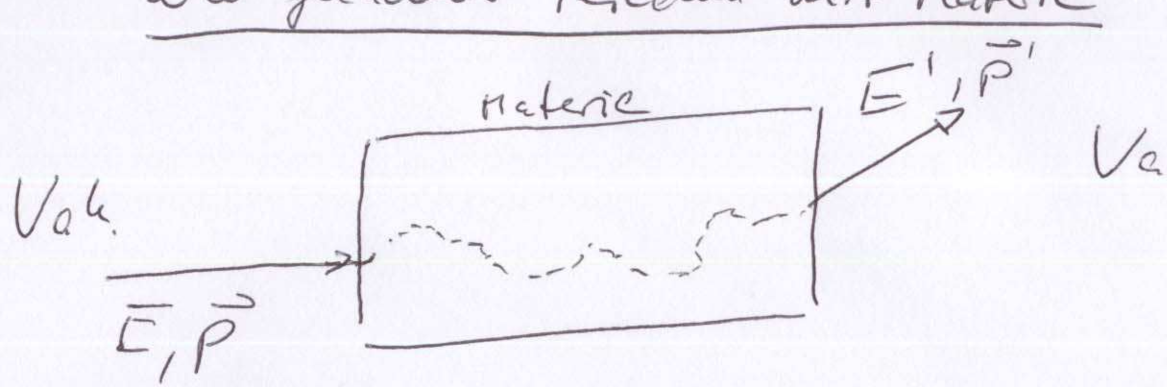
WW geladener Teilchen mit Materie $e^\pm, \mu^\pm, \pi^\pm, p, \alpha, \ldots$



Eintrittsenergie : E^*

Austrittsenergie : E'

Eintrittsimpuls : $\vec{p}$

Austritts " : $\vec{p}\,'$

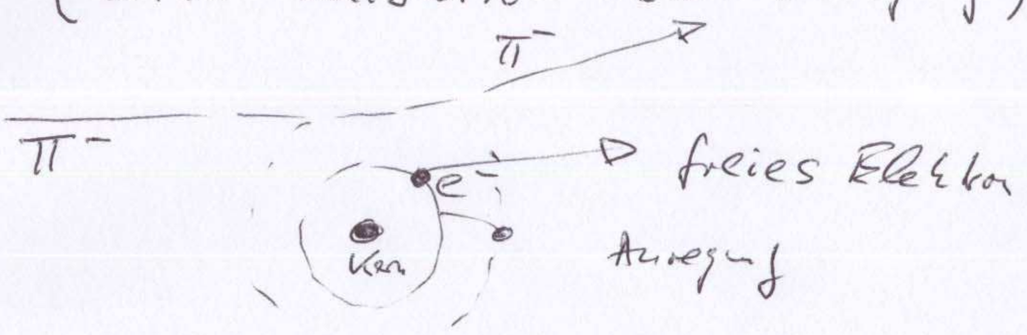
$$\Delta E = E - E'$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}\,' \quad („Ablenkung")$$

N.B. Anders als bei Photonen, tragen viele Kollissionen zwischen Teilchen und Materie zum Energieverlust bei. Man spricht von statistischen Effekten. (vgl. Photonen stochastische Effekte)

Grundlegende Prozesse können folgendermaßen klassifiziert werden:

a) inelastischer Stoß mit atomaren Elektronen
(d.h. Ionisation bzw. Anregung)

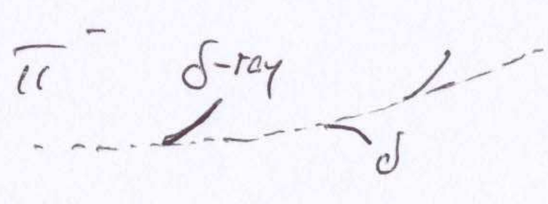


W_{i} ($\bar{I}$): notwendige Energie, um Elektron-Ion Paar zu erzeugen

Bsp. Argon ist $W_i \approx 25\,eV$

$\Delta E \approx 1\,MeV \Rightarrow 40.000$ freie Elektronen

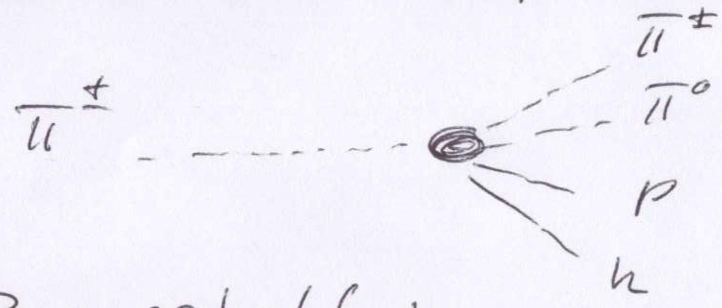
b) δ-rays (δ-Elektronen): stochastisch kann ein großer Energie und Impulsübertrag stattfinden ("hard knock-on")



