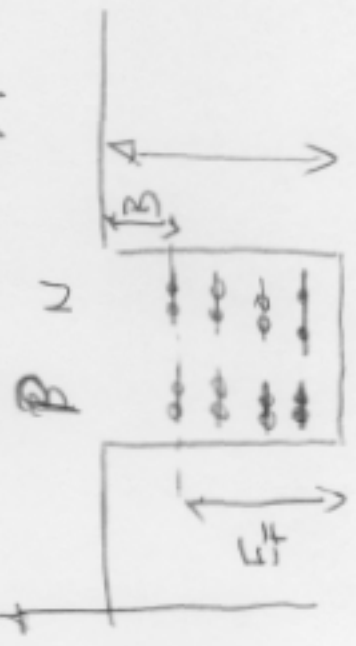


Aufbau u. innere Struktur der Kerne

Kernstärke wird durch NN-WW bestimmt: Starke Abstoßung bei kleinen Abständen bzw. geringe Anziehung bei größeren Abständen [später: NN-Streuung]

Fermigasmodell: N und P bewegen sich unabhängig voneinander in zwei gleichsamen anziehende Potentiale. Da sie $Spin = \frac{1}{2}$ Teilchen sind, gehorchen sie dem Pauliprinzip (Fermi-Dirac-Statistik).

Nukleonen können sich im Kernvolumen frei bewegen können unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips. Potential ist Überlagerung der Potentiale der übrigen Nukleonen. Einfachheit halber: Potentialtopf mit "schiefen Wänden"



Zahl der möglichen Zustände, die g_2 Nukleon im Volumen V und Impulsintervall dp annehmen kann, ist

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp \cdot V}{(2\pi\hbar)^3}$$

für $T=0$ werden Zustände bis zu einer maximalen Impuls besetzt: Fermi-Impuls p_F , p_F^N : Neutronen, p_F^P : Protonen

$$\text{Integration } N = \frac{V(p_F^N)^3}{(2\pi\hbar)^3} \cdot 2 \cdot \text{Felder} ; z = \frac{V(p_F^P)^3}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\text{mit Kernvolumen } V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R_0^3 A \quad R = R_0 A^{1/3}$$

Aus Elektronenstreuung $R_0 = 1,21 \text{ fm}$

Für Kern mit $z = N = A/2$

$$p_F^N = p_F^P = p_F = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV/c}$$

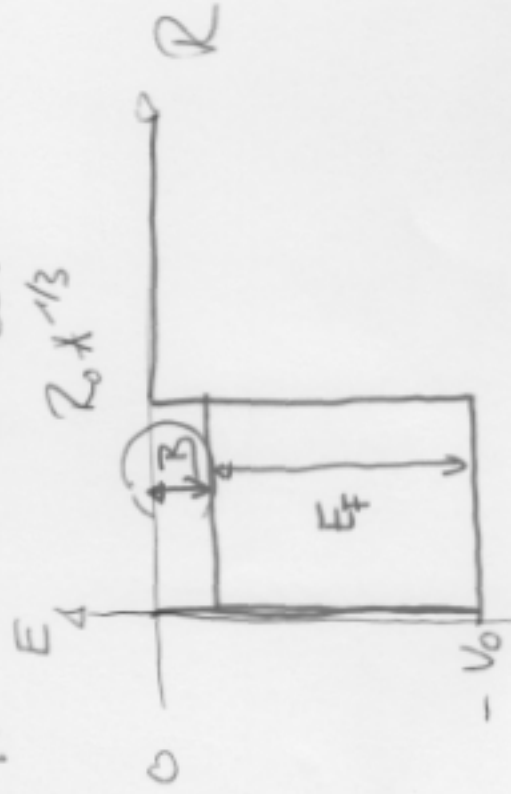
Experiment: Quasi-elastische Streuung von Elektronen
 an Kern gemessene Werte von P_F
 stimmen gut überein.

