigster Ordnung (Born-Approximation)

Compton-Streuung

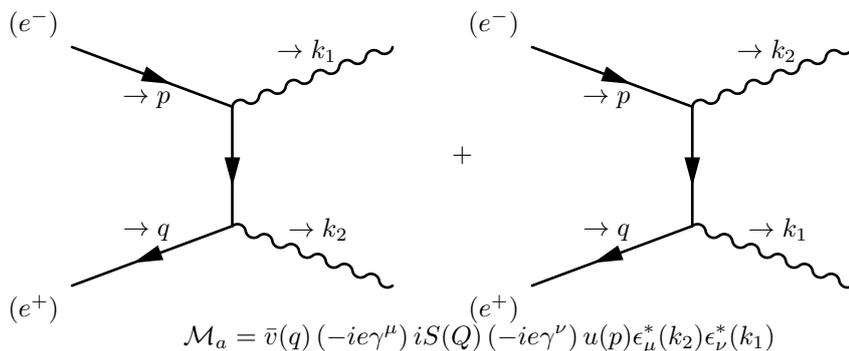
$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$



$$\mathcal{M}_a = \bar{u}(p') (-ie\gamma^\mu) iS(Q) (-ie\gamma^\nu) u(p) \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu(k)$$

Paarvernichtung

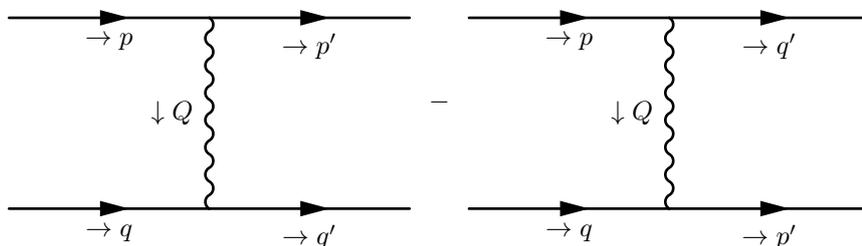
$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$



$$\mathcal{M}_a = \bar{v}(q) (-ie\gamma^\mu) iS(Q) (-ie\gamma^\nu) u(p) \epsilon_\mu^*(k_2) \epsilon_\nu^*(k_1)$$

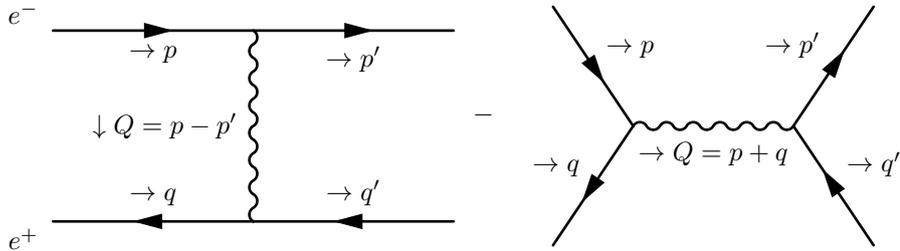
Møller-Streuung

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$



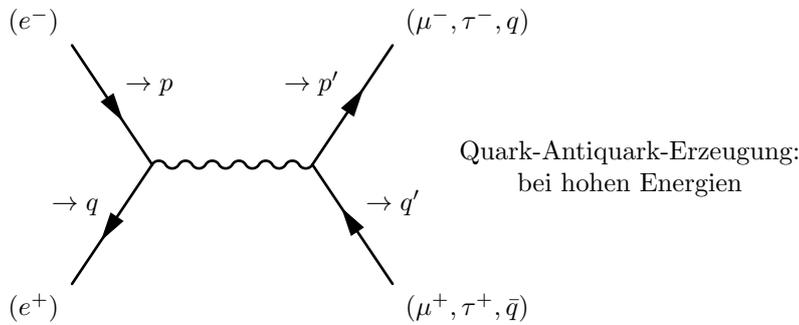
Bhabha-Streuung

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$$



Paarerzeugung

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- (\tau^+ \tau^-, q \bar{q})$$



Beispiele zur Berechnung eines Wirkungsquerschnitts

Als konkretes Beispiel zur Berechnung eines Wirkungsquerschnitts betrachten wir die

Zur Compton-Streuung

Den beiden Graphen auf Seite 140 entspricht das Matrixelement

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$$

Mittels Feynman-Regeln:

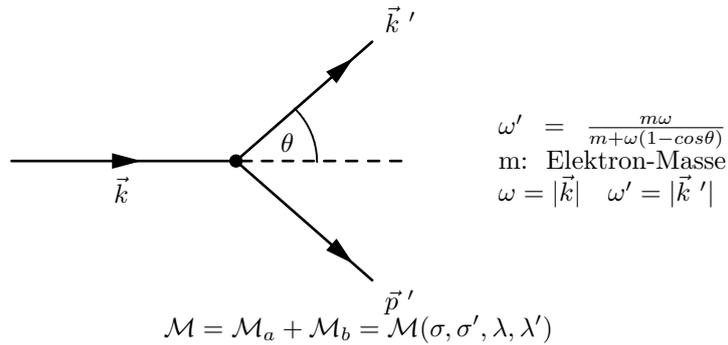
$$\mathcal{M}_a = -ie^2 \bar{u}(p') \gamma^\mu \epsilon_\mu(k') S(Q) \gamma^\nu \epsilon_\nu(k) u(p)$$

$$\mathcal{M}_b = -ie^2 \bar{u}(p') \gamma^\mu \epsilon_\mu(k) S(Q') \gamma^\nu \epsilon_\nu(k') u(p)$$

wobei $Q = p + k$ und $Q' = p - k'$

Nach Kap. ?? erhält man den Wirkungsquerschnitt im Laborsystem (=Ruhe-system des e⁻ im Anfangszustand)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{16m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right]^4$$



λ, λ' : e^- -Helizitäten

σ, σ' : γ -Helizitäten Da man es im Experiment im Allgemeinen mit unpolarisierte Zuständen zu tun hat, summiert man über die End - Helizitäten σ', λ' und mittelt über Anfangs - Helizitäten σ, λ .

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\sigma, \lambda} \sum_{\sigma', \lambda'} |\mathcal{M}_{fi}(\sigma, \sigma', \lambda, \lambda')|^2 \equiv \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$$

Ergebnis:

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2(\theta) \right]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \cdot \frac{1}{4m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2(\theta) \right]$$

wobei $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$

klassischer Limes: $\omega' \simeq \omega \ll m$

(\rightarrow Streuung einer Lichtwelle am e^- : Thomson-Streuung)

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{\alpha^2}{2m^2} (2 - \sin^2(\theta))}$$

...ergibt den Thomson Wirkungsquerschnitt integrierter Wirkungsquerschnitt:

$$\boxed{\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2}}$$

...ergibt den Thomson-Wirkungsquerschnitt

Wichtig:

Compton-Streuung hat als klassischen Grenzwert die Thomsonstreuung:

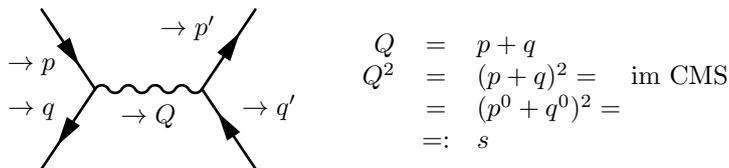
$$\sigma_{Compton} \rightarrow \sigma_{Thomson}$$

\Rightarrow Operative Bestimmung von α aus einer klassischen Observablen. Der Grenzwertübergang gilt auch in höheren Ordnungen

$\Rightarrow \alpha$ **eindeutig**, unabhängig von der Störungstheorie (gilt nicht für starke und schwache WW)

$$\underbrace{\sigma_{Thomson}}_{\text{klassischer Streuquerschnitt}} = \frac{8\pi}{3 \cdot 16\pi^2} \cdot e^2 \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^2 = \frac{8\pi}{3 \cdot 4\pi} \cdot \underbrace{\alpha}_{\substack{\text{exp.} \\ \text{bestimmt} \\ \text{durch} \\ \sigma_{Thomson}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{e}{m}\right)^2}_{\substack{\text{Messung} \\ \text{durch Radius} \\ \text{z.B. im B-Feld}}}$$

Zur Paarerzeugung: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$



integrierter Wirkungsquerschnitt für $s \gg m_e^2, m_\mu^2$:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Den tatsächlich gemessenen Wirkungsquerschnitt kann man aus Abbildung 10.1 entnehmen. Das Peak bei 91 GeV entspricht dem Z-Boson der schwachen Wechselwirkung:

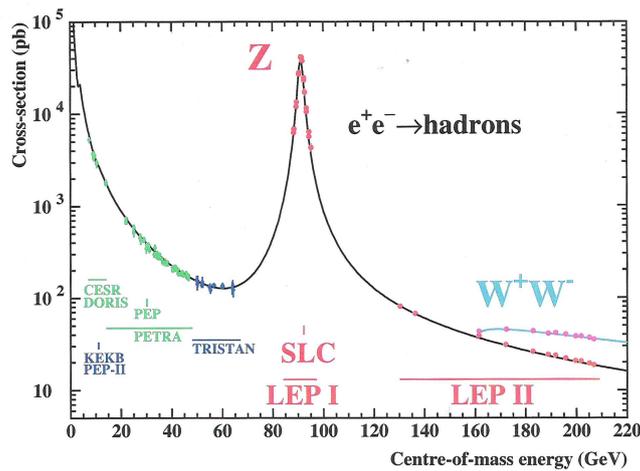
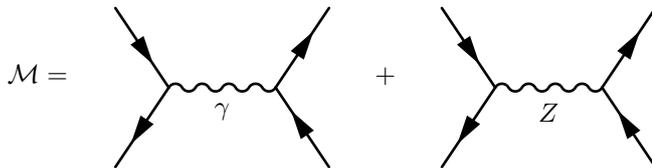


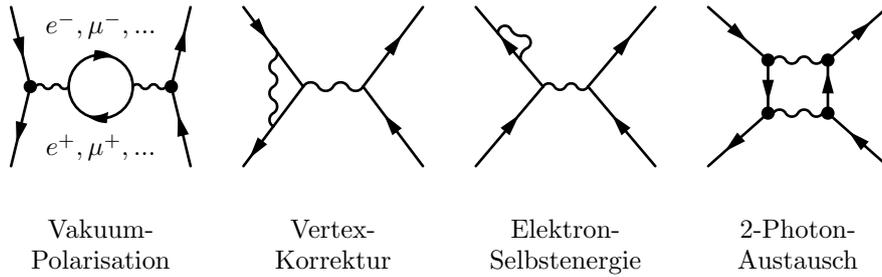
Abbildung 10.1: Anmerkung: $e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons} \hat{=} e^+e^- \rightarrow \sum_q(q\bar{q})$ mit $q\bar{q}$: Quark-Antiquark-Paare

10.3 Präzisionstests der QED

Voraussetzungen: genaue Experimente, genaue theoretische Vorhersagen. Beides trifft bei QED zu.