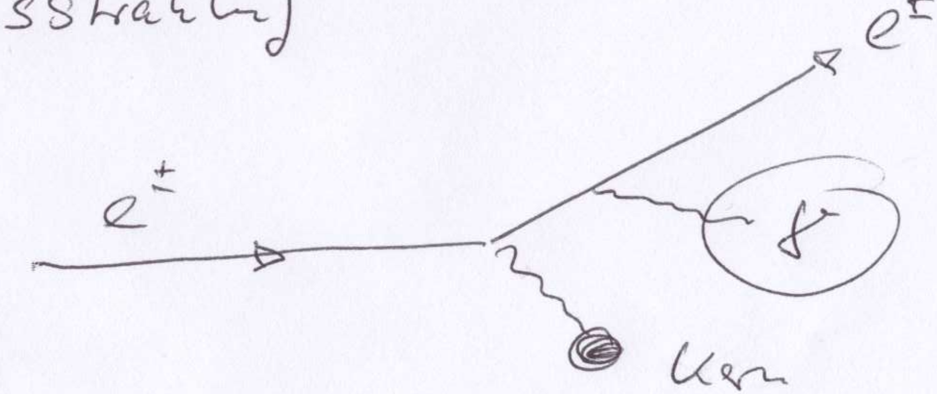
c) elastische Streuung an Kernen
(d.h. keine innere Anregung)

d) Strahlungsemission: Cherenkov Strahlung

e) inelastische Kernprozesse : Aufbrechen des Kernes mit Produktion von Teilchen



f) Bremsstrahlung



Energieverlust schwerer Teilchen

Energieverlust pro Wegstrecke $\frac{dE}{dx}$

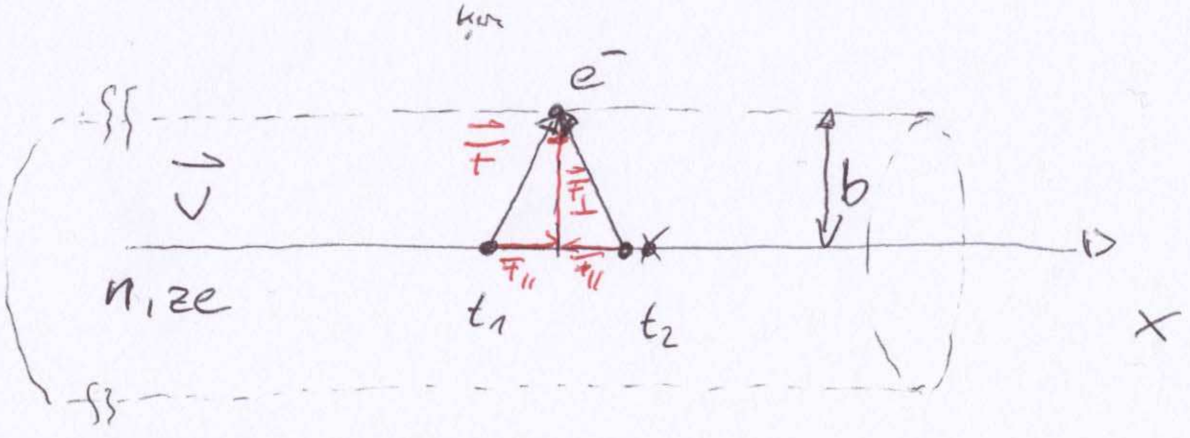
$S \equiv$ Stopping power $\quad S = -\frac{dE}{dx}$

Bohr's klassische Beschreibung des Energieverlustes schwerer Teilchen ($M \gg m_e$)

Annahme:

- „freie Elektronen"
- in Ruhe (zu Beginn) „statisches Bild"

