Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik I

Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik

Wintersemester 2011/12

Blatt Nr. 4 3. November 2011

Aufgabe 1 Alphazerfall

a. Berechnen Sie mit Hilfe der Weizsäcker-Formel allgemein der Q-Wert der Reaktion

$$^{A}_{Z}X \rightarrow \, ^{A-4}_{Z-2}Y +^{4}_{2} He$$

Für welche Kerne ist α-Zerfall energetisch möglich?

b. Skizzieren Sie den Verlauf des Potentials fur ein α-Teilchen innerhalb und außerhalb des Kerns, wenn Sie ein konstantes Potential innerhalb des Kerns, und die Coulomb- Abstoßung außerhalb des Kerns berucksichtigen.

c. Fur ein im Kern befindliches α-Teilchen mit E $>$ 0 gibt es eine endliche Wahrscheinlich- keit, die Coulombbarriere zu durchdringen (Tunnelwahrscheinlichkeit). Diese ist näherungsweise gegeben durch

$$T \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_R^D dr\sqrt{2mV(r)-E}\right)$$

Leiten Sie daraus einen Zusammenhang zwischen der Energie des α-Teilchens und der Lebensdauer des Kerns ab (Geiger-Nuttall-Regel).

Aufgabe 2 Kernspaltung

Die Bindungsenergie von Kernen wird gut durch die auf dem Tröpfchenmodell beruhende Weizsäckerformel beschrieben

$$E_B = a_V \cdot A - a_O \cdot A^{2/3} - a_C \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A\frac{(N-Z)^2}{4A} \pm \delta \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{a_P}{\sqrt{A}}$$

mit a_V = 15.9 MeV, a_O = 18.3 MeV, a_C = 0.71 MeV, a_A = 93 MeV, a_P = 11.5 MeV, wobei hier gilt '$+$' für gg-Kerne, '0' für ug- und gu- Kerne, '$-$' für uu-Kerne.

a. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel eine Beziehung zwischen A und Z, die beschreibt, wann die symmetrische Spaltung eines Kerns (A, Z) in zwei Tochterkerne (A/2, Z/2) möglich ist. Vernachlässigen Sie hierfür die Asymmetrie- und Paarungsenergie.

b. Diskutieren Sie den Verlauf des Kernpotentials abhängig vom Abstand der beiden Tochterkerne unter der Annahme, dass der kugelförmige Mutterkern sich zunächst zu einem Ellipsoid deformiert und dann in zwei kugelförmige Tochterkerne zerfällt. Wie andern sich Oberflächenenergie und Coulombenergie?

c. Betrachten Sie den Spaltprozess

$$n_{therm} + {}^{235}_{92}U \to {}^{131}_{50}Sn + {}^{102}_{42}Mo + 3n$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Weizsäcker-Formel den Q-Wert der Reaktion.

d. Bestimmen Sie die beim Einfang eines thermischen Neutrons (kinetische Energie vernachlässigbar) an ^{235}U und ^{238}U freiwerdende Energie, und vergleichen Sie diese mit der Spaltbarriere von ~ 5.5 MeV. Wie lässt sich dieses unterschiedliche Verhalten erklären?

Aufgabe 3 Weyl-Spinoren

a. Der links- bzw. rechtshändige Anteil eines beliebigen Dirac-Spinors ψ ist definiert durch

$$\psi_L = \omega_- \psi \,, \quad \psi_R = \omega_+ \psi \quad \text{mit} \quad \omega_\pm = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma_5}{2} \,.$$

In welchem Fall sind auch ψ_L und ψ_R Lösungen der Dirac-Gleichung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$.

b. Zeigen Sie, daß die Dirac-Gleichung für ein masseloses Teilchen in zwei entkoppelte Gleichungen für zweikomponentige Spinoren $\xi(x)$ und $\eta(x)$ zerfällt, die sog. Weyl-Gleichungen.

Benutzen Sie dazu am besten die chirale Darstellung der Dirac-Matrizen:

$$\gamma^0_{\text{chiral}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k_{\text{chiral}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Bestimmen Sie die Helizität (d.h. den Eigenwert des Helizitätsoperators) der Lösungen der Weyl-Gleichungen. Besonders leicht läßt sich die Helizität an der Darstellung der Weyl-Gleichungen im Impulsraum ablesen. Machen Sie dazu den Ansatz $\xi(x) = \hat{\xi}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mu x^\mu}$ bzw. $\eta(x) = \hat{\eta}(p)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mu x^\mu}$.