Genauigkeit erfordert Störungstheorie in höherer Ordnung: Feynman-Diagramme mit geschlossenen Schleifen \rightarrow Beiträge mit höheren Potenzen von e bzw. α , numerisch kleiner als Born-Approximation.

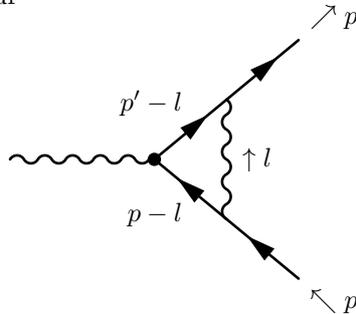
Beispiel: $e^- e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ in 2. Ordnung: 1-Schleifenordnung (e^4)



Ergänzung für Feynman-Regeln bei Schleifen

- In einer Schleife ist ein Impuls (l) nicht festgelegt \rightarrow integrieren: $\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}$... pro Schleife.
- Bei geschlossenen Fermion-Schleifen zum Integral zusätzlich $(-1) \cdot \text{Tr}[\dots]$ (Pauli-Prinzip).

Beispiel: Vertex-Korrektur



$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') (ie\gamma^\delta) iS(p' - l) (ie\gamma_\mu) iS(p - l) (ie\gamma^\sigma) \frac{-ig_{\delta\sigma}}{l^2 + i\epsilon} =$$

$$= e^3 \bar{u}(p') \left[\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \gamma^\delta S(p' - l) \gamma_\mu S(p - l) \gamma_\delta \frac{1}{l^2 + i\epsilon} \right] u(p)$$

Ergebnis lässt sich schreiben als

$$e\gamma_\mu F_V(Q^2) + \frac{e}{2m} i\sigma^{\mu\nu} Q_\nu \cdot F_M(Q^2), \quad Q^2 = (p' - p)^2, \quad Q = p' - p$$

Die Formfaktoren $F_{V,M}(Q^2)$ sind in der QED berechenbar (anders als z.B. bei Protonen).

$F_M(0)$: Beitrag zum magnetischen Moment.

Meßbare Effekte bei niedrigen Energien

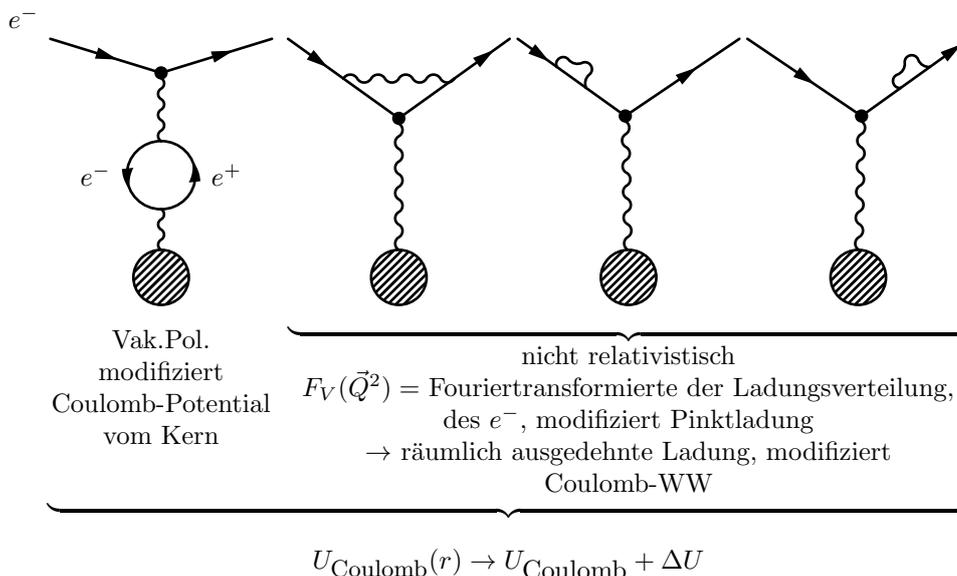
- (i) Lamb-Shift
- (ii) anomales magnetisches Moment von e, μ

(i) Lamb-Shift:

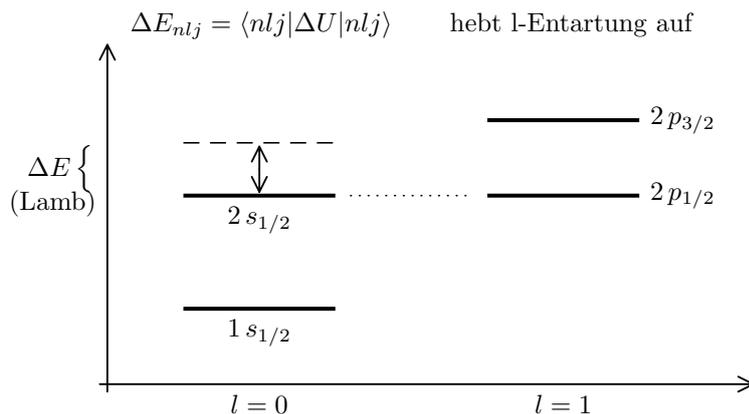
Verschiebung der Energie-Niveaus im H-Atom gegenüber der Dirac-Theorie; am stärksten bei s -Zuständen.

Dirac: $E_{nj}, |nlj\rangle, j = l \pm \frac{1}{2}$ für $l = 1, 2, \dots; j = 0$ für $l = 0, l = 0, 1, 2, \dots$

2 Beiträge $\left\{ \begin{array}{l} \text{Vakuum-Polarisation} \\ \text{Vertex-Korrektur (mit } e\text{-Selbstenergien)} \end{array} \right.$



Verschiebung der Energieniveaus in stationärer Störungstheorie:



gemessen: 1947 (Lamb + Rutherford)

berechnet: 1947 (H. Bethe)

Verschiebung des $2s$ -Niveaus:	Vakuum-Polarisation	-27 MHz
	Vertex-Korrektur	+1085 MHz
		+1058 MHz

(ii) anomales magnetisches Moment:

Dirac: $\vec{\mu}_S = 2 \frac{e}{2m} \vec{s}$ ($g = 2$) [$\vec{\mu}_L = \frac{e}{2m} \vec{L}$].
 Abweichung von $g = 2$: $\vec{\mu}_S = 2(1 + a) \frac{e}{2m} \vec{s}$.
 Vertexkorrektur liefert $a = F_M(0)$

$$g = 2(1 + a) \quad , \quad \boxed{a = \frac{g-2}{2}}$$

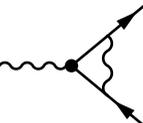
Elektronen

genauestes Experiment (Harvard): G. Gabrielse et al. (benutzt Penning-Falle für Elektronen)

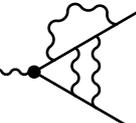
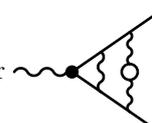
$$a_e^{exp} = 0.001\,159\,652\,180\,85 \quad (76)$$

$$a_e^{th} = 0.001\,159\,652\,182\,79 \quad (769)$$

$$\boxed{a_e^{exp} - a_e^{th} = (-1.94 \pm 7.73) \cdot 10^{-12}}$$

zur Theorie: 1-Schleifenbeitrag  $a_e = \frac{\alpha}{2\pi}$

$$a_e = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\pi} + c_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + c_3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3}_{\text{analytisch berechnet 1,2,3-Schleifen}} + \underbrace{c_4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4}_{\text{numerisch 4-Schleifen}} + \underbrace{c_5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5}_{\text{Abschätzung 5-Schleifen}}$$

z.B.  oder  ...

Die Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_5 sind bekannt \Rightarrow genauer Wert von α wird benötigt für eine Vorhersage.

$$a_e^{theo} = 0,001\,159\,652\,182\,79 \quad (769)$$

Fehler ist dominiert vom experimentellen Fehler in α

$$a_e^{exp} = 0,001\,159\,652\,180\,85 \quad (76)$$

hierfür benutzt: Elektronen in Penning-Falle (Harvard)
 Bestimmung von α :

- Josephson-Effekt
- Rückstoßmessungen an Cs, Rb bei Emission (genauester Wert z.Z.)

α aus a_e :

$$\alpha^{-1} = 137.035\,999\,69$$

\Rightarrow Vorhersage für a_μ

Myon

$m_\mu > m_e$ ($m_\mu \simeq 200m_e$)

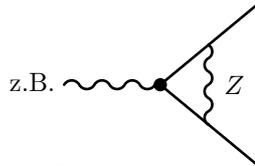
$a_\mu \neq a_e$ (schwache WW, Vakuum-Polarisation)

Beiträge von schweren Teilchen (Masse M) in Schleifen $\sim (\frac{m_\mu}{M})^2$, [diese sind bei a_e wegen $(\frac{m_e}{M})^2$ unterdrückt]

Daher ist a_μ sensitiv auf schwere Teilchen.

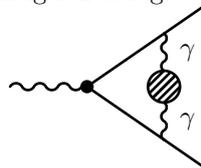
Beispiele:

schwache Wechselwirkung



Beitrag zu $a_\mu + 154 \cdot 10^{-11}$
(1- und 2-Schleifenordnung)
nicht vernachlässigbar

Wichtiger Beitrag:



← Hadronen (starke WW) $+ (6921 \pm 56) \cdot 10^{-11}$

$$a_\mu^{th} = 0,001\,165\,917\,97\,(60) \leftarrow \text{hauptsächlich hadronische VP}$$

$$a_\mu^{exp} = 0,001\,165\,920\,80\,(63)$$

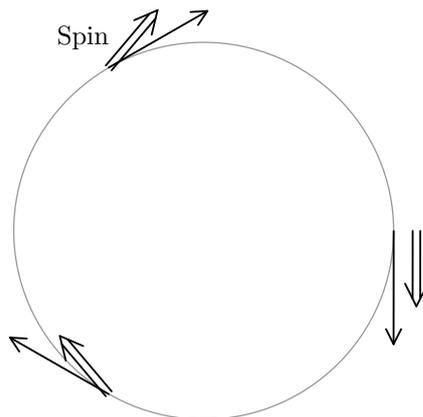
Exp.: Brookhaven (2004), G. W. Bennett et al.

Methode: μ^+ im Speicherring, zerfällt wegen schwacher WW:

$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$, lange Lebensdauer im Ring wegen Zeitdilatation.

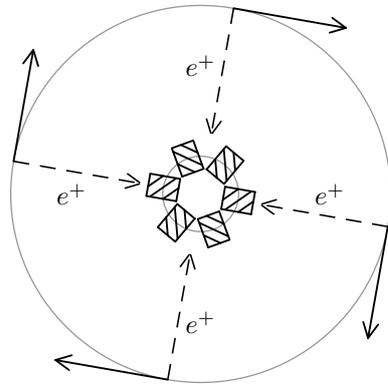
Umlauffrequenz im B -Feld: $\omega_C = \frac{eB}{m_\mu}$,

Präzessionsfrequenz des Spins: $\omega_S = g \frac{e}{2m_\mu} B = \omega_C + \Delta\omega$, $\Delta\omega \sim a_\mu$.