→ E-Feld der Anfangskonfiguration



$$\Delta p = \int F\,dt = \int F_\perp\,dt = e\int E_\perp\,dt$$

$$= e\int E_\perp \frac{dt}{dx}\,dx = e\int E_\perp \frac{dx}{v}$$

Lösung des Integrals mittels Gauss'schen Satzes

$$\int_A \vec{E}\,d\vec{A} = \int \vec{E}_\perp\, 2\pi b\,dx = 2\pi b\int E_\perp\,dx = 4\pi ze$$

$$\int E_\perp\,dx = \frac{2ze}{b}$$

$$\Delta p = \frac{2ze^2}{bv}$$

Energieübertrag auf das Elektron

$$\Delta E(b) = \frac{\Delta p^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^2}{m_e v^2 b^2}$$

mit Elektronendichte N_e, Energieverlust

an Elektronen zwischen b und $b+db$

$$-dE(b) = \Delta E(b)\, N_e\, dV$$
$$= \Delta E(b)\, N_e\, 2\pi b\, db\, dx$$
$$= \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2}\, N_e\, \frac{db}{b}\, dx$$

"Versuchung" groß Integral auszuführen von $b=0$ bis $b=\infty$ um $\frac{dE}{dx}$ zu berechnen. Dies wäre allerdings im Widerspruch zu unseren Annahmen: WW für große b findet nicht in kurzer Zeit statt. Ebenso: für $b=0$ wäre Energieübertrag unendlich.

$\Rightarrow$ Integration von b_{min} bis b_{max}

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m v^2}\, N_e \ln\frac{b_{max}}{b_{min}}$$

"physikalische Argumente":

b_{min}: klassisch ist d. maximale Energietransfer auf Elektron bei head-on Kollision:

$\frac{1}{2} m_e (2v)^2$ bzw. relativistisch

$2\gamma^2 m_e v^2$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ und $\beta = v/c$

$$\Rightarrow \quad \frac{2 z^2 e^4}{m_e v^2 b_{min}^2} = 2\gamma^{\cancel{2}} m_e v^2$$

$$b_{min} = \frac{z e^2}{\gamma^{\cancel{2}} m_e v^2}$$

<u>b_{max}</u>: Elektronen sind (doch nicht) frei, sondern an Atom gebunden. Damit Elektron absorbieren kann, muß die Zeit kurz sein im Vergleich zur 'Umlaufzeit' des Elektrons

$\tau = \frac{1}{\nu}$ Umlauffrequenz

typische Kollisionszeit $t \simeq \frac{b}{v}$

relativistisch $t \to t/\gamma = \frac{b}{\gamma v}$

$$\frac{t}{\gamma} \leq \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{\gamma v} \leq \tau = \frac{1}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \underline{b_{max} = \frac{\gamma v}{\nu}}$$

mit $\bar{\nu}$ mittlere Umlauffrequenz

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln \frac{\gamma^2 m v^3}{2 e^2 \bar{\nu}}$$

Bohr'sche klassische Formel gibt gute Beschreibung für α-Teilchen und schwere Ionen. Für Protonen, allerdings keine gute Beschreibung.
Enthält allerdings alle wesentlichen Eigenschaften!

Bethe-Bloch Gleichung

QM Beschreibung des Energieverlustes eines Teilchens d. Ladung z in einem Materialstück der Dicke dx (gültig für $\beta\gamma \geq 0{,}01$)

9

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln\left(\frac{2 m_e \gamma^2 v^2 W_{max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

$2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 = 0{,}1535$ MeV cm^2/g

r_e : klassische Elektronenradius $2{,}817 \cdot 10^{-15}$ m

m_e : Elektronenmasse

N_A : Avogadro's Zahl $6.022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}

I : mittlere Anregungsenergie des abs. Materials

Z : Ordnungszahl des absorbierenden Materials

A : Massezahl "

ρ : Dichte "

z : Ladungszahl des Projektils (Teilchens)

β : v/c

γ : $1/\sqrt{1-\beta^2}$

δ : Dichte Korrektur : Projektil polarisiert Medium längs seines Weges. E-Feld für entfernte Elektronen wird abgeschirmt.

W_{max} : $\approx 2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$

N.B. Energieverlust hängt von Geschwindigkeit und Ladung des Teilchens ab (– nicht von deren Masse!)

