

① Potential im Kerninneren

Christian Gemnick

Vernachlässigung von Spin und Isospin Effekten

WW gesehen durch $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ zwischen zwei Nucleonen

$$W(\vec{r}) = \sum_i V(\vec{r} - \vec{r}_i)$$
$$= \int d^3r' V(\vec{r} - \vec{r}') \sum_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

mit $\rho(\vec{r}) = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

$$W(\vec{r}) = \int d^3r' V(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') = V(\vec{r}) \otimes \rho(\vec{r})$$

Näherung: Reichweite der Kernkraft $\ll r_{\text{Kern}}$

$$r_{\text{Kern}} \approx 10 \text{ fm}$$

$$\text{Reichweite} \approx 1-2 \text{ fm}$$

②

⇒ Reichtum verschwindend

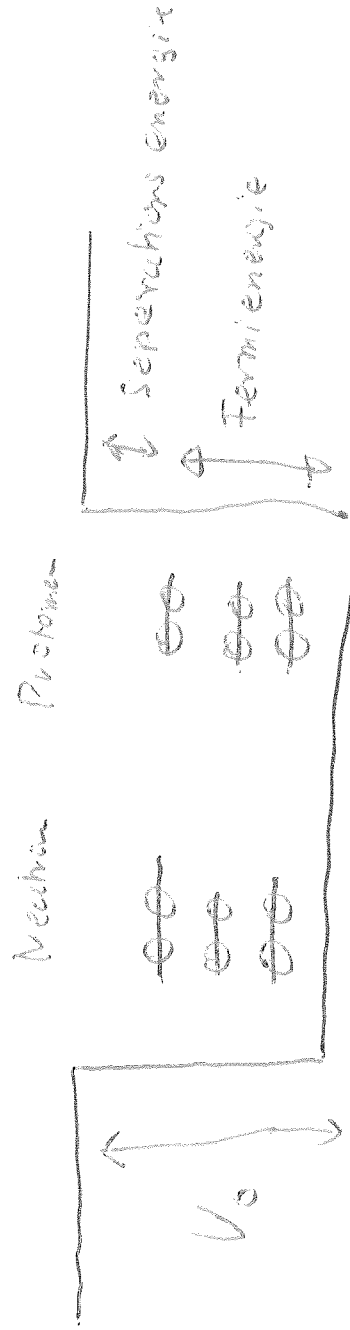
$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_0 \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\Rightarrow W(\vec{r}) = V_0 \rho(\vec{r})$$

Das Potential ist proportional zur Kern-dichte.

Diese ist Näherungsweise konstant in Innern und fällt außen schnell auf Null ab.

Fermi Gas Modell



Annahme: Für das einzelne Nukleon erscheint das Kerninnere unendlich ausgefüllt

③

$$\Rightarrow \text{Lösung: } \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sqrt{V}^{-1} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

bei endlichen Kernvolumen diskrete k Werte,

bei $\frac{1}{2}V \rightarrow \infty$: Kontinuum im k -Raum

$$\text{Anzahl Zustände } dN = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \cdot V \cdot g$$

Integration bis zum Fermi Impuls:

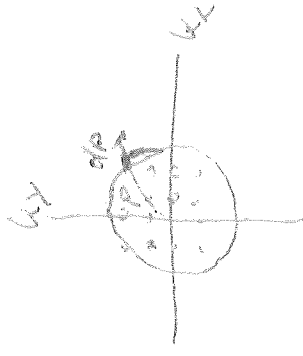
$$\frac{n}{V} = S = \frac{p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} g = \frac{1}{6\pi^2} k_F^3 \cdot g \quad (\vec{p} = \hbar\vec{k})$$

mit g : Anzahl der Teilchen, die in einem Zustand

passen. Hier: $g=4$: $2p$

Daraus ergibt sich für die Anzahl der Neutronen N und der Anzahl der Protonen Z

$$N = \frac{2}{6\pi^2} k_{F,n}^3 \quad Z = \frac{2}{6\pi^2} k_{F,p}^3$$



⑨ Experimentell gemessene (Anzahl \rightarrow) Dichte im Kern aus Elektronenschichtung: $\rho \approx 0,16 \text{ fm}^{-3}$ (für $n+p$)