Energie des höchstens besetzten Zustands, die Fermi-Energie E_F

$$E_F = \frac{P_F^2}{2M} = \frac{(250 \text{ MeV})^2}{2 \cdot 938 \text{ MeV} c^2} \approx 33 \text{ MeV}$$

↑
Nukleonenmasse

mit $B/A \approx 7-8 \text{ MeV}$



- $V_0 \approx E_F + E_B \approx 40 \text{ MeV}$
- NB: abhängig von $A!$
 $V \propto A, Z(N) \propto A$
- experimentell verifiziert
- "schwer" gebundenes System
 $E_F \sim V_0$



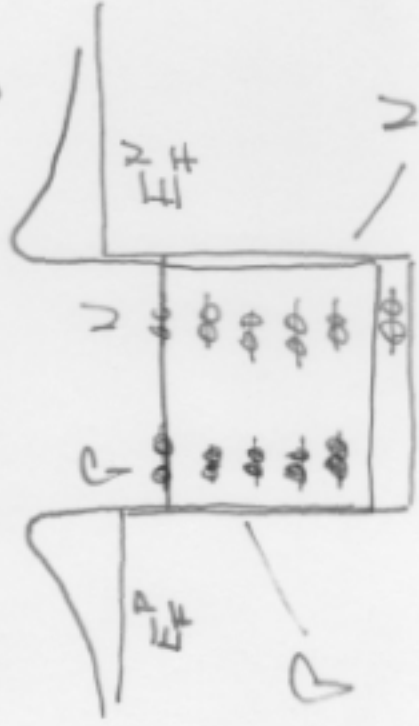
A_1

$A_2 \gg A_1$

A_2

Wenn man zu einem Kern weitere Nukleone hinzufügt
bleiben Fermi-Brechungsniveaus konstant und Abstand
benachbarter Energieniveaus nimmt ab!

• Schwere Kerne besitzen Neutronenüberschuß.
Fermi-Niveaus von Protonen und Neutronen müssen
auf solchen Niveaus liegen (ansonsten β -Zerfall), muß
tiefes des Potentialtopfes größer sein als für Protonen.



Im Mittel sind Protonen
schwächer gebunden als
Neutronen
 \Rightarrow Coulomb-Abstoßender
Protonen
 $V_C = (Z-1) \frac{e^2}{r}$

7) Aus Fermigesmodell läßt sich ableiten

i) Abhängigkeit der Bindungsenergie von Neutronenüberschuß (Übungsangabe)

$$\langle E_{kn} \rangle = \frac{3}{5} \frac{P_{\#}^2}{2m} \approx 20 \text{ MeV}$$

$$E_{kn}(N, Z) = N \langle E_n \rangle + Z \langle E_p \rangle = \frac{3}{10m} (N (P_{\#}^2) + Z (P_{\#}^2))$$

für feste Nucleonenzahl A, Minimum in Abhängigkeit von N bzw. Z, \Rightarrow Entwicklung nach N-Z

$$E_{kn}(N, Z) = \frac{3}{10m} \frac{t_0^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3}$$

$$\left(A + \frac{5}{3} \frac{Z(N-Z)^2}{A} + \dots \right)$$

Volume

Asymmetrie

Schaubmodell

Tröpfchen- oder Farnigesmodell können spezielle Erscheinung
angewichtiger Kerne nicht erklären.

Barlet u. Elsäßer (1932, 1933) : besonders stabile Konfiguration
wenn Z oder N (oder beide) eine magische Zahl ist:

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

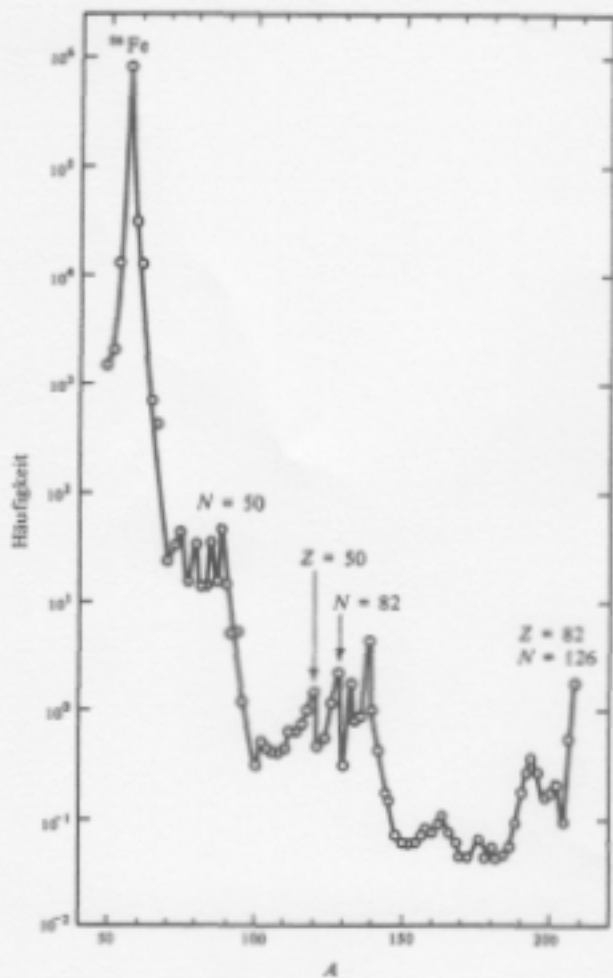
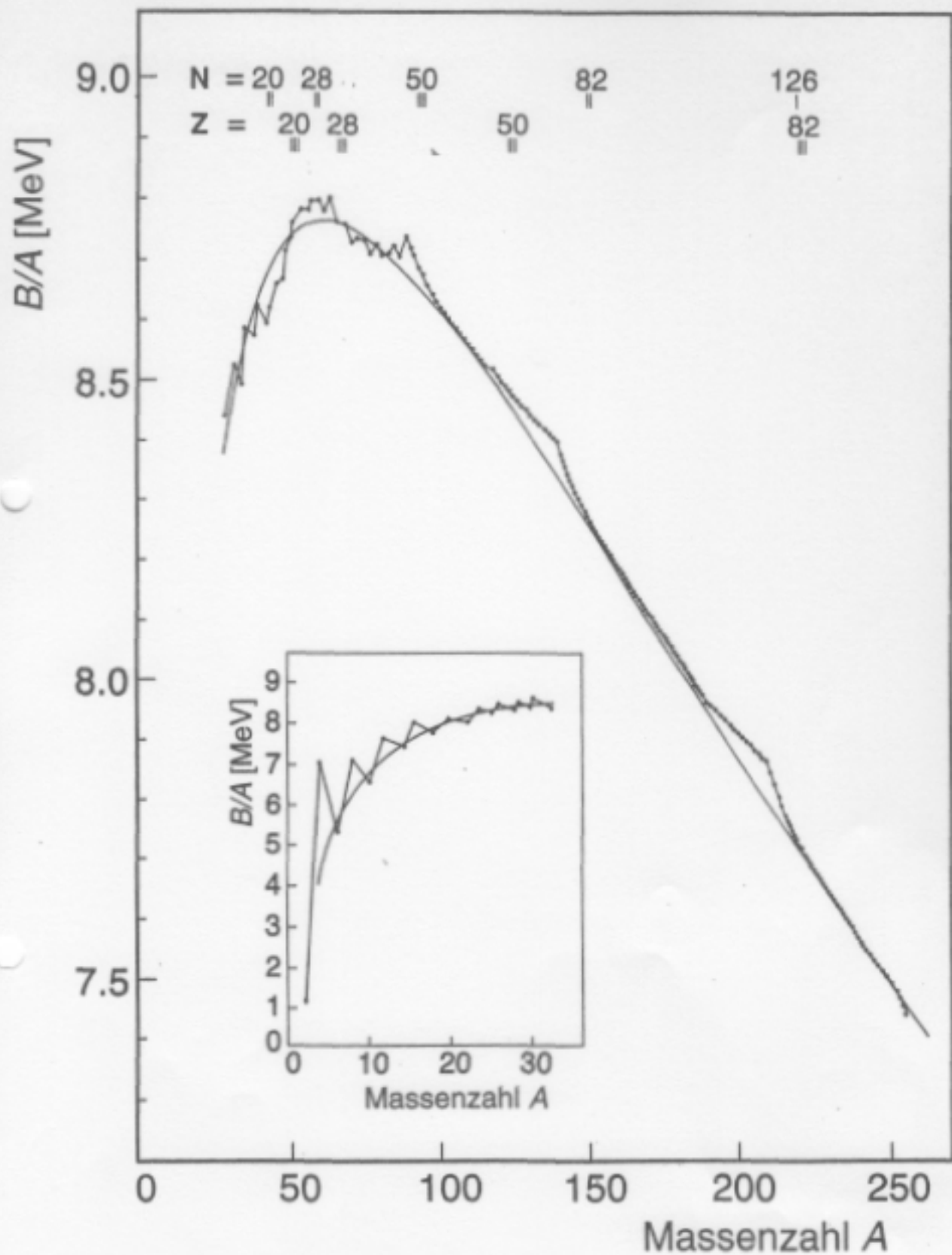