Winkel zwischen Spin
und Bahn periodisch
veränderlich (mit $\Delta\omega$)

Zerfälle in e^+ werden durch Detektoren registriert (radiale Zerfallsrichtung).



Rate vom Winkel $\angle(\vec{S}, \vec{P})$ abhängig, oszilliert mit Frequenz $\Delta\omega$

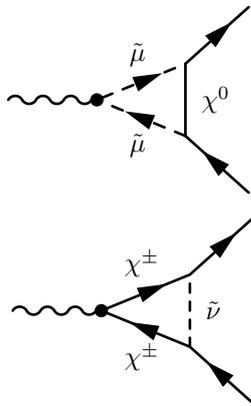
Vergleich Theorie-Experiment:

$$a_{\mu}^{exp} - a_{\mu}^{th} = (292 \pm 1) \cdot 10^{-11} \quad (2011)$$

Abweichung von $\sim 3, 4\sigma$, zur Zeit ungeklärt

Mögliche Erklärung: neue Physik, durch neue unbekannte schwere Teilchen.

z.B. Supersymmetrie \Rightarrow Partnerteilchen von $\mu, \nu, \gamma, Z, W, \dots$ $[\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\chi}^0, \tilde{\chi}^{\pm}] \Rightarrow$ neue Beiträge



können Abweichungen erklären, wenn die Masse $M \sim 200 \dots 400$ GeV für die SUSY-Teilchen

Kapitel 11

Kernkraft, Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

Als Kernkraft bezeichnet man die Wechselwirkung zwischen Nukleonen. Die Reichweite der Kraft liegt im Bereich des Durchmessers der Nukleonen ($1fm$). Die Nukleonen im Kern können als freie Nukleonen im Potentialtopf beschrieben werden. Es ist nicht möglich aus der Eigenschaft der Kerne auf das NN-Potential zu schließen. Die Bestimmung des Potentials lässt sich aus der Analyse von Zweikörpersystemen gewinnen, wie z.B. der NN-Streuung an gebundenen Proton-Neutron-Zustand (Deuteron: 2_1D).

11.1 Nukleon-Nukleon-Streuung

Energie $< m_\pi c^2 \simeq 10^2$ MeV

\Rightarrow elastische, nicht relativistische Streuung.

Rightarrow punktförmige Teilchen mit Spin, Isospin

Experimente mit polarisierten Nukleonen

Spins können parallel bzw. antiparallel zur Streuebene ausgerichtet sein. *Rightarrow*

Es existieren Triplett bzw. Singulett Zustände.

Streuphase

Streuung eines “aus dem Unendlichen” einlaufenden Nukleons mit Impuls \vec{p} und Energie E am Potential eines anderen Nukleons.

Die einlaufende Welle ist hierbei eine ebene Welle, die auslaufende Welle eine Kugelwelle.

Entscheidend für den Wirkungsquerschnitt ist die Phasenbeziehung zwischen diesen Wellen. Der differentielle WQ ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

mit der Streuamplitude $f(\theta)$ Die Streuung an einem kurzreichweitigem Potential kann mittels Partialwellenzerlegung, d.h. der Entwicklung der gestreuten Wellen nach Anteilen mit festem Drehimpuls l , beschrieben werden. Für elastische

Streuung gilt für große r vom Streuzentrum:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \cdot \sin \delta_l \cdot P_l(\cos \theta)$$

$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{|\vec{p}|}{\hbar} = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}$, Wellenzahl des gestreuten Nukleons

δ_l : Phasenverschiebungswinkel

P_l : Eigenfunktionen des Drehimpulses l in Form der Legendre-Polynome l -ter Ordnung
Ist die Reichweite des Potentials a , so gilt:

$$l \leq \frac{|\vec{p}| \cdot a}{\hbar}$$

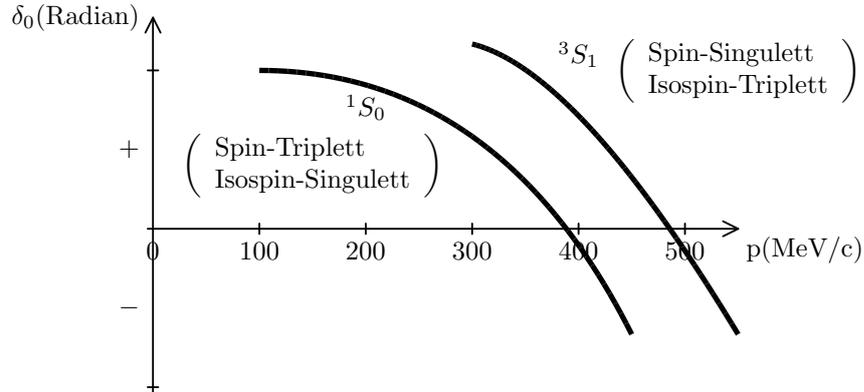
mit $a \simeq 1 \text{ fm}$, $pc \leq 100 \text{ MeV}$, $\hbar c \sim 200 \text{ MeV}$ folgt, dass $l = 0$ ist (s-Wellen).

$$P_0(\cos \vartheta) = 1$$

Für die Kernbindung ist also δ_0 maßgebend.

$$\Rightarrow f(\theta) \simeq \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \cdot \sin \delta_0$$

11.2 Experimentelle Resultate



$|\vec{p}| \lesssim 400 \text{ MeV}/c$: δ_0 positiv

$|\vec{p}| \gtrsim 400 \text{ MeV}/c$: δ_0 negativ

Interpretation: Abstoßende Kraft bei kleinen Abständen ($\hat{=}$ großen Impulsen) und umgekehrt.

Lösung der Schrödingergleichung für das angenommene Potential:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m(E - V(r))}{\hbar^2} u = 0$$

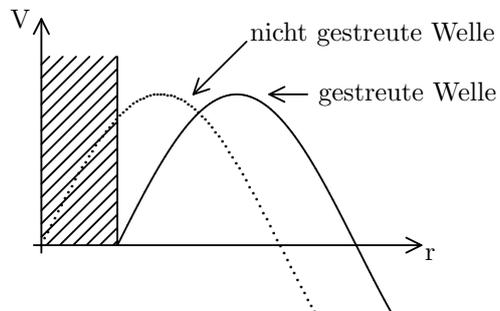
anziehendes Potential: $+\delta_0$

abstoßendes Potential: $-\delta_0$

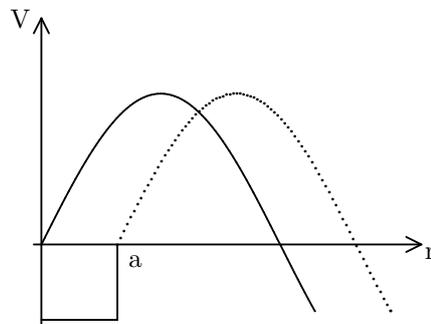
$$\delta_0 = \arctan \left(\sqrt{\frac{E}{E + |V|}} \tan \frac{\sqrt{2mc^2(E + |V|)}}{\hbar c} \right) - \frac{\sqrt{2mc^2 E} \cdot a}{\hbar c}$$

mit **kurzreichweitigen abstoßenden** und **langreichweitigen anziehenden** Potential.

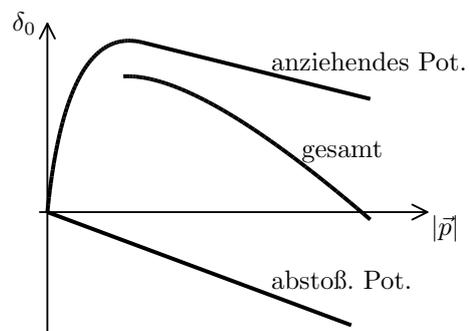
$\delta_0 < 0$ (die gestreute Welle eilt um δ_0 nach):



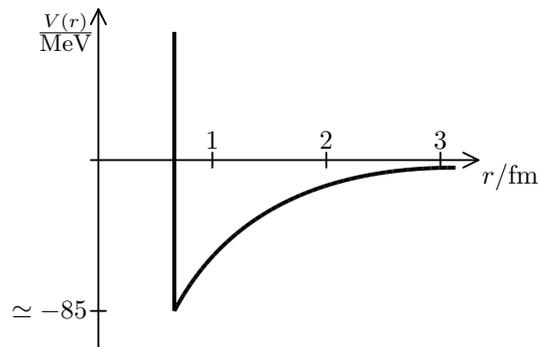
anziehendes Potential: gestreute Welle eilt voraus ($\delta_0 > 0$)



Beiträge zum experimentellen Ergebnis:



Potential $V(r)$ Nukleon-Nukleon (schematisch):



Der abstoßende Teil steigt stark mit fallendem r an. Dies definiert den sog. “**hard core**”.

NN-Potential

Größen, die die WW bestimmen:

- Abstand \vec{r}
- relativer Impuls \vec{p}
- Gesamtbahndrehimpuls
- relative Ausrichtung der Spins \vec{s}_1, \vec{s}_2

Das Potential $V(r)$ ist eine skalare Größe und ist deshalb translations- und rotationsinvariant und symmetrisch unter Teilchenaustausch. Für einen festen Isospin hat das Potential die folgende Form:

$$\begin{aligned}
 V(r) &= V_0(r) && \text{Zentralpotential} \\
 &+ V_{SS}(r) \vec{s}_1 \vec{s}_2 / \hbar^2 && \text{Spin-Spin-WW} \\
 &+ V_T(r) (3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r}) / r^2 - \vec{s}_1 \vec{s}_2) / \hbar && \text{Tensorpotential} \\
 &&& \text{(nicht zentrale Kraft)} \\
 &+ V_{LS}(r) (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{L} / \hbar^2 && \text{Spin-Bahn-WW} \\
 &\left(\begin{array}{l} + V_{LS}(r) (\vec{s}_1 \cdot \vec{L})(\vec{s}_2 \cdot \vec{L}) / \hbar^4 \\ + V_{PS}(r) (\vec{s}_1 \cdot \vec{p})(\vec{s}_2 \cdot \vec{p}) / (\hbar^2 m^2 c^2) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Da das Zentralpotential zu schwach ist, gibt es für ein Proton-Proton und Neutron-Neutron System keinen gebundenen Zustand ($\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = 0$)
- $s = 1$: Wegen V_T und V_{SS} gebundener Zustand \rightarrow Deuteron ${}^2\text{D}$

Eigenschaften des Deuterons

- Bindungsenergie: $B = 2,225 \text{ MeV}$
- Spin und Parität: $J^P = 1^+$
- Isospin: $I = 0$
- magnetisches Moment: $\mu = 0,857 \mu_N$