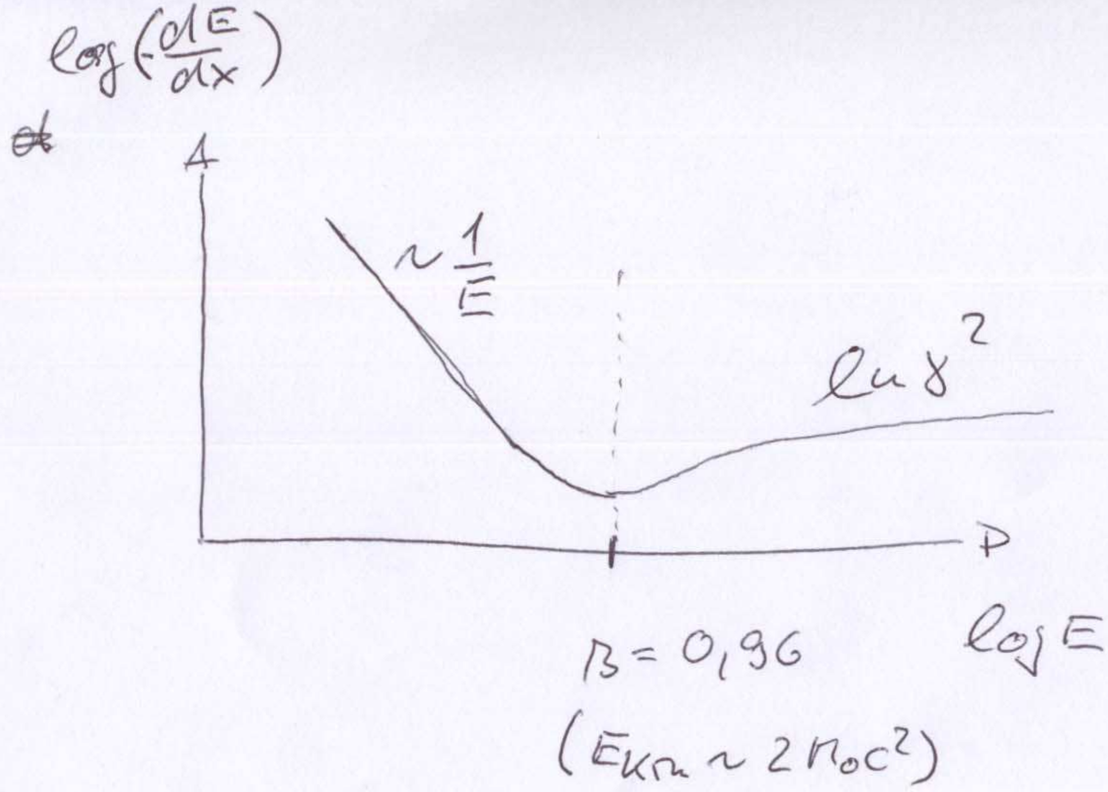
$\underline{I} \propto h\bar{\nu}$ (aus Bohr'scher Formel)

$\frac{I}{Z} = \left(12 + \frac{7}{Z}\right) eV \quad Z < 13$

$\frac{I}{Z} = 9{,}76 + 58{,}8\,Z^{-1{,}19} \quad Z > 13$

Diskussion

- bei nicht relativistischen Energien ist $\frac{dE}{dx} \propto \frac{1}{v^2} \propto \frac{1}{E}$
- Abnahme von $\frac{dE}{dx}$ mit zunehmender Geschwindigkeit bis $v \simeq 0{,}96c$, wo ein Minimum erreicht wird
  "MIP": <u>m</u>inimal <u>i</u>onizing <u>p</u>articles
- Für $v > 0{,}96c$ Zunahme von $\frac{dE}{dx} \propto \ln \gamma^2_{\beta \to 1} \sim \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$



für $\beta\gamma \gtrsim 1000$ werden Strahlungsprozesse wichtig und dominieren $\frac{dE}{dx}$.

Bragg-Kurve

Energiedeposition entlang Teilchenspur

max. Energieverlust am Ende der Spur.
Anwendung in der Strahlentherapie mit schweren Ionen.

Elektronen

Zusätzlich: Energieverlust durch Bremsstrahlung aufgrund ihrer geringen Masse

Klassisch: Emission von EM-Strahlung aufgrund der Beschleunigung (d. h. Ablenkung von geradliniger Bewegung) durch das elektrische Feld des Kernes.

