

Kern- und Teilchenphysik I

Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik

Wintersemester 2011/12

Blatt 1

Aufgabe 1: Dirac-Matrizen

i) Berechnen Sie die folgenden Summen über $\lambda = 0, \dots, 3$:

$$\gamma^\lambda \gamma_\lambda, \quad \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma_\lambda, \quad \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\lambda, \quad \gamma^\lambda \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\lambda,$$

$$\text{mit } \sigma^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta].$$

ii) Zeigen Sie, daß für zwei Vierer-Vektoren a und b die Identität

$$\not{a} \not{b} = a \cdot b - i \sigma_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

gilt und berechnen Sie $\not{a} \not{a}$.

iii) Berechnen Sie die Spur $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$.

iv) Verifizieren Sie in der Standard-Darstellung folgende Eigenschaften der Dirac-Matrizen:

$$\begin{aligned} \{\gamma_5, \gamma^\mu\} &= 0, \\ (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \\ \bar{\gamma}^\mu &= \gamma^\mu, \quad \bar{\gamma}_5 = -\gamma_5, \quad \overline{\gamma_\mu \gamma_5} = \gamma_\mu \gamma_5, \end{aligned}$$

wobei die Adjungier-Operation für Dirac-Matrizen als $\bar{\Gamma} := \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ definiert ist.

Aufgabe 2: Chirale Darstellung der Dirac-Matrizen

Zeigen Sie, daß es eine unitäre Matrix T gibt, die die Dirac-Matrizen von der üblichen Dirac-Darstellung in die chirale Darstellung

$$\gamma_{\text{chiral}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\text{chiral}}^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

transformiert, d.h. zeigen Sie, daß

$$\gamma_{\text{Dirac}}^\mu = T^{-1} \gamma_{\text{chiral}}^\mu T.$$

Gehen Sie dabei so vor, daß Sie zunächst T aus der Transformation von γ^0 durch Diagonalisierung bestimmen. Verifizieren Sie dann die Transformationen von γ^k . Bestimmen Sie außerdem die Form für $(\gamma_5)_{\text{chiral}}$.

Aufgabe 3: Lösung der freien Dirac-Gleichung

Setzt man in die Dirac-Gleichung den Ansatz $\psi(x) = u(k) e^{-ik_\mu x^\mu}$ für ein Elektron mit Impuls \vec{k} ein, so erhält man als Bestimmungsgleichung für u das lineare Gleichungssystem $(\not{k} - m)u(k) = 0$. Zur Vereinfachung soll im folgenden nur die Bewegung in z -Richtung mit $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ betrachtet werden.

- i) Wieviele linear unabhängige Lösungen $u(k)$ von $(\not{k} - m)u(k) = 0$ gibt es?
- ii) Bestimmen Sie die linear unabhängigen Lösungen, die die Orthogonalitäts- und Normierungsrelation $\bar{u}_r u_{r'} = 2m\delta_{rr'}$ erfüllen.
- iii) Zeigen Sie, daß folgende Identität gilt:

$$\sum_r u_r \bar{u}_r = \not{k} + m.$$

- iv) Zeigen Sie, daß die u_r so gewählt werden können, daß sie Eigenzustände des Operators $\gamma_5 \not{s}$ sind, wobei der Vektor s die Form $(s^\mu) = \frac{1}{m}(|\vec{k}|, 0, 0, E)$ hat.