- elektrisches Quadrupolmoment: $Q = 0,282efm^2$

•

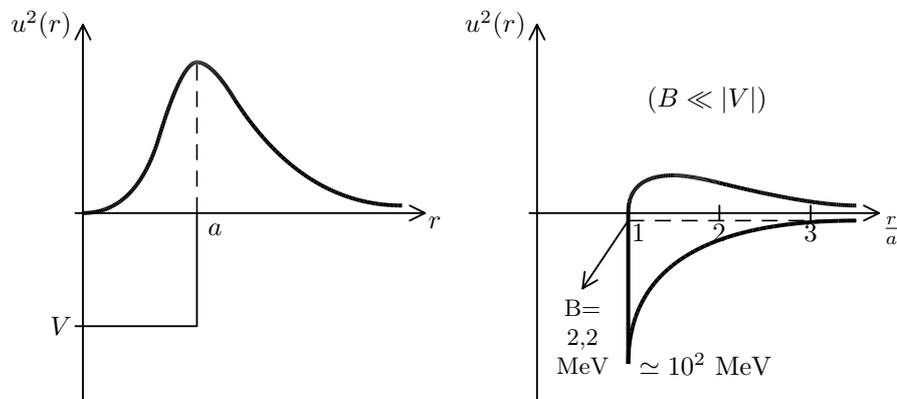
$$\underbrace{|V|}_{\text{Potentialtiefe}} \approx \underbrace{B}_{\text{Bindenergie}} + \underbrace{\frac{\pi(\hbar c)^2}{8a^2 m c^2}}_{\text{kinetische Energie } E_K} \approx 100 \text{ MeV}$$

$$a = 1,2 - 1,8 \text{ fm} \Rightarrow V \simeq 50 \text{ MeV} \quad V \gg B$$

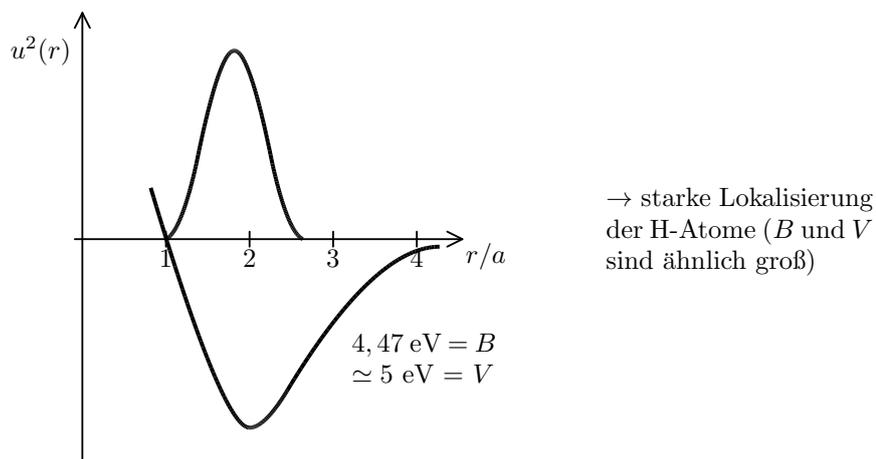
- Der Schwanz der Wellenfunktion $u = ce^{-\kappa r}$, $\frac{1}{\kappa} \sim 4,2 \text{ fm}$ ist größer als die Reichweite

Folge:

Große Delokalisation der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $u^2(r)$.



Vergleich mit H_2 -Molekül:



Kapitel 12

Quantenchromodynamik (QCD)

Die QCD ist die Theorie der starken WW. Sie ist fundamental. Sie beschreibt die WW zwischen Quarks, aus denen sich die Hadronen zusammensetzen. Quarks sind fundamentale Spin-1/2-Teilchen.

Der Rahmen der QCD ist die relativistische QFT. Die QCD ist eine ‘‘Eichtheorie’’, die auf der Lagrange-Formulierung der QFT basiert.

historisch: e^- -Nukleon-Streuung (N=p,n), inelastisch

tief.inelastisch: $|Q^2| \gtrsim 2GeV^2$; experimentell: Streuung an freien punktförmigen Konstituenten

- Feynman: Parton-Modell
- Gell-Mann: Quark-Modell

12.1 Lagrange-Formalismus für Felder

bisher (QED): WW beschrieben durch Hamilton-Operator $H_{int} = \int d^3x \mathcal{H}_{int}$

statt dessen: Lagrange-Funktion $L = \int d^3x \mathcal{L}$, mit \mathcal{L} : Lagrangedichte (‘‘Lagrangian’’)

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt L = \int \underbrace{d^4x}_{inv.} \underbrace{\mathcal{L}}_{inv.}$$

Dies ist die Wirkung. Dabei ist \mathcal{L} und somit auch S eine Lorentzinvariante Größe. $\delta S = 0 \Rightarrow$ Bewegungsgleichungen

Gründe für Lagrange-Funktion/Dichte als dynamische Grundgröße:

- liefert Bewegungsgleichungen gemäß universellen Prinzips
- Lorentz-Invarianz ist manifestiert
- Symmetrie von \mathcal{L} (von S) haben wichtige physikalische Konsequenzen, z. B. Noether-Theorem. Hier besonders: innere Symmetrien (keine Raum-Zeit-Symmetrien) \rightarrow Eich-Symmetrie (unter Eich-Transformation)

Mechanik:

$$L = L(q_k, \dot{q}_k) \xrightarrow{\delta S=0} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{Bewegungsgleichungen}$$

Feldtheorie:

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad , \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$$

(statt k: kontinuierlicher Index x)

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi \quad , \quad \partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi + \partial_\mu(\delta\phi)$$

Analog zur Mechanik erhält man die Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0}$$

Bei mehreren Feldern $\phi_j(x)$ (auch Komponenten von Vektorfeldern, Spinorfeldern) gelten die Bewegungsgleichungen für jedes $\phi_j(x)$

$$\phi_j = A_\mu, \psi_a \quad (a = 1, 2, 3, 4), \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \bar{\psi}_a, \bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$$

$$\boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_j)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} = 0} \quad \text{Bewegungsgleichungen „Feldgleichungen“}$$

Beispiele:

a) Skalarfeld: $\phi(x), \phi^\dagger(x)$ (klassisch oder quantisiert)

$$\text{Ansatz:} \quad \mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$$

mit $\phi_i = \phi, \phi^\dagger$

$$\partial_\mu \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \right)}_{\partial^\mu \phi} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger}}_{-m^2 \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

Klein-Gordon-Gleichung:

$$\boxed{(\square + m^2)\phi = 0}$$

b) Spinorfeld: $\psi, \bar{\psi}$ bzw. $\psi_a, \bar{\psi}_a$ ($a = 1, \dots, 4$)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \sum_{a,b} \bar{\psi}_a [i\gamma_{ab}^\mu \partial_\mu - m\delta_{ab}] \psi_b$$

$$\underbrace{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_a)}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_a}}_{\sum_b (i\gamma_{ab}^\mu \partial_\mu - m\delta_{ab}) \psi_b = 0} = 0$$

Dirac-Gleichung:

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0}$$

c) Photonfeld: $A_\mu(x)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left[= \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \right], \text{ mit } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \text{ (Feldstärken)}$$

$A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$ usw., $\delta S = 0 \Rightarrow$ [in Lorentz-Eichung, $\partial_\mu A^\mu = 0$]

$$\underbrace{\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right]}_{\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu)} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}}_{=0} = 0$$

Maxwell-Gleichungen für freies Photon-Feld:

$$\boxed{\square A^\nu = 0}$$

12.2 QED als Eichtheorie

(Formale Aspekte der QED)

Das freie Dirac-Feld ψ hat Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

Globale Eichtransformation

Formale Symmetrien unter $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, $\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) bilden eine Gruppe: $U(1)$, Abelsche Gruppe

Diese Transformation lässt \mathcal{L}_0 invariant.¹

Lokale Eichtransformationen

Die Transformation ist nicht invariant unter $\psi(x) \rightarrow \underbrace{e^{i\alpha(x)}}_{U(x)} \psi(x)$ ($\alpha(x)$ reelle Funktion), da

$$\partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi(x)) \neq e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x)$$

Invarianz wird erreicht durch Ersetzen der **kovarianten Ableitung**

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

¹ergibt $\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \Rightarrow Q = \int d^3x j^0$ Erhaltungsgröße

A_μ : Vektorfeld, e : Konstante unter der gleichzeitigen Transformation

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \equiv U(x)\psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \end{aligned}$$

lokale Eichtransformation

Die Symmetrie unter der lokalen Eichtransformation heißt **lokale Eichsymmetrie**, die Gruppe der Eichtransformationen heißt **Eichgruppe**. Die entscheidende Eigenschaft von \mathcal{D}_μ lautet:

$$\mathcal{D}'_\mu\psi'(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu\psi(x) \quad (\mathcal{D}'_\mu = \partial_\mu - ieA'_\mu)$$

$$(\psi' = U\psi) \quad , \quad (A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha)$$

als Operator Identität:

$$\mathcal{D}'_\mu U = U\mathcal{D}_\mu$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}'_0 &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\mathcal{D}'_\mu - m)\psi' = \\ &= \bar{u}\bar{\psi}[i\gamma^\mu \underbrace{\mathcal{D}'_\mu\psi'}_{U\mathcal{D}_\mu\psi} - mU\psi] = \\ &= \bar{\psi} \underbrace{U^\dagger U}_{=1} [i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m]\psi = \mathcal{L}_0 \end{aligned}$$

- Forderung nach lokaler Eichinvarianz erfordert Existenz eines Vektorfeldes A_μ : **Eichfeld**
- Eichfeld koppelt an ψ -Feld:

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m)\psi = \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\mathcal{L}_0} + e \underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{j^\mu} A_\mu \equiv e j^\mu A_\mu$$

\Rightarrow WW zwischen ψ und A_μ mit e als Kopplungskonstante und j^μ als erhaltener Strom ($\partial_\mu j^\mu = 0$)

- A_μ wird ein **dynamisches Feld** durch Addieren von

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad , \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = e j^\mu A_\mu$$

Der Übergang zum Hamilton-Formalismus erfolgt durch die Legendre-Transformation $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{frei}} + \mathcal{H}_{\text{int}} \Rightarrow$
 \Rightarrow Feynman-Regeln, usw.

Zusammenfassung (Strategie):

- (i) globale Symmetrie von \mathcal{L}_0
- (ii) lokale Symmetrie durch $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$ mit $\mathcal{D}'_\mu U = U \mathcal{D}_\mu$ führt ein Feld A_μ ein mit $WW \sim \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$
- (iii) A_μ dynamisch durch $+\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

Dies ist ein Konstruktionsprinzip für allgemeine Eichtheorien.

12.3 Nicht-Abelsche Eichtheorien

Verallgemeinerung: „Phasentransformationen“, die nicht kommutieren.