$$\Rightarrow k_F \approx 1,35 \text{ fm}^{-1} \quad (k_F = \sqrt{\frac{2\pi^2 \rho}{3}})$$

$$P_F = 260 \text{ MeV}/c$$

$$\text{Fermi Energie: } E_F = 37 \text{ MeV} \quad (E_F = \frac{P_F^2}{2m})$$

$$\text{Dichte kinetische Energie } \varepsilon_{\text{kin}} = 4 \cdot \int_0^{P_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \frac{3}{5} \frac{P_F^2}{2m} \cdot \rho$$

$$\frac{E_{\text{kin}}}{A} = \frac{\varepsilon_{\text{kin}}}{\rho} = \frac{3}{5} \frac{P_F^2}{2m} \approx 22 \text{ MeV}$$

Gesamte kinetische Energie für Protonen und Neutronen

$$E_{\text{kin}}(N, Z) = E_{P, \text{kin}} + E_{n, \text{kin}} \\ = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2m} (N \cdot P_{n,p}^2 + Z \cdot P_{n,p}^2)$$

$$\begin{aligned} d^3k &= k^2 dk \cos\theta \\ &= 4\pi k^2 dk \end{aligned}$$

5)

Follets $N = V \cdot S_n$ und $Z = V \cdot S_p$

und $k_F = \frac{R_F}{\hbar} = \sqrt[3]{\frac{6\pi^2}{2} S}$

$\alpha = 2$ für "spin up" und "spin down"

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{3\hbar^2}{40m} (3\pi^2)^{2/3} \cdot V \cdot (S_n^{5/3} + S_p^{5/3})$$

Asymmetrie parameter: $\alpha = \frac{N-Z}{A}$

Nukleondichte ausgedrückt durch Asymmetrieparameter:

$$S_{np} = \frac{1}{2} \frac{A}{V} (1 \pm \alpha)$$

also z.B.

$$= \frac{1}{2} \frac{A}{V} \left(1 + \frac{N-Z}{A}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{A}{V} + \frac{N-Z}{V}\right)$$

$$= \frac{1}{2V} (N+Z + N-Z)$$

$$= \frac{1}{2V} \cdot 2N = \frac{N}{V}$$

und: $V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \cdot A$
 Taylorentwicklung von $E_{kin}(\alpha)$ bis zur
 zweiten Ordnung:

$$E_{kin}(\alpha(N, Z)) = \frac{3}{10m} \cdot \frac{\hbar^2}{r_0^2} \left(\frac{8}{9\pi}\right)^{2/3} \cdot A \left(1 + \frac{5}{3} \alpha^2\right)$$

$$(6) E_{\text{kin}} (x(\text{MeV})) \propto \left(1 + \frac{5}{83} x^2\right)$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{5}{83} \left(\frac{N-Z}{A}\right)^2}_p$$

Volumenenergie Asymmetrieenergie in Bethe-W.
in Bethe-W.

Schalenmodell

Experimenteller Befund:

Kerne mit folgender Anzahl für N oder Z sind

besonders stabil: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, magische Zahlen

Von höchste Stabilität: doppelt magische Kerne:



① Kernpotentiale:

- Rechteck

= Woods - Saxon

$$W(r) = -W_0 \left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}} \right)^{-1}$$

W_0 Potentialtiefe

R_0 Kernradius

a Dicke des

Kernoberfläche

jahrbuch
 \Rightarrow - Oszillatorpotential

$$W(r) = \frac{m}{2} \omega_0^2 r^2 - W_0$$

Einteilchen hamiltonoperator:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m}{2} \omega_0^2 r^2 - W_0$$

