

---

**Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik I**  
**Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik**  
**Wintersemester 2011/12**

---

Blatt Nr. 10

16. Dezember 2011

### Aufgabe 1 Spin-1-Operator

Die Komponenten  $S_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) des Spin-Operators  $\vec{S}$  für ein Spin-1-Teilchen können definiert werden als Erzeugende von Drehungen in drei Dimensionen, d.h.  $D_k(\delta\alpha) = \mathbf{1} + i\delta\alpha S_k$ , wobei die Drehmatrizen  $D_k$  für Drehungen um die  $x_1, x_2, x_3$ -Achse gegeben sind durch

$$D_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, D_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die  $S_k$  als  $3 \times 3$ -Matrizen und verifizieren Sie die Drehimpuls-Vertauschungsrelationen  $[S_k, S_l] = i\epsilon_{klm} S_m$ .
- Zeigen Sie, dass gilt:  $\vec{S}^2 \equiv S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1(1+1)\mathbf{1}$ .
- Bestimmen Sie die Eigenwerte  $m$  von  $S_3$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{\chi}_m$ .
- Ein Photon befinde sich in einem Impuls-Eigenzustand mit Impuls in  $x_3$ -Richtung,  $\vec{k} = k\vec{e}_3$ . Was ist die physikalische Bedeutung der  $m$  und  $\vec{\chi}_m$  aus Teilaufgabe (c)? Welche Zustände sind durch die Transversalitätsbedingung erlaubt?

### Aufgabe 2 Vektor-Kugelfunktionen

Vektor-Kugelfunktionen  $\mathbf{Y}_{jm}$  können aus den Kugelflächenfunktionen  $Y_{jm}$  erhalten werden gemäß

$$\mathbf{Y}_{jm} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \mathbf{L} Y_{jm} \text{ mit } \mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$$

- Zeigen Sie, dass gilt  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{jm} = 0$  und bestimmen Sie die Komponenten  $Y_{jm}^{(\theta, \varphi)}$  in der Entwicklung  $\mathbf{Y}_{jm} = Y_{jm}^\theta \mathbf{e}_\theta + Y_{jm}^\varphi \mathbf{e}_\varphi$  nach den orthonormierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$  in Polarkoordinaten.
- Zeigen Sie, dass gilt:

$$\nabla \cdot [g(r)\mathbf{Y}_{jm}] = 0,$$

### Aufgabe 3 : Auswahlregeln

Elektromagnetische Strahlungsübergänge von einem Zustand  $|a\rangle$  in einen Zustand  $|b\rangle$  erfolgen unter Emission eines Photons der Energie  $\omega = E_a - E_b$ . Die Zustände  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$  seien festgelegt durch die Werte des Bahndrehimpulses (Spin werde vernachlässigt) und durch weitere simultane Quantenzahlen  $\alpha_a, \alpha_b$ :

$$|a\rangle = |l_a m_a, \alpha_a\rangle, |b\rangle = |l_b m_b, \alpha_b\rangle.$$

- Welche Übergänge  $Ej$  und  $Mj$  sind durch Drehimpuls- und Paritätserhaltung erlaubt? Es werde angenommen, dass die Parität von  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$  allein durch den Bahndrehimpuls bestimmt ist.
- Welche Übergänge gibt es für  $l_b = 0$  und  $l_a = 2l$  sowie  $l_a = 2l + 1$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ )?
- Welche Übergänge sind erlaubt für  $l_a = 3$  und  $l_b = 1$ ? Welcher Übergang dominiert?

## Aufgabe 4 Multipolstrahlung

${}^7\text{Li}$  besitzt einen angeregten  $1/2^-$ -Zustand, der unter Emission eines 477 keV  $\gamma$ -Quants in den Grundzustand ( $3/2^-$ ) zerfällt. Welche Multipolaritäten sind für die  $\gamma$ -Strahlung möglich? Welche ist die wahrscheinlichste? Schätzen Sie mit Hilfe der Graphik die Halbwertszeit des Übergangs ab.

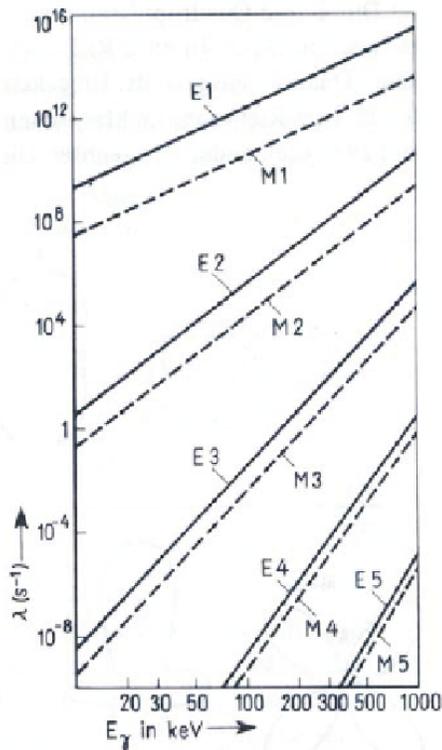


Fig. 38  
Einteilchen  $\gamma$ -Übergangswahrscheinlichkeiten für verschiedene Multipolstrahlungen; nach [Mos 65]

(aus Mayer-Kuckuk, Kernphysik)