$\psi \rightarrow \psi' = U\psi$ mit $U_1 U_2 \neq U_2 U_1$, erfordert Matrizen U , d.h. ψ ist ein Multiplet:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad U : n \times n\text{-Matrix}$$

(beachte: jedes ψ_k ist ein Dirac-Spinor)

(i) Globale Eichsymmetrie:

Ausgangspunkt:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

mit $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n) = (\psi_1 \gamma^0, \dots, \psi_n \gamma^0)$ (alle ψ_1, \dots, ψ_n zu gleicher Masse m)

Betrachte unitäre Transformation $\psi \rightarrow U\psi$:

$$U^\dagger = U^{-1}, \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^\dagger = \bar{\psi} U^{-1}$$

$$((\psi')^\dagger) = \psi^\dagger U^\dagger, \bar{\psi}' = \psi^\dagger U^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 U^\dagger = \bar{\psi} U^\dagger$$

$\Rightarrow \bar{\psi}' \psi', \bar{\psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \psi'$ und somit \mathcal{L}_0 invariant, wenn U von x unabhängig ist.

Die U 's bilden mathematisch eine Gruppe. Physikalisch relevant: Spezielle unitäre $n \times n$ -Matrizen ($\det U = 1$):

Gruppe $SU(n)$

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} SU(2): & \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi_e \end{pmatrix} \quad \text{schwacher Isospin} \\ SU(3): & \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad \text{Colour, } \psi: \text{Quarkfeld} \end{array}$$

allgemein: $SU(n)$ ($n \geq 2$):

Jedes $U \in SU(n)$ können geschrieben werden als

$$U = e^{i\alpha^a T_a} \equiv U(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad (\alpha^a T_a = \sum_{\alpha=1}^N \alpha^a T_a)$$

mit $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$: reelle Parameter
und T_1, \dots, T_N : hermitesche $n \times n$ -Matrizen, $T_a^\dagger = T_a$, „**Generatoren**“.
 α_a infinitesimal:

$$U \simeq 1 + i\alpha^a T_a (+\mathcal{O}(\alpha^2))$$

$$\boxed{\text{Unitarität} + \det = 1 \Rightarrow N = n^2 - 1}$$

$SU(n)$: N -dimensionale **Lie-Gruppe**

$$\begin{aligned} n = 2: & \quad N = 4 - 1 = 3 \\ n = 3: & \quad N = 9 - 1 = 8 \end{aligned}$$

$SU(2)$: $f_{abc} = \epsilon_{abc}$ ($\hat{=}$ Drehimpuls-Algebra)

$$T_a = \frac{1}{2}\sigma_a \quad \sigma_a (a = 1, 2, 3): \text{Pauli-Matrizen}$$

$SU(3)$: $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ ($a = 1, \dots, 8$), mit λ_a : Gell-Mann-Matrizen

$$\lambda_a = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_a & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad (a = 1, 2, 3),$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

allgemein für $SU(n)$: T_1, \dots, T_N erfüllen VR

$$\boxed{[T_a, T_b] = if_{abc} T_c} \quad \text{Lie-Algebra}$$

mit f_{abc} : Strukturkonstanten

(reell, antisymmetrisch $f_{bac} = -f_{abc}, f_{acb} = -f_{abc}, \dots$)

übliche Normierung: $\boxed{\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}}$

Ergänzung zum Skalarfeld:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad \phi^\dagger = (\phi_1^\dagger, \dots, \phi_n^\dagger)$$

$\phi \rightarrow \phi' = U\phi$, $(\phi')^\dagger = (U\phi)^\dagger = \phi^\dagger U^\dagger = \phi^\dagger U^{-1} \Rightarrow \phi^\dagger \phi$, $(\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi)$
invariant.

$$\Rightarrow \mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$$

ist invariant unter $\phi \rightarrow \phi' = U\phi$ (später bei dr schwachen WW relevant)

(ii) Lokale Eichinvarianz:
 $\alpha_a = \alpha_a(x), U \rightarrow U(x)$

$$U = e^{i\alpha_a(x)T_a = U(\alpha_1(x)\dots\alpha_N(x))} \equiv U(x)$$

$\partial_\mu \psi'(x) \neq U(x)\partial_\mu \psi(x) \Rightarrow$ keine Invarianz von \mathcal{L}_0 unter $\psi \rightarrow U(x)\psi$.
 Lokale Symmetrie kann erreicht werden durch die **kovariante Ableitung:**

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$$

wobei gefordert wird:

$$\boxed{\mathcal{D}'_\mu U(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu}$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}' \mathcal{D}'_\mu \psi' = \bar{\psi} \mathcal{D}_\mu \psi \Rightarrow \mathcal{L}_0(\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu) \text{ invariant}$$

Ansatz:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig\mathcal{W}_\mu(x)$$

g : Kopplungskonstante, $\mathcal{W}_\mu(x)$: $n \times n$ -Matrix
 entwickeln nach T_a :

$$\mathcal{W}_\mu(x) = \sum_{a=1}^N T_a \mathcal{W}_\mu^a(x) \equiv T_a \mathcal{W}_\mu^a$$

mit N Vektorfeldern \mathcal{W}_μ^a ($a = 1, \dots, N$): **Eichfelder**

$$\mathcal{D}_\mu \rightarrow \mathcal{D}'_\mu = \partial_\mu - ig\mathcal{W}'_\mu$$

Zu klären bleibt: Was ist \mathcal{W}'_μ ?

$$\mathcal{D}'_\mu \psi' = \mathcal{D}'_\mu U \psi = U \mathcal{D}_\mu \psi \quad \text{erfüllt } \forall \psi, \text{ wenn gilt:}$$

$$\boxed{\mathcal{W}'_\mu = U \mathcal{W}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}}$$

Lokale nicht-abelsche Eichtransformation:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = U \psi \\ \mathcal{W}_\mu &\rightarrow \mathcal{W}'_\mu = U \mathcal{W}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \end{aligned}}$$

$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi$ ist invariant unter den lokalen Eichtransformationen. Eichgruppe: Gruppe der Eichtransformationen

Eichinvarianz: Invarianz unter Eichtransformationen

infinitesimal: $U = 1 + ig\alpha^a T_a \quad \boxed{\mp \mathcal{O}(\alpha^2)}$

$$\Rightarrow W'^a_\mu = W^a_\mu + \underbrace{\frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_a}_{\text{analog zur QED}} + \underbrace{f_{abc} W^b_\mu \alpha_c}_{\text{neuer nicht-abelscher Term}}$$

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_0 + \underbrace{g\bar{\psi}\gamma^\mu T_a \mathcal{W}_\mu \psi}_{=\mathcal{L}_{int}}$$

$$\mathcal{L}_{int} = g j^{\mu a} W_\mu^a$$

mit $j^{\mu a} = \bar{\psi}\gamma^\mu(T_a)\psi$
 N Ströme $j^{\mu a}$, WW mit N Vektorfeldern:

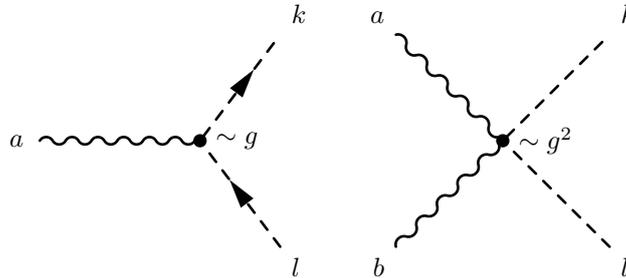
$$\mathcal{L}_{int} = g \sum_{kla} \bar{\psi}_k \gamma^\mu (T_a)_{kl} \psi_l W_\mu^a$$

Vertex: $ig\gamma^\mu(T_a)_{kl}$ $k, l = 1, \dots, 3$
 Colom-Index

Skalar:

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \phi^\dagger)(\mathcal{D}^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

lokal eichinvariant, \mathcal{L}_{int} enthält trilineare und quadrilineare Terme



(iii) Dynamik der W-Felder:
 Zusätzlicher Term \mathcal{L}_W (eichinvariant!) \rightarrow Dynamik der W-Felder (Bewegungsgleichung, Propagatoren)

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} \sum_a (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)^2 \quad : \text{ nicht eichinvariant}$$

statt dessen: $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu \mathcal{W}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{W}_\mu =$
 $= \partial_\mu \mathcal{W}_\nu - \partial_\nu \mathcal{W}_\mu - ig[\mathcal{W}_\mu, \mathcal{W}_\nu] =$
 $= \frac{i}{g} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]$

in Komponenten: $\mathcal{F}_{\mu\nu} = T_a F_{\mu\nu}^a$

Eichtransformation: $W_\mu \rightarrow W'_\mu, \mathcal{D}_\mu \rightarrow \mathcal{D}'_\mu$
 $\mathcal{D}'_\mu \mathcal{D}'_\nu = \mathcal{D}'_\mu U U^{-1} \mathcal{D}'_\nu = U \mathcal{D}_\mu U^{-1} (U \mathcal{D}_\nu U^{-1}) = U (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu) U^{-1}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{F}'_{\mu\nu} = U \mathcal{F}_{\mu\nu} U^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) &\rightarrow \text{Tr}(\mathcal{F}'_{\mu\nu} \mathcal{F}'^{\mu\nu}) = \\ &= \text{Tr}(U \mathcal{F}_{\mu\nu} U^{-1} U \mathcal{F}^{\mu\nu} U^{-1}) = \text{Tr}(U \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} U^{-1}) = \\ &= \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) \quad \text{invariant} \end{aligned}$$

Daher kann man ansetzen:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} \sum_a \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{a,\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f_{abc} W_\mu^b W_\nu^c$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_W$ enthält Selbst-WW der Vektorfelder
 benutzt wurde die Normierung:

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} g f_{abc} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a) W^{b,\mu} W^{c,\nu} - \\ &\quad - \frac{1}{4} g^2 f_{abc} f_{ade} W_\mu^b W_\nu^c W^{d,\mu} W^{e,\nu} \end{aligned}$$

\Rightarrow Feynman-Regeln

Vektorfelder W_μ^a heißen **Eichfelder**. Die W_μ^a beschreiben Spin-1-Teilchen mit Masse 0. Diese Teilchen heißen **Eichbosonen** ($a = 1, \dots, N$).

\mathcal{L}_W enthält keinen Massenterm! [Massenterm $m^2 W_\mu^a W^{a\mu}$ zerstört Eichinvarianz]
 Das Gesamtergebnis lautet somit:

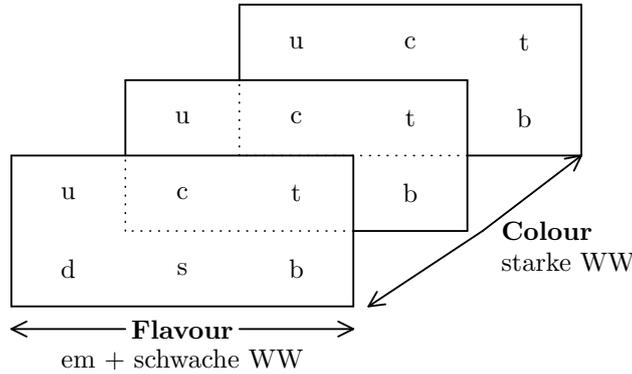
$$\mathcal{L} = (\bar{\psi} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) + \mathcal{L}_W$$

12.4 Formulierung der QCD

Quark-Felder: u, d, s, \dots Dirac-Felder

6 **Flavour**-Freiheitsgrade (Ladung, Generation, ...)