Bei wenigen MeV ist $\frac{dE}{dx}$ über Bremsstrahlung gering.

Bei einigen 10 MeV " dominiert durch Bremsstrahlung

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll.}$$

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} \cong 4\alpha \frac{N_A}{A} \rho \, Z^2 r_e^2 E \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \equiv \frac{E}{X_0}$$

Kritische Energie E_c: $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll}$ für $E = E_c$

(13)

$$E_c \simeq \frac{800\,\text{MeV}}{Z + 1{,}2}$$

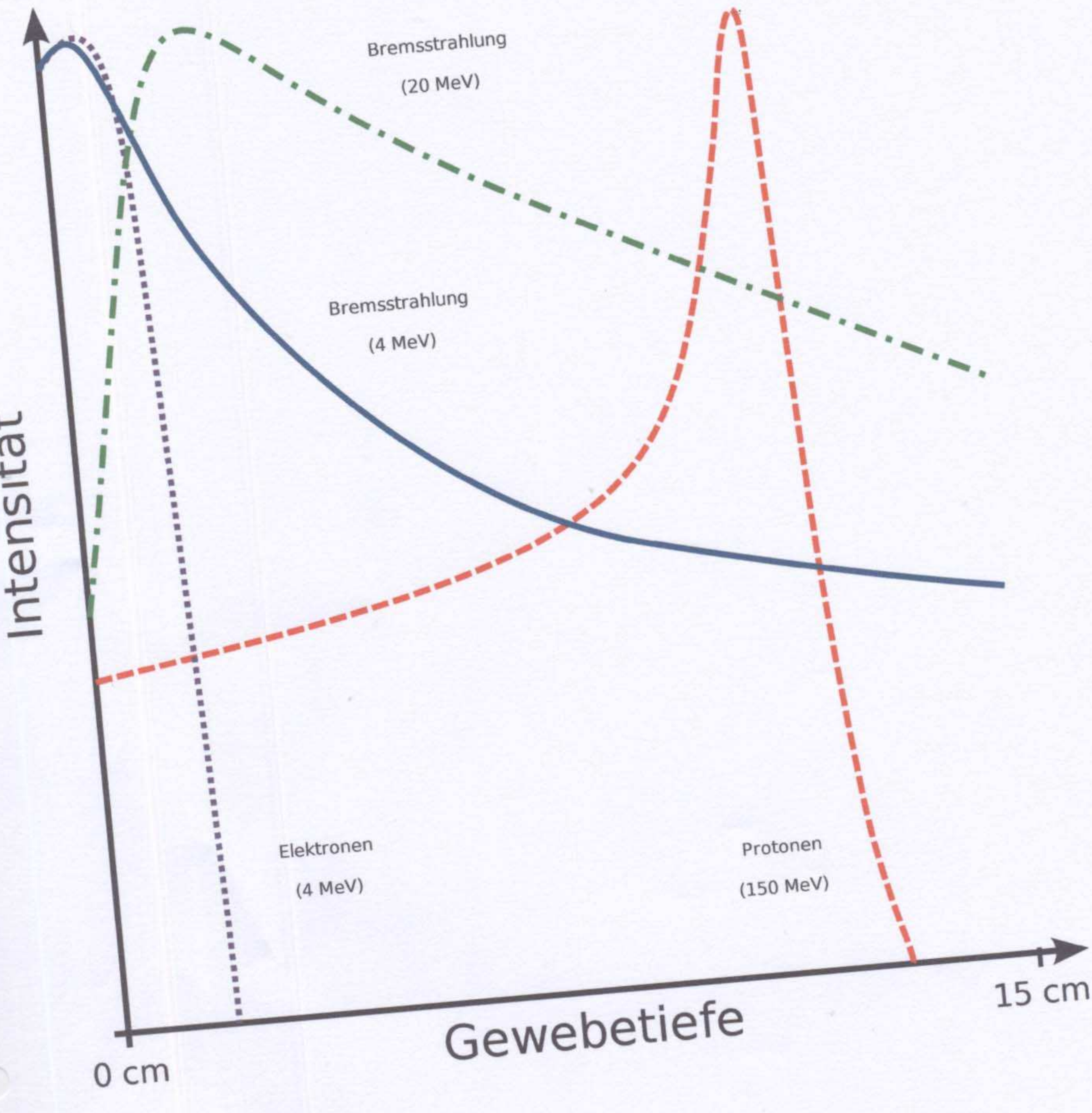
Bsp: Pb $E_c = 9{,}51$ MeV

Al $51{,}0$ MeV

H_2O 92.0 MeV

$$\left(-\frac{dE}{E}\right) = \frac{dx}{x_0} \Rightarrow E(x)\, e^{-x/\underline{x_0}}$$