Lösung: $f_{nlm_2}(r) = R_{nl}(r) Y_{lm_2}(\theta, \varphi)$

R_{nl} = Laguerre - Polynom \times exponentielle Faktor

Y_{lm_2} = Kugelfläche Funktion

2

Eigenmerk diese Lösung:

$$E_{nl} = \hbar \omega_0 \left(2(n-1) + l + \frac{3}{2} \right)$$

$$= \hbar \omega_0 \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

Hauptquantenzahl $N = 2(n-1) + l$, $N = 0, 1, 2, \dots$

$$n_{\max} = \begin{cases} N/2 & N \text{ gerade} \\ (N-1)/2 & N \text{ ungerade} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, n_{\max} \quad \text{charakter}$$

$$l = 0, 1, \dots, N$$

Dieses Modell erzeugt die magische Zahlen:

$$\underline{2}, \underline{8}, \underline{20}, \underline{40}, 70, 112, 168$$

Experimentell beobachtet: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

(3)

Spin Bahn Term

Spin bisher nur bei Besetzungszuständen berücksichtigt

nun: Spin Bahn Kopplung: $V_{sb} = f(r) \vec{L} \cdot \vec{S}$

Führt zu einer Aufspaltung der bis her entarteten Niveaus

Das Vorzeichen ist umgekehrt zur Atomphysik!

(Motivation: Man erhält die Spin Bahn Kopplung in dieser Form aus der Dirac Gleichung

Spin $1/2$ des Nucleons koppelt mit \vec{L} zu Bahn Drehimpuls \vec{J}

$$j = l \pm 1/2$$

$$[\vec{L}^2, \vec{S}^2] = 0$$

$$[\vec{L}^2, j_z] = 0$$

$$[\vec{L}^2, \vec{L}^2] = 0$$

$$[\vec{L}^2, l_z] \neq l_z$$

$$[\vec{L}^2, \vec{J}^2] = 0$$

$$[\vec{L}^2, s_z] \neq 0$$

Gute Quantenzahlen:

n, l, j, m_j

(19)

Notation der Zustände: $|n, l, j\rangle$

$$n=2$$

$$l=2$$

$$j=5/2$$

z.B.: $2d_{5/2}$

Einheitswellenfunktion zu diesem Hamiltonoperator:

$$\psi_{n, l, j; m_j}(\vec{r}, s) = R_{n, l}(r) \sum_{m_l, m_s} C_{m_l, m_s}^{l, l, j} Y_{l, m_l}(\theta, \varphi) \chi_{s, m_s}(\frac{1}{2} m_j)$$

mit $C_{l, m_l}^{l, j, j}$ den Clebsch-Gordan Koeffizienten

Bei konstantem Ortswert $f(r)$, also $V_{e_s} = c \vec{L} \cdot \vec{S}$

$$\langle 2d_{5/2} | n, l, j, m_j \rangle = (\vec{S}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) | n, l, j, m_j \rangle$$

$$= (j(j+1) - l(l+1) - 3/4) | n, l, j, m_j \rangle$$

(mit $j = l \pm 1/2$)

$$\Delta E(l) \propto 2l+1$$

① \Rightarrow Jedes Niveau mit $j = l_{\max} + 7/2$ wird stark nach unten verschoben.

\Rightarrow Bildung effektiver Schale, da ein Niveau mit Hauptquantenzahl N um $j_{\max} = l_{\max} + 7/2$ in die Nähe der Niveaus rückt, die zu $N-1$ gehören
"Intruder Niveaus"

\Rightarrow mesische Zahl des den Schalenmodell mit l_{\max} Kopplung:

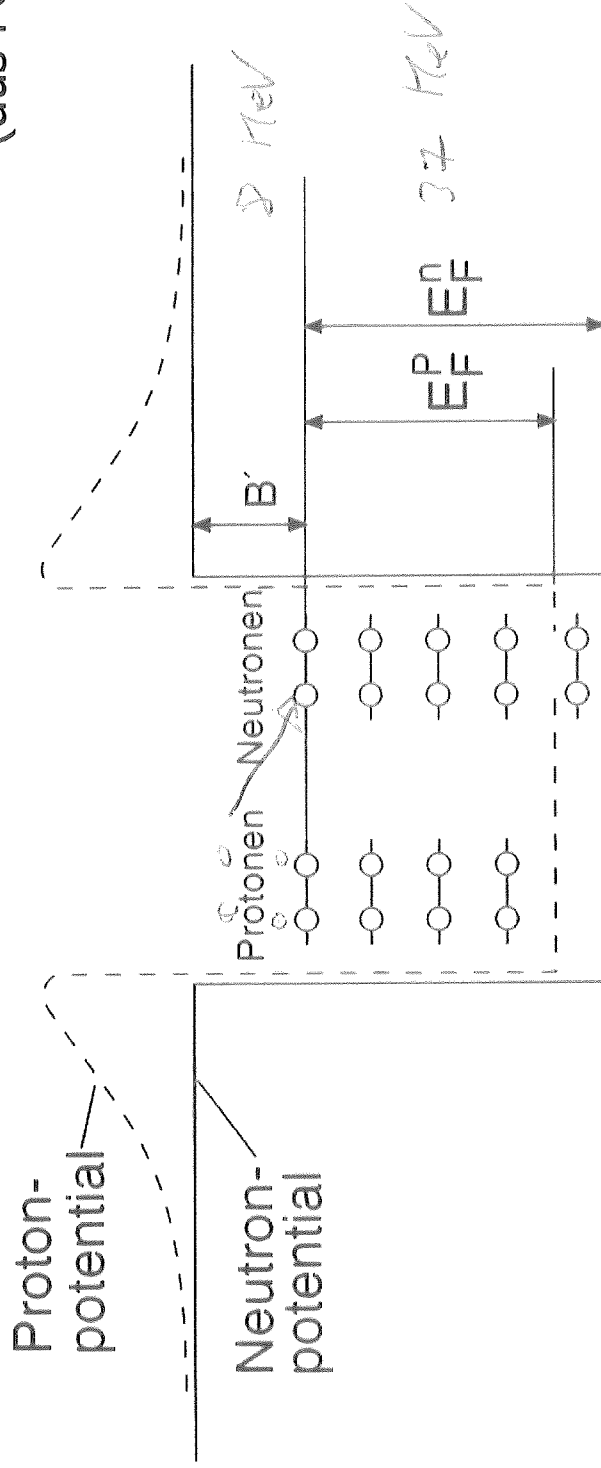
2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