Für jeden Flavour-Freiheitsgrad: Dirac-Feld. Weiterer Freiheitsgrad: **Colour**
pro Flavour: 3 Colour-Freiheitsgrade



Pro Flavour: $\psi(x)$ Triplett $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

Jetzt: Nur ein Flavour!

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$$

$$\left(\text{In Realität: } \sum_{q=u,d,\dots} \bar{\psi}_q(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)\psi_q \right)$$

globale $SU(3)$ Symmetrie, Generatoren: $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$, $a = 1, \dots, 8$ ($N = 8$)

$$U = e^{i\alpha_a/2\lambda_a}$$

lokale $SU(3)$ Symmetrie ($\hat{=}$ lokale Eichtransformation) $\alpha_a(x)$, $a = 1, \dots, 8$

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_S T_a G_\mu^a$$

8 Vektorfelder, G_μ^a : Eichfelder (statt W_μ^a), **Gluon-Felder**

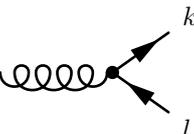
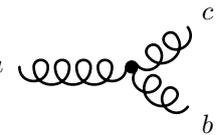
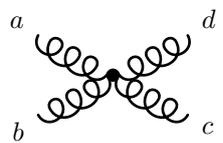
g_S : Kopplungskonstante der starken WW

üblich: $\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi}$ „Feinstrukturkonstante“ der starken WW

Für die Lagrange-Dichte und die Feldstärken ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \mathcal{L}_G \\ \mathcal{D}_\mu &= \partial_\mu - ig \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_S f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \end{aligned}$$

Quark-Gluon-WW: $g_S \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi G_\mu^a$

- Quark-Gluon-Vertex:  $ig_S(T_a)_{kl}\gamma^\mu$
- Quark-Propagator:  $i\frac{\not{q}+m}{q^2-m^2+i\epsilon} \equiv \frac{i}{\not{q}-m+i\epsilon}$
- Gluon-Propagator:  $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon}$
- 3-Gluon-WW: 
- 4-Gluon-WW: 

äußere Quarklinien: wie bisher, zusätzlich Colour-Index

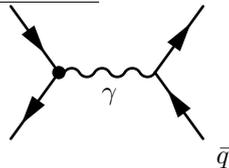
äußere Gluon-Linien: Colour-Index ($a, b, \dots = 1, \dots, 8$)

⇒ Feynman-Graphen für S-Matrixelement (**perturbative QCD**), sonst wie Photon ϵ_μ , transversal ($\lambda = \pm 1$)

Beispiele für Prozesse mit Quarks und Gluonen

(i) Prozesse an e^+e^- -Collidern

a) $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ (Quark-Antiquark-Erzeugung):



aus $M(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ durch $\mathcal{M}_{ij} = \delta_{ij}Q_q \cdot M(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$
für $s \gg$ Massen: $s = (p_{e^-} + p_{e^+})^2 = E_{CMS}^2$

$$\sum_{i,j=1}^3 |\mathcal{M}_{ij}|^2 = \sum_{\underbrace{ij}_3} \delta_{ij} |M(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 Q_q^2$$

$$\Rightarrow \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = 3Q_q^2 \underbrace{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}_{= \frac{4\pi\alpha^2}{3s}}$$

$$(q = u, d, s, c, b) \rightarrow \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}) = \sum_q \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$

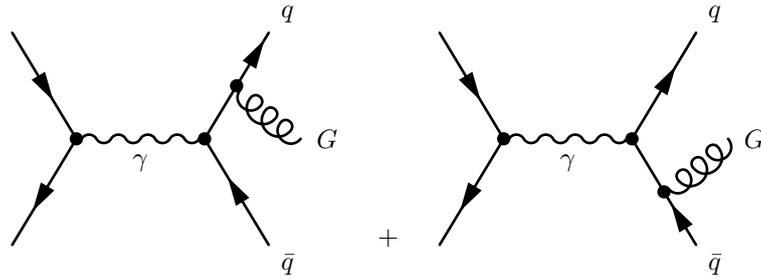


$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{Had} = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

$$\mathcal{R} = 3 \sum_q (Q_q)^2 \quad \text{Faktor 3 exp. bestätigt}$$

(alles in niedrigster Ordnung)

b) $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}G$ (Gluon-Abstrahlung):



$$\mathcal{M} = (T_a)_{ij} \underbrace{M(\text{ohne Colour})}_{\sim g_s}$$

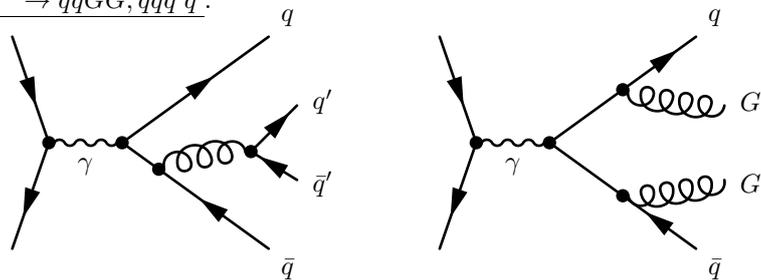
$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^8 \sum_{i,j=1}^3 |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{a,i,j} (T_a)_{ij} \underbrace{(T_a)_{ij}^*}_{=(T_a)_{ij}, \text{ da } T_a = T_a^*} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \sum_a \underbrace{\sum_i (T_a T_a)_{ij}}_{=Tr(T_a T_a) = \frac{1}{2}, \text{ da } Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= 8 \cdot \frac{1}{2} |\mathcal{M}|^2 = 4 \cdot |\mathcal{M}|^2 \end{aligned}$$

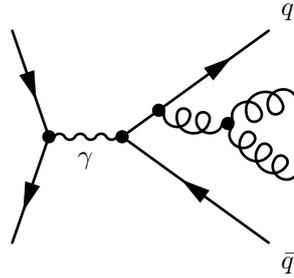
\Rightarrow differentielle WQ für $q\bar{q}G \sim \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$

Signatur: 3 Jets \Rightarrow exp. Bestimmung von α_s (= 0, 12)

genaueste Messung bei Z-Resonanz (LEP) (Beobachtung von 3 Jets
zuerst bei DESY, e^+e^- -Speicherung PETRA)

c) $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}GG, q\bar{q}q'\bar{q}'$:





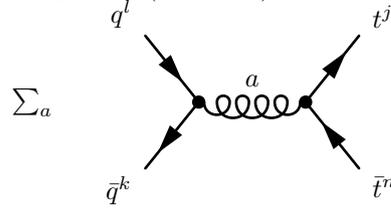
nicht-Abelsche 3-G-Kopplung (exp. verifiziert)

(ii) Prozesse an Hadron-Collidern Tevatron: $p\text{-}\bar{p}$; $\sqrt{S} = 2 \text{ TeV}$
 LHC: $p\text{-}p$; $\sqrt{S} = 14 \text{ TeV}$

$q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$ (Top-Quark-Erzeugung):

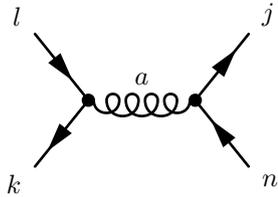
$$m_{top} \approx 172 \text{ GeV} \quad (172, 6 \pm 1, 4 \text{ GeV})$$

q, \bar{q} aus Proton und Antiproton (Tevatron)



\mathcal{M} für $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$

$$\mathcal{M} = i \frac{g_S^2}{s} \sum_{a=1}^8 (T_a)_{lk} (T_a)_{ij} (\bar{v} \gamma^\mu u) (\bar{u}' \gamma_\mu v')$$



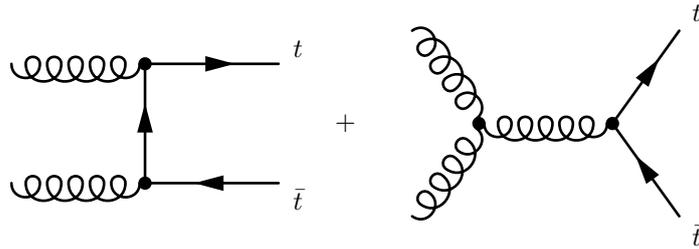
l, k, j, i :
 Colour der \bar{q}, q
 und $t\bar{t}$

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^* \sim \sum_{a,b} (T_a)_{lk} (T_a)_{ij} \underbrace{(T_b)_{lk}^* (T_b)_{ij}^*}_{(T_b)_{kl} (T_b)_{ji}}$$

Über j, i Summieren und über k, l Mitteln ergibt:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum_{a,b} \sum_{l,k} \sum_{i,j} (T_a)_{lk} (T_b)_{kl} (T_a)_{ij} (T_b)_{ji} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{a,b} \text{Tr}(T_a T_b) \cdot \text{Tr}(T_a T_b) \\ &= \frac{1}{9} \sum_{a,b} \frac{1}{2} \delta_{ab} \cdot \frac{1}{2} \delta_{ab} = \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{4} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Anmerkung: Es gibt noch weitere Beiträge aus der Gluon-Fusion



mit der Gluon-Dichte $G(x)$ im Proton.

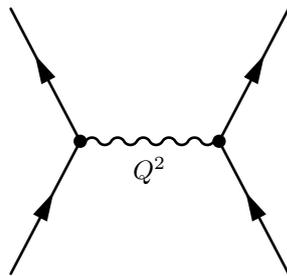
Klein beim Tevatron, dominant beim LHC wegen der höheren Energie $\sqrt{S} = 14$ TeV.