$\frac{1}{e}$ reduzierte


Bremsstrahlung
(20 MeV)
Bremsstrahlung
(4 MeV)
Intensität
Elektronen
(4 MeV)
Protonen
(150 MeV)
0 cm
Gewebetiefe
15 cm

Bethe Bloch

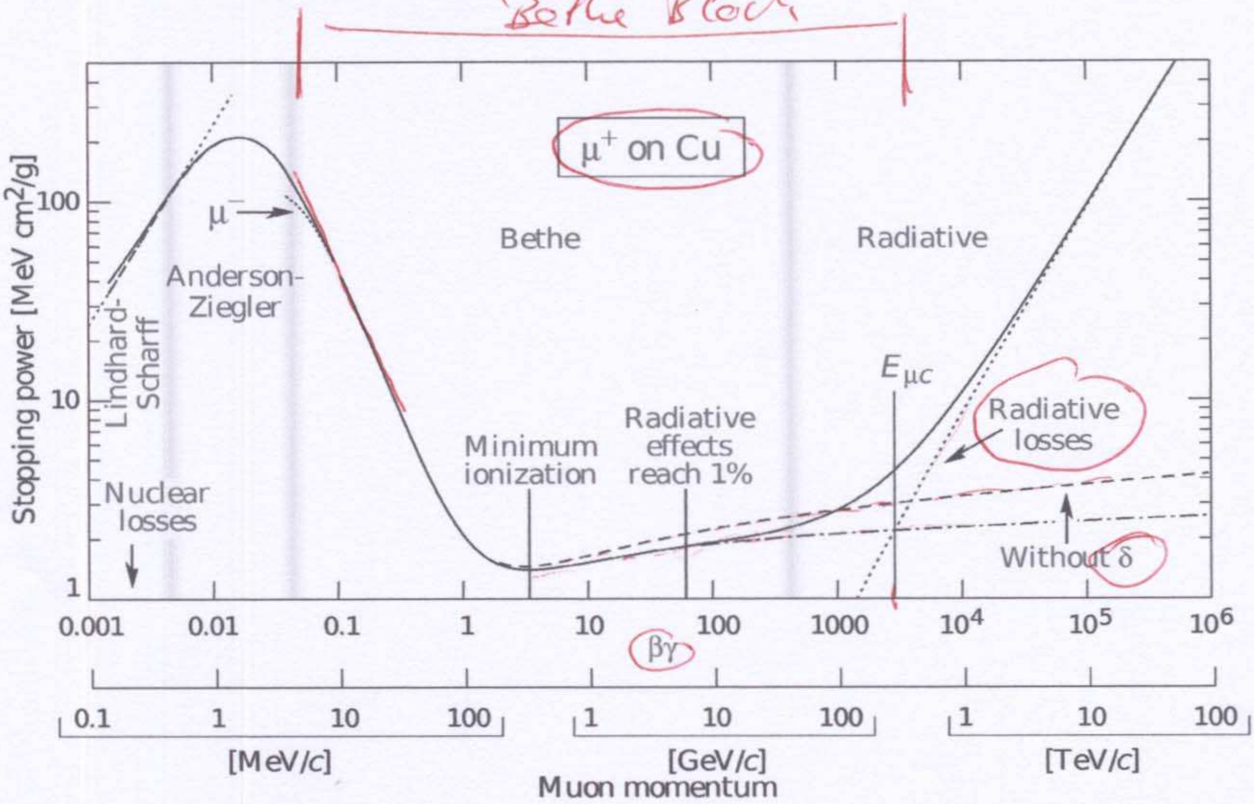


Fig. 27.1: Stopping power ($= \langle -dE/dx \rangle$) for positive muons in copper as a function of $\beta\gamma = p/Mc$ over nine orders of magnitude in momentum (12 orders of magnitude in kinetic energy). Solid curves indicate the total stopping power. Data below the break at $\beta\gamma \approx 0.1$ are taken from ICRU 49 [4], and data at higher energies are from Ref. 5. Vertical bands indicate boundaries between different approximations discussed in the text. The short dotted lines labeled "μ^-" illustrate the "Barkas effect," the dependence of stopping power on projectile charge at very low energies [6].