experimentelle Übereinstimmung

Stärke der Spin-Bahn Kopplung: 17 eV

Fermi-Gas Modell

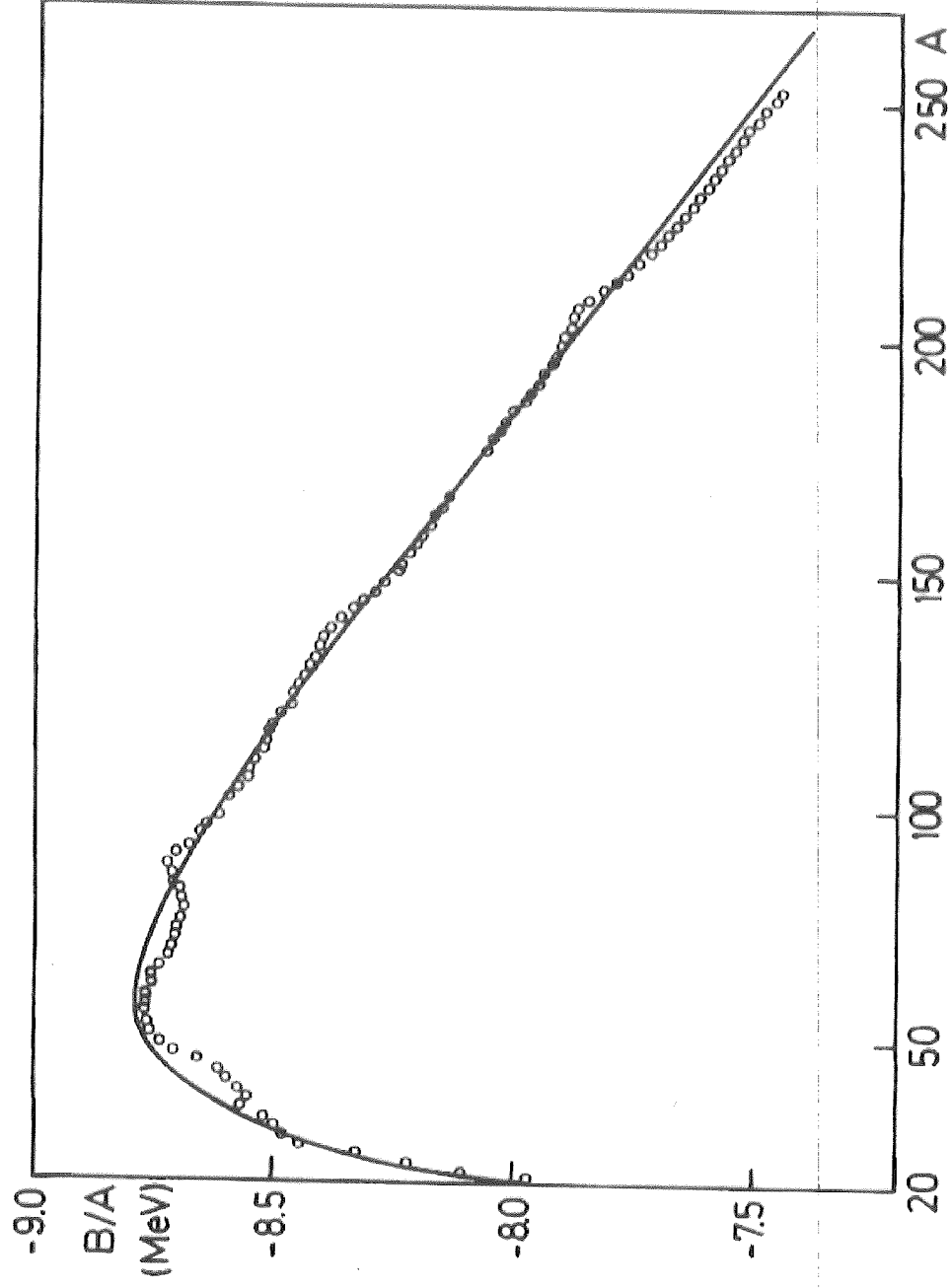
(aus Povh)