Bild 17.1

Relative Häufigkeit H verschiedener g - g -Kerne als Funktion von A . Die Häufigkeiten sind relativ zu Si gemessen, wobei $H(\text{Si}) = 10^0$ ist. [Nach A. G. W. Cameron, „A New Table of Abundance of the Elements in the Solar System“, *Origin and Distribution of the Elements* (L. H. Arens, ed.), Pergamon Press, New York, 1968, S. 125.]



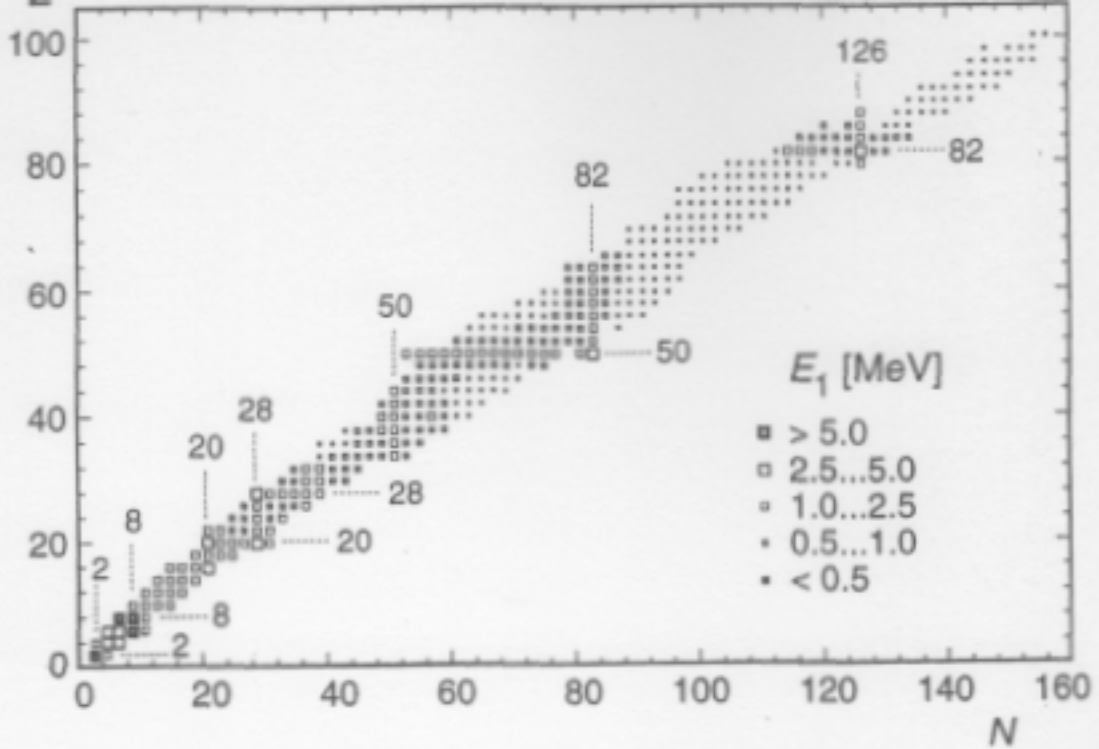


Abbildung 17.6. Energie E_1 des ersten angeregten Zustands in gg-Kernen. In Kernen mit „magischer“ Protonen- oder Neutronenzahl ist diese Anregungsenergie besonders groß. Die angeregten Zustände haben üblicherweise die Quantenzahlen $J^P = 2^+$. Ausnahmen sind die ersten angeregten Zustände in ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{16}_8\text{O}_8$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$, ${}^{72}_{32}\text{Ge}_{40}$ und ${}^{90}_{40}\text{Zr}_{50}$ (0^+) sowie in ${}^{132}_{50}\text{Sn}_{82}$ und ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ (3^-) und in ${}^{14}_6\text{C}_8$ und ${}^{14}_8\text{O}_6$ (1^-). Weiter entfernt von den „magischen“ Zahlen wird E_1 klein, mit fallender Tendenz, je schwerer der Kern wird (Daten aus [Le78]).