27.2.2. *Stopping power at intermediate energies* :

The mean rate of energy loss by moderately relativistic charged heavy particles, $M_1/\delta x$, is well-described by the "Bethe" equation,

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = K z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right] . \tag{27.3}$$

It describes the mean rate of energy loss in the region $0.1 \lesssim \beta\gamma \lesssim 1000$ for intermediate-Z materials with an accuracy of a few %. At the lower limit the projectile velocity becomes comparable to atomic electron "velocities" (Sec. 27.2.3), and at the upper limit radiative effects begin to be important (Sec. 27.6). Both limits are Z dependent. Here $T_{\max}$ is the maximum kinetic energy which can be imparted to a free electron in a single collision, and the other variables are defined

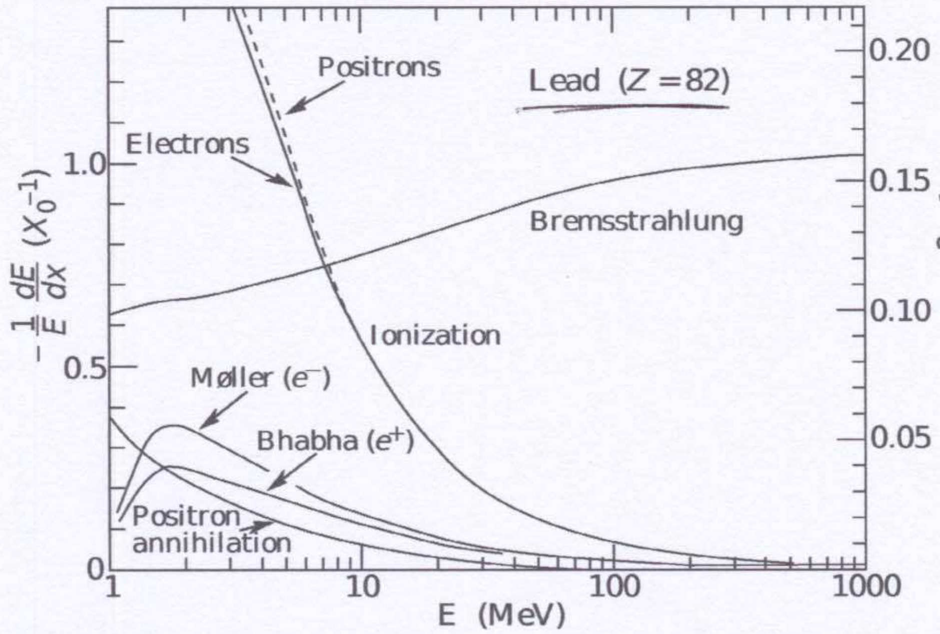


Figure 27.10: Fractional energy loss per radiation length in lead as a function of electron or positron energy. Electron (positron) scattering is considered as ionization when the energy loss per collision is below 0.255 MeV, and as Møller (Bhabha) scattering when it is above. Adapted from Fig. 3.2 from Messel and Crawford, *Electron-Photon Shower Distribution Function Tables for Lead, Copper, and Air Absorbers*, Pergamon Press, 1970. Messel and Crawford use $X_0(\mathrm{Pb}) = 5.82$ g/cm^2, but we have modified the figures to reflect the value given in the Table of Atomic and Nuclear Properties of Materials ($X_0(\mathrm{Pb}) = 6.37$ g/cm^2).

At very high energies and except at the high-energy tip of the bremsstrahlung spectrum, the cross section can be approximated in the "complete screening case" as [38]

$$\begin{aligned} d\sigma/dk = (1/k)4\alpha r_e^2\{&(\tfrac{4}{3} - \tfrac{4}{3}y + y^2)[Z^2(L_{\rm rad} - f(Z)) + Z\, L'_{\rm rad}] \\ &+ \tfrac{1}{9}(1-y)(Z^2+Z)\}\ , \end{aligned} \tag{27.26}$$

where $y = k/E$ is the fraction of the electron's energy transfered to the radiated photon. At small y (the "infrared limit") the term on the second line ranges from 1.7% (low Z) to 2.5% (high Z) of the total. If it is ignored and the first line simplified with the definition of X_0 given in Eq. (27.22), we have

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{A}{X_0 N_A k}\left(\tfrac{4}{3} - \tfrac{4}{3}y + y^2\right)\ . \tag{27.27}$$

This cross section (times k) is shown by the top curve in Fig. 27.11.