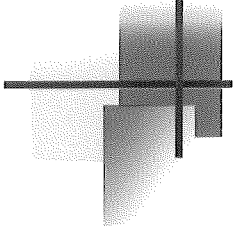


$$E_{kin} = X \cdot A + Y \cdot \frac{(N-Z)^2}{A}$$

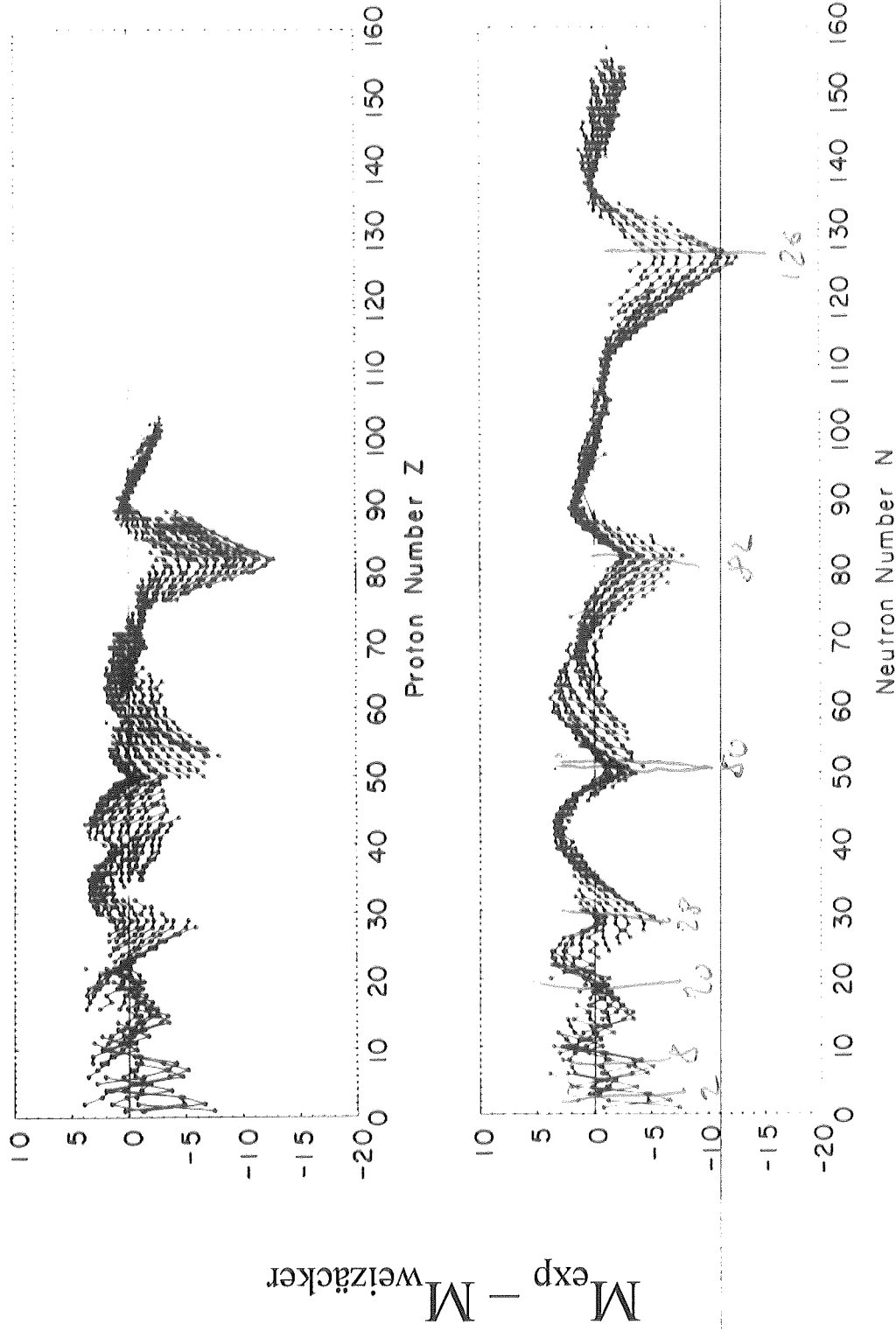
$$B(Z, N) = \underbrace{a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Tröpfchenmodell}} - \underbrace{a_a \frac{(N-Z)^2}{A}}_{\text{Fermi-Gas Modell}} - \delta$$