12.5 Starke Kopplungskonstante

laufende Kopplung, “running coupling“

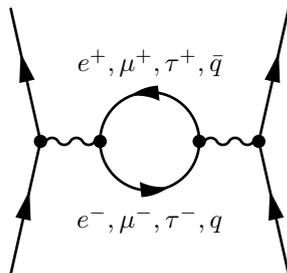
12.5.1 α in der QED

WW zwischen geladenen Teilchen:



$$\sim e^2 = 4\pi\alpha \text{ mit } \alpha = \frac{1}{137,086\dots} \text{ und } e: \text{ klassische Ladung}$$

Ladung wird modifiziert durch Schleifen-Terme (\sim höhere Ordnung Störungstheorie):

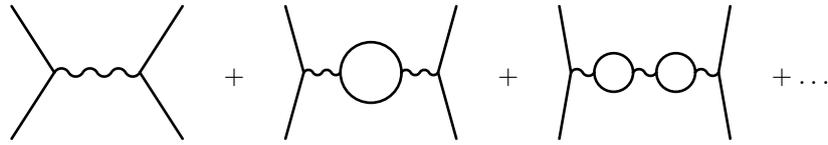


$$\sim e^2 \cdot \underbrace{\Pi(Q^2)}_{\text{Vakuumpolarisation}} \\ \sim e^2 \sum_{f=e,\dots,q} Q_f^2(\dots)$$

$$\Pi(Q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f Q_f^2 \left[\log \frac{Q^2}{m_f^2} + (\dots \text{ von } Q^2 \text{ unabh. Terme}) \right]$$

gilt für $|Q^2| > m^2$, sonst $\Pi(Q^2) \sim \frac{Q^2}{m_f^2} \rightarrow 0$ für $Q^2 \ll m_f^2$.

Wiederholtes Einsetzen und Summieren:



$$\sim e^2 [1 + \Pi(Q^2) + \Pi(Q^2)^2 + \dots] = e^2 \cdot \frac{1}{1 - \Pi(Q^2)} \text{ geometrische Reihe}$$

effektives α :

$$\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{1 - \Pi(Q^2)} \equiv \alpha(Q^2) \quad \text{laufende Kopplung der QED}^2$$

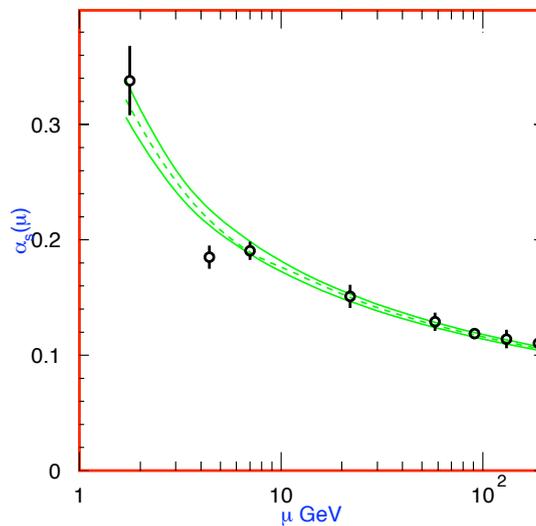


Abbildung 12.1: laufende QCD-Kopplung

z. B. bei $M_t = 91$: $\alpha(M_z^2) = \frac{1}{128,8}$ (\sum_f mit $f = e, \mu, \tau, u, d, \dots, b$, ohne top, da $M_z^2 \ll m_t^2$) Statt $\alpha = \frac{1}{137}$ als Input kann $\alpha(Q_0^2)$ bei einem beliebigen (aber festen) Q_0^2 gewählt werden.



$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\pi} \sum_f Q_f^2 (\log \frac{Q^2}{m_f^2} + \dots)$$

$$\frac{1}{\alpha(Q_0^2)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\pi} \sum_f Q_f^2 (\log \frac{Q_0^2}{m_f^2} + \dots)$$

²wächst an mit Q^2 , siehe auch Abbildung 12.1

ergibt:

$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} - \frac{1}{\alpha(Q_0^2)} = -\frac{1}{3\pi} \sum_f Q_f^2 \cdot \log \frac{Q^2}{Q_0^2} = -\frac{\beta_0}{4\pi} \log \frac{Q^2}{Q_0^2} \quad (1)$$

wobei

$$\beta_0 = \frac{4}{3} \sum_f Q_f^2 > 0$$

Auflösen nach $\alpha(Q^2)$ ergibt:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\alpha(Q_0^2)}{4\pi} \beta_0 \log \frac{Q^2}{Q_0^2}} \quad (1')$$

erfüllt DGL

$$Q^2 \frac{d\alpha(Q^2)}{dQ^2} = \frac{\beta_0}{4\pi} \alpha^2$$

Evolutionsgleichung, Renormierungsgruppen-Gleichung (RGE)

(1), (1') ist Lösung mit Anfangsbedingung $\alpha(Q_0^2)$.

Allgemein lautet die RGE (aus QFT):

$$Q^2 \frac{d\alpha}{dQ^2} = \beta(\alpha)$$

mit der β -Funktion $\beta(\alpha)$, die das Laufen von α bestimmt. $\beta(\alpha)$ kann perturbativ berechnet werden:

$$\beta(\alpha) = \underbrace{\frac{\beta_0}{4\pi}}_{1\text{-Loop}} \alpha^2 + \underbrace{\frac{\beta_1}{(4\pi)^2}}_{2\text{-Loop}} \alpha^3$$

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} \quad \Pi^{(2\text{-Loop})} = \frac{\beta_1}{(4\pi)^2} \alpha^2 \log Q^2 + \dots$$

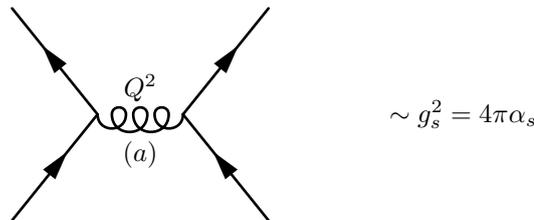
Die Lösung der RGE entspricht dem Aufsummieren der geometrischen Reihe

$$1 + \Pi + \Pi^2 + \dots = \frac{1}{1-\Pi} \hat{=} \text{Aufsummieren von } \alpha^n \log \frac{nQ^2}{Q_0^2}$$

Vorzeichen von $\beta(\alpha)$ bestimmt das asymptotische Verhalten von α

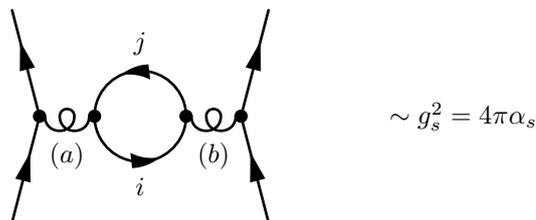
12.5.2 α_s in der QCD

WW zwischen Quarks (starke WW):



$$\sim g_s^2 = 4\pi\alpha_s$$

Vakuum-Polarisation durch virtuelle Quark-Antiquark-Paare:



$$\Pi^{(q)}(Q^2) = \sum_{q=u,d,\dots} g_s^2 \underbrace{\sum_{i,j} (T_a)_{ij} (T_b)_{ji}}_{=Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}} \cdot [\text{Rest wie QED}]$$

Man erhält demnach $\Pi^{(q)}$ aus Π^{QED} durch Ersetzen:

$$\sum_{f=e,\mu,\tau,q} e^2 Q_f^2 \rightarrow \sum_q g_s^2 \cdot \frac{1}{2} n_f$$

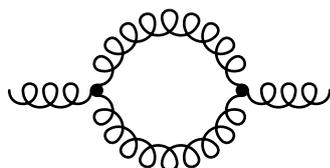
Also:

$$\Pi^{(q)}(Q^2) = \frac{\alpha_s}{3\pi} \cdot \frac{1}{2} \sum_q \left(\log \frac{Q^2}{m_q^2 + \dots} \right) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot \beta_0^{(q)} \cdot \log Q^2 + (\dots \text{ von } Q^2 \text{ unabh.})$$

mit

- $\beta_0^{(q)} = \frac{4}{3} \sum_q \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{n_f}{2} > 0$,
- n_f : Anzahl der Flavour (≤ 6)
- ($n_f = 5$ für $Q^2 < m_t^2$)

Soweit alles analog zu QED. Es ergäbe sich ein Anwachsen von $\alpha_s(Q^2)$ mit wachsendem Q^2 . Jedoch: $\beta_0 = \beta_0^{(q)} + \beta_0^{(g)}$ mit einem weiteren nicht-abelschen Beitrag von den Gluonen:



$$\beta_0^{(g)} = +11 \quad (\text{Vorzeichen!})$$

Damit:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f$$

$\rightarrow \beta_0 > 0$ für $n_f < \frac{33}{2}$

Da empirisch $n_f \leq 6$ gilt, ist also $\beta_0 < 0$.

Laufende Kopplung der QCD:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{1 + \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{4\pi} (11 - \frac{2}{3} n_f) \log \frac{Q^2}{Q_0^2}}$$

$\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ für $Q^2 \rightarrow \infty$

starke WW wird schwach für große Q^2 . Diese Eigenschaft wird als „**asymptotische Freiheit**“ bezeichnet und ist eine wesentliche Eigenschaft der QCD.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\alpha_s(M_z^2) &= 0,12 & M_z &= 91 \text{ GeV} \\ \alpha_s(m_\tau^2) &= 0,34 & m_\tau &= 1,8 \text{ GeV}\end{aligned}$$

Bei kleinen Q^2 : $\alpha_s(Q^2)$ wird groß, divergiert für ein bestimmtes $Q^2 = \Lambda^2$:

$$\frac{1}{\alpha_s(\Lambda^2)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^2 = Q_0^2 \exp \frac{-12\pi}{(33 - 2n_f)\alpha_s(Q_0^2)}$$

$$\boxed{\Lambda \simeq (200 \pm 100) \text{ MeV}}$$

Die laufende Kopplungskonstante lässt sich durch Λ ausdrücken, wenn man $\alpha_s(Q_0^2)$ durch Λ substituiert:

$$\underbrace{\frac{1}{\alpha_s(\Lambda^2)}}_{=0} - \frac{1}{\alpha_s(Q_0^2)} = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3}n_f \right) \log \frac{\Lambda^2}{Q_0^2}$$

und damit

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3}n_f \right) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

oder aufgelöst nach $\alpha_s(Q^2)$:

$$\boxed{\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}}}$$

Λ bestimmt die Skala, wo die Störungsrechnung nicht mehr anwendbar ist. (zum Vergleich: Π -Masse $m_\pi \simeq 140 \text{ MeV}$) Störungsrechnung für $|Q^2| \gg \Lambda^2$

Die Unsicherheit von Λ hat mehrere Gründe:

- exp. Fehler von $\alpha_s(Q_0^2)$
- Abhängigkeit von der Ordnung der Störungsrechnung
- Abhängigkeit von der Zahl der „aktiven“ Flavour, d.h. derjenigen die zum Laufen beitragen.

Für $Q^2 \lesssim \Lambda^2$ sind nicht-perturbative Methoden nötig, wie z. B. Gitter-Approximation, oder chirale Störungsrechnung,...

Anhang A

Grundlagen

Abbildung Nuklidkarte (siehe Abbildung A.1, Seite 173)

Halbwertszeit und **Aktivität** A :

$$A = -\frac{dn}{dt} = \lambda n(t)$$

mit $n(t)$ = Zahl der vorhandenen Kerne und $n_0 = n(t=0)$

$$\Rightarrow A(t) = \lambda \cdot n(t) = \lambda n_0 e^{-\lambda t}$$

Lebensdauer $\tau = 1/\lambda$ und **Halbwertszeit** $T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$.