This formula is accurate except in near $y = 1$, where screening may become aus http://pdg.lbl.gov

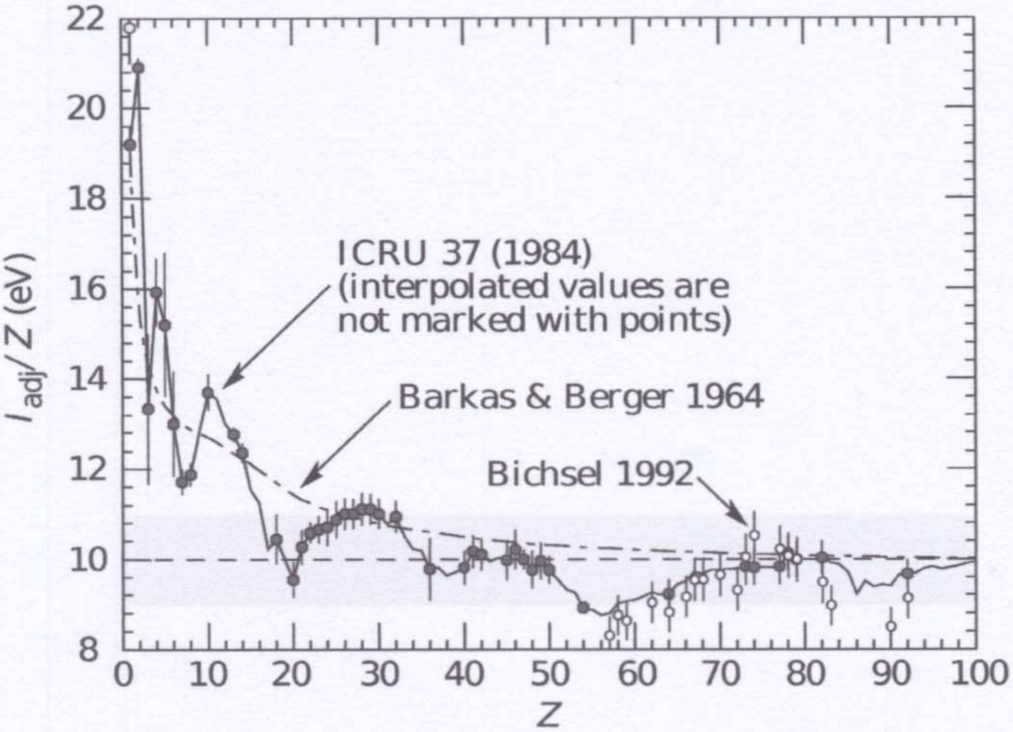


Figure 27.5: Mean excitation energies (divided by Z) as adopted by the ICRU [10]. Those based on experimental measurements are shown by symbols with error flags; the interpolated values are simply joined. The grey point is for liquid H_2; the black point at 19.2 eV is for H_2 gas. The open circles show more recent determinations by Bichsel [12]. The dotted curve is from the approximate formula of Barkas [13] used in early editions of this *Review.*

Equation 27.2, and therefore Eq. (27.3), are based on a first-order Born approximation. Higher-order corrections, again important only at lower energy, are normally included by adding the "Bloch correction" $z^2L_2(\beta)$ inside the square brackets (Eq.(2.5) in [4]) .

An additional "Barkas correction" $zL_1(\beta)$ makes the stopping power for a negative particle somewhat smaller than for a positive particle with the same mass and velocity. In a 1956 paper, Barkas *et al.* noted that negative pions had a longer range than positive pions [6]. The effect has been measured for a number of negative/positive particle pairs, most recently for antiprotons at the CERN LEAR facility [14].

A detailed discussion of low-energy corrections to the Bethe formula is given in ICRU Report 49 [4]. When the corrections are properly included, the Bethe treatment is accurate to about 1% down to $\beta \approx 0.05$, or about 1 MeV for protons.