Evidenz für Schalenabschlüsse 1

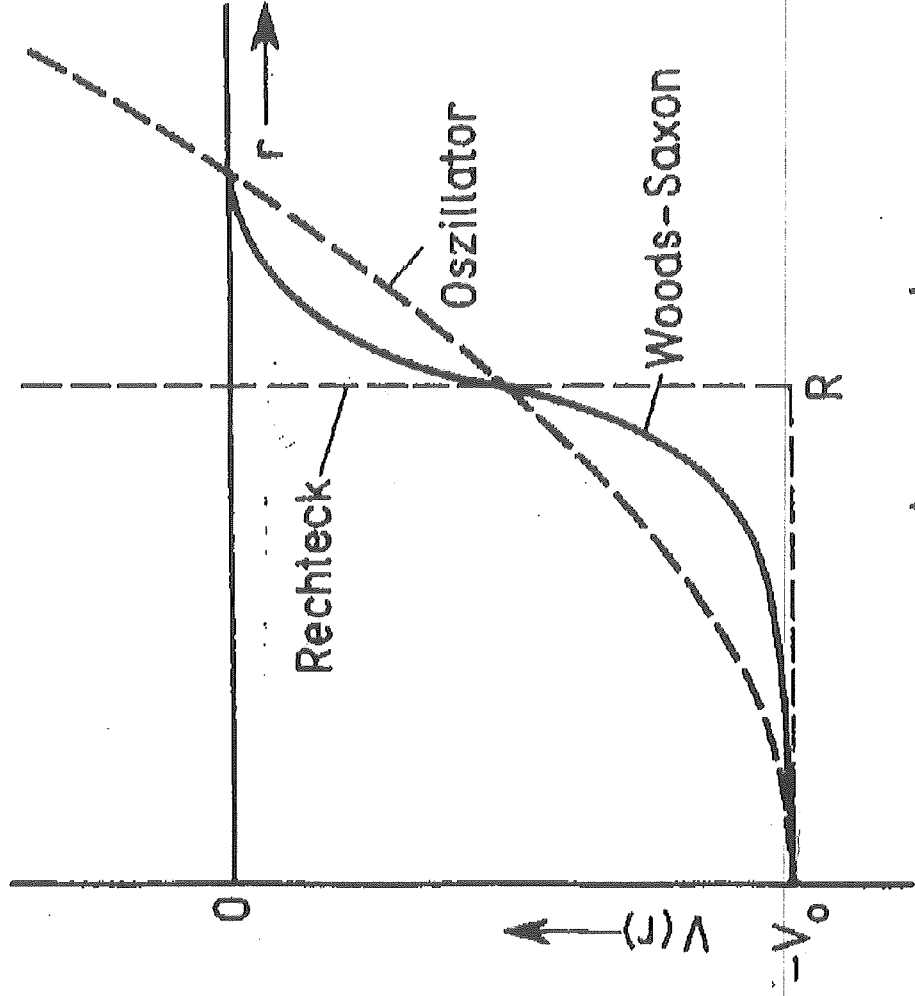




Evidenz für Schalenabschlüsse 2



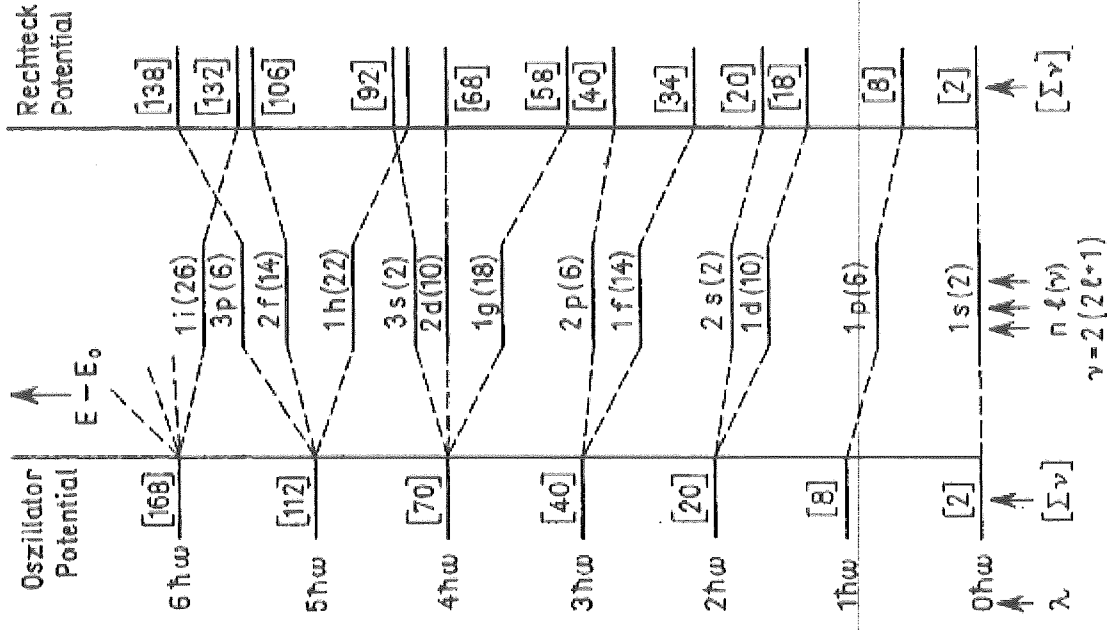
Mittlere Potenziale



↗ 4,4 a ↗

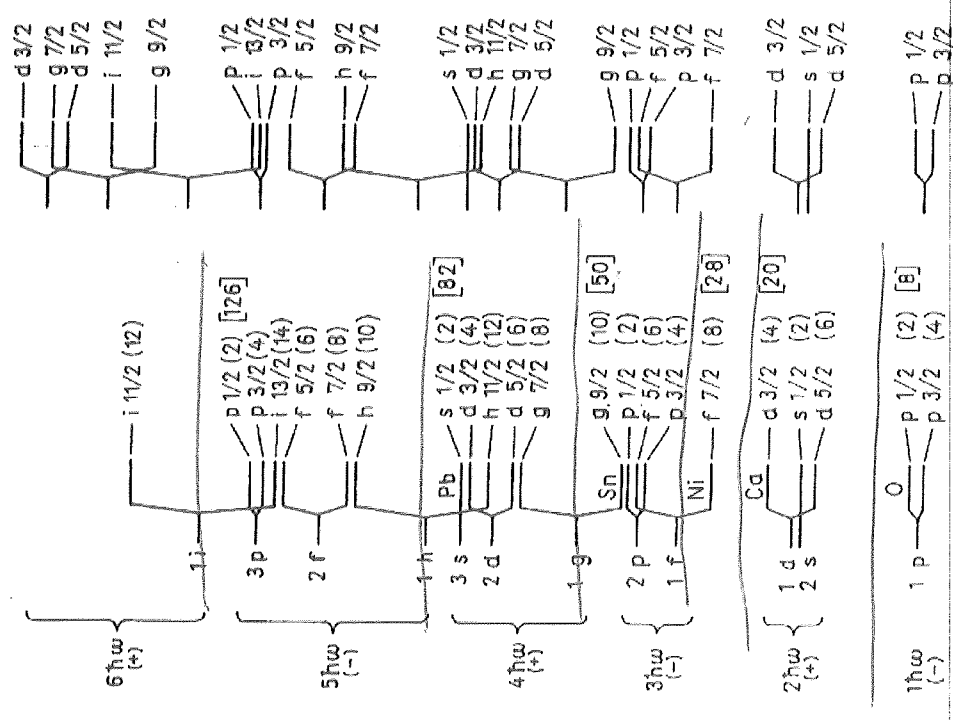
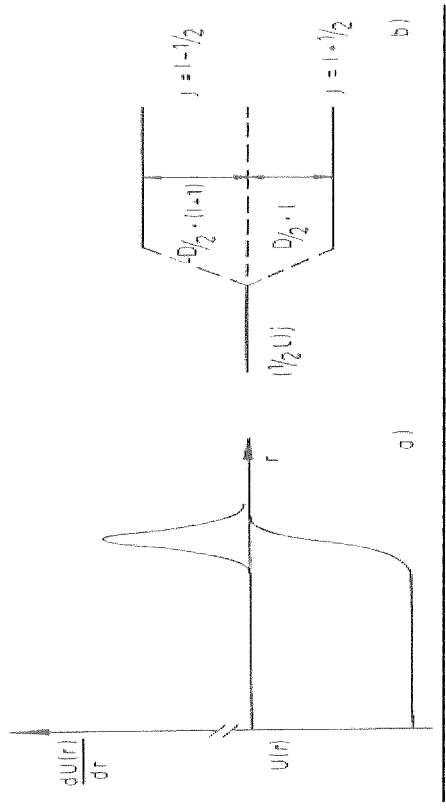
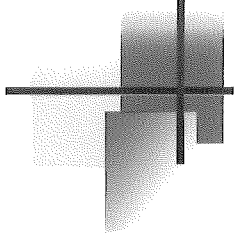
(aus Mayer-Kuckuk)

Einteilchenniveaus im Vergleich



(aus Mayer-Kuckuk)

Effekt der Spin-Bahn Kopplung im Kern



$0 \hbar\omega$ $1s$ He s $1/2$ (2) $[2]$ Neutronen
Protonen

(aus Mayer-Kuckuk)