Poliv, 2004, Abb. 17.6, S. 264

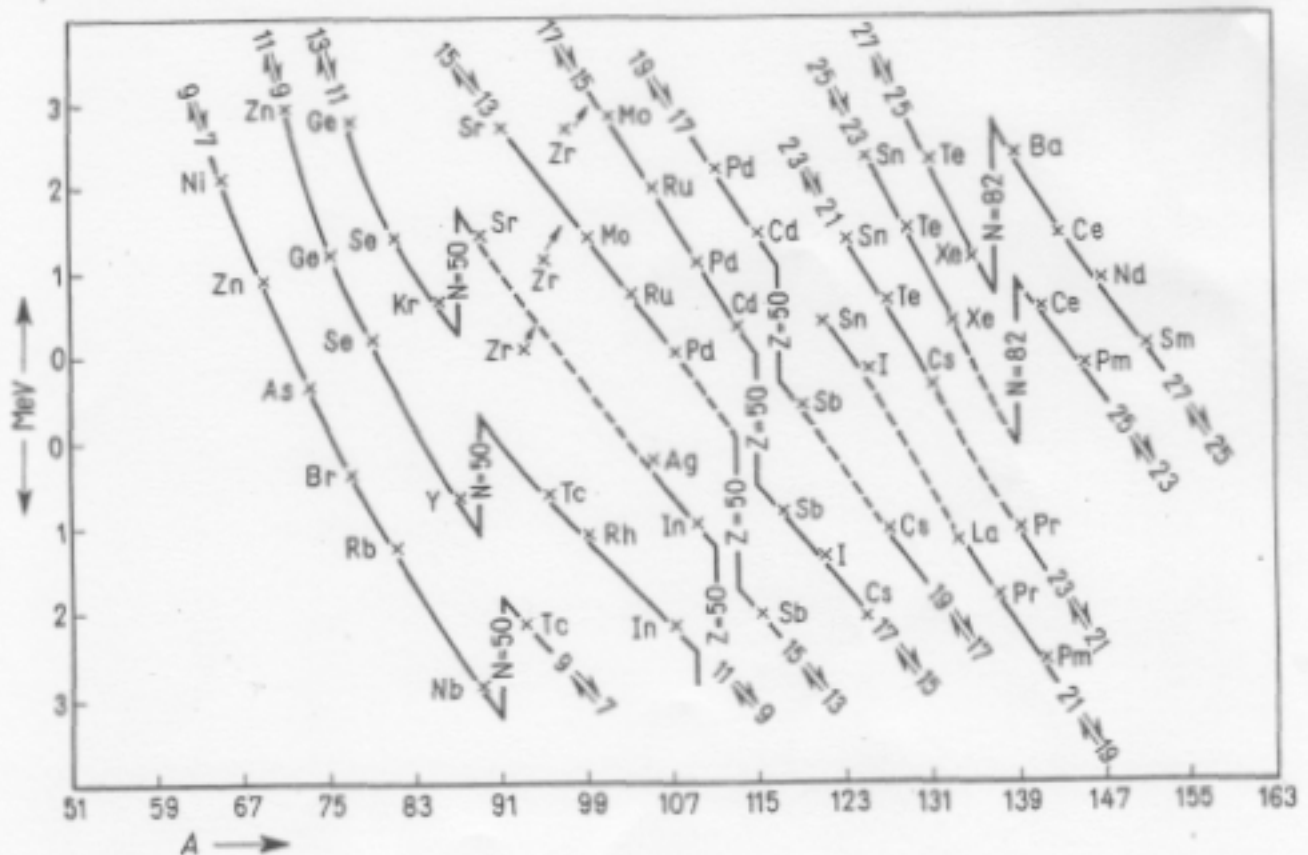
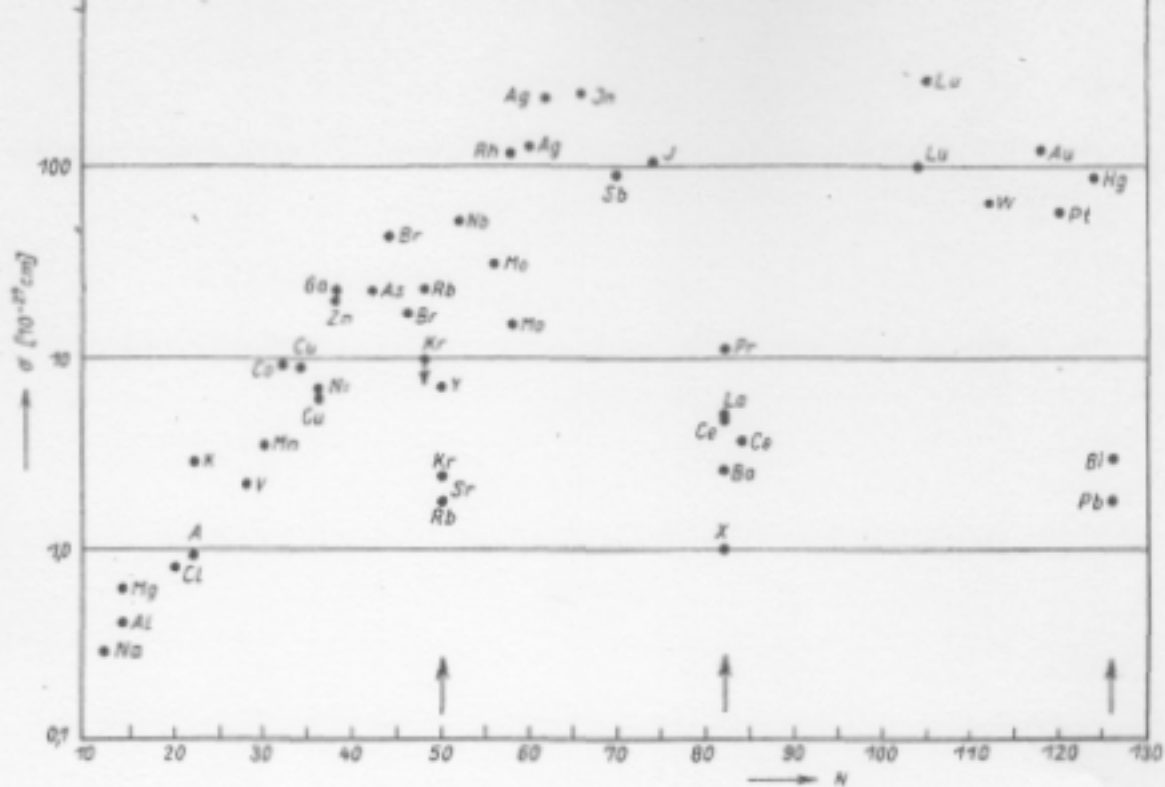