Isomere: Nukleare Anregungen haben in der Regel kurze Halbwertszeiten. ($T_{1/2} \simeq 10^{-9}$ bis 10^{-15} s)

Welle-Teilchen-Dualismus: Teilchen mit Impuls \vec{p} , Wellenvektor \vec{k} mit $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ und Wellenlänge λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}$$

Unschärferelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

Um Objekte der Größe $\Delta x \simeq \text{fm}$ auflösen zu können:

$$\rightarrow \lambda < \Delta x \Rightarrow p > \frac{2\pi\hbar}{\Delta x} \text{ bzw. } p \gtrsim \frac{200 \frac{\text{MeV fm}}{c}}{\text{fm}} \simeq 200 \text{ MeV}/c$$

Vierervektoren:

$$\text{Ort: } x = (ct, \vec{x}) \quad \text{Impuls: } p = (E/c, \vec{p})$$

Skalarprodukt zweier Vierervektoren a und b :

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren ist lorentz-invariant! z.B.:

$$p^2 = p \cdot p = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \text{const}$$

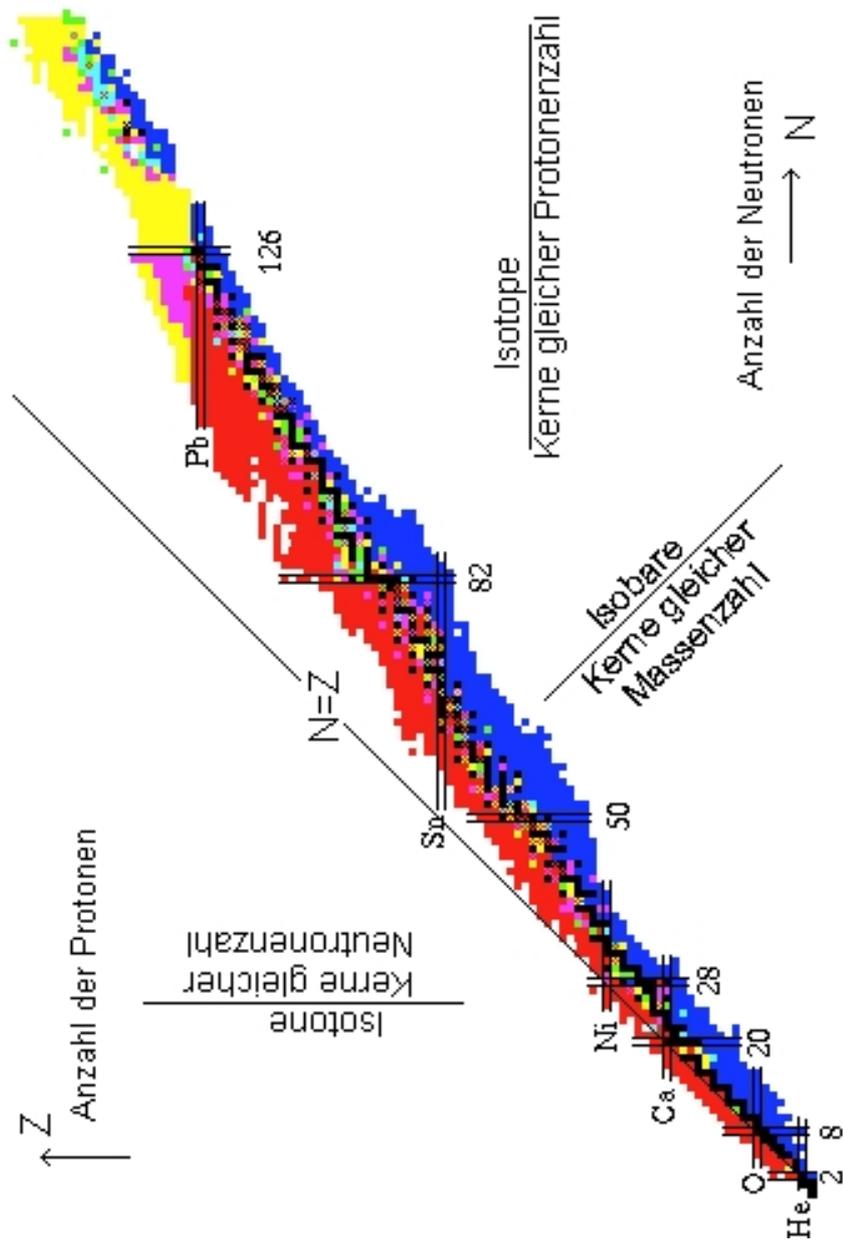


Abbildung A.1: Abbildung einer Nuklidkarte

Im Ruhesystem gilt $\vec{p} = 0$ und

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} = \frac{m^2 m^4}{c^2} = m^2 c^2$$

dabei ist $m = \sqrt{p^2}/c$ die **invariante Masse**.

Energie- und Impulserhaltung: Gesamtenergie $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$. Beim Photon mit $m = 0$ ist $E = pc$. Für $pc \ll m_0 c^2$ gilt die **nicht relativistische Näherung**:

$$E \simeq m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$$

Geschwindigkeiten: $\beta := \frac{c}{v}$ und $\gamma := (1 - \beta^2)^{-1/2}$

$\Rightarrow E = \gamma m_0 c^2$ und $p = \gamma m_0 v$

Drehimpuls:

	klassisch:	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$
	quantenmechanisch:	$\hat{L} = -i\hbar(\hat{r} \times \nabla)$
Erwartungswerte:		$\langle \hat{L}^2 \rangle = l(l+1)\hbar^2$
		$\langle L_z \rangle = m\hbar$ mit $m = -l, -l+1, \dots, l$

Anhang B

Formelsammlung

A) Photon-Feld

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{2k^0} \left[a_\lambda(k) \epsilon_\lambda^\mu(k) e^{-ikx} + a_\lambda(k)^\dagger \epsilon_\lambda^\mu(k)^* e^{ikx} \right]$$

a : Vernichter, a^\dagger : Erzeuger von Photonen.

$a_\lambda^\dagger(k) |0\rangle = |k\lambda\rangle$, $a_\lambda(k) |k'\lambda'\rangle = 2k^0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') |0\rangle \delta_{\lambda\lambda'}$ (sonst 0).

$\epsilon_\lambda^\mu(k)$: Polarisationsvektoren, $\lambda \pm 1$: Helizität, $\lambda = 1, 2$: lineare Polarisation.

$\epsilon^\mu \cdot k_\mu = 0$, $\epsilon^2 = -1$

B) Dirac-Feld (am Beispiel e^- , e^+)

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{2p^0} \left[c_\sigma(p) u_\sigma(p) e^{-ipx} + d_\sigma^\dagger(p) v_\sigma(p) e^{ipx} \right]$$

c, c^\dagger : Vernichter/Erzeuger von e^-

d, d^\dagger : Vernichter/Erzeuger von e^+

$c_\sigma^\dagger(p) |0\rangle = |e^-, p\sigma\rangle$, $d^\dagger |0\rangle = |e^+, p\sigma\rangle$

$$c_\sigma(p) |e^-, p'\sigma'\rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \cdot 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') |0\rangle$$

$$d_\sigma(p) |e^+, p'\sigma'\rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \cdot 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') |0\rangle$$

(sonst ergibt sich immer 0)

Spinoren u, v sind normiert gemäß $\bar{u}u = 2m$, $\bar{v}v = -2m$. 1-Teilchen-Zustände

sind normiert gemäß $\langle p\sigma | p'\sigma' \rangle = 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\sigma\sigma'}$.

Anhang C

**Literaturverzeichnis &
Index**

Literaturverzeichnis

- [1] Bogdan Povh, Klaus Rith *Teilchen und Kerne*, Springer Verlag, Berlin, 6. Auflage, 2006, ISBN 3-540-65928-5
- [2] Theo Mayer-Kuckuk, *Kernphysik - Eine Einführung*, Teubner Verlag, 7. Auflage, 2002, ISBN 3-519-13223-0

Index

- 2^j -Pol-Moment
 - elektrisches, 116
 - magnetisches, 117
- Aktivität, 165
- Asymmetrieterm, 27
- Auswahlregeln, 116

- Barionen, 6
- Baryon-Antibaryon Asymetrie, 130
- Big Bang Modell, 127
- Bindungsenergie, 25
- β^+ -Zerfall, 29
- Bragg-Kurve, 64
- Breit-Wigner-Formel, 123

- Chandrasekhar-Limit, 134
- Chandrasekhar-masse, 134
- Colour, 163
- Coulombterm, 27

- Dipolresonanz, 125
- Dirac-Gleichung, 156
- Dirac-See, 19

- Eichbosonen, 162
- Eichfeld, 157
- Eichfelder, 160, 162
- Eichgruppe, 157
- Eichtransformation
 - globale, 156
 - lokale, 156
- E_j -Strahlung, 115
- E_l -Strahlung, 113
- Elektroneneinfang, 30

- Feld-Operator, 20
- Feldgleichung, 155
- Fermis's goldene Regel, 103
- Feynman-Diagramme, 7
- Feynman-Regeln, 139, 144, 162
- Flavour, 163

- Formfaktors, 104
- freeze out, 127

- Gamov-Faktor, 131
- Gamovfaktor, 32
- Gluon-Felder, 163
- Gluonen, 6

- Hadronen, 6
- Halbwertszeit, 165
- hard core, 152

- Innere Konversion, 124
- invariante Masse, 167
- Isobare, 24
- Isomere, 165
- Isomere Zustände, 125
- Isotone, 24
- Isotope, 24

- Kernfluoreszenz, 118
- Kernfusion, 33
- Kernspaltung, 33
- Klein-Gordon-Gleichung, 11, 155
- Konversionskoeffizient, 124

- Löchertheorie, 19
- Lamb-Shift, 145
- Lebensdauer, 165
- Leptonen, 6
- Lie-Gruppe, 159
- Lorentz-Verteilung, 124

- magische Zahlen, 39
- Massendefekt, 24
- Maxwell-Gleichungen, 156
- M_l -Strahlung, 113
- Mößbauer-effekt, 119
- Mott-Wirkungsquerschnitt, 98

- Oberflächenterm, 27

- p-Prozess, 133

Paarungsterm, 28

r-Prozess, 134
Rosenbluth-Formel, 102
Rutherford-Wirkungsquerschnitt:, 96

s-Prozess, 133
Sachs-Formfaktoren, 102
Schleifen, 144
Seperationsenergie, 25
Spaltung
 spontane, 34
Super Nova, 134

Vektor-Kugelfunktionen, 113
Vektorbosonen, 6
Virialtheorem, 131
Volumenterm, 27

Wechselwirkung
 schwache, 7, 29, 30
 starke, 7
Weizsäcker Massenformel, 27
Wirkungsquerschnitt
 differentielle, 55
 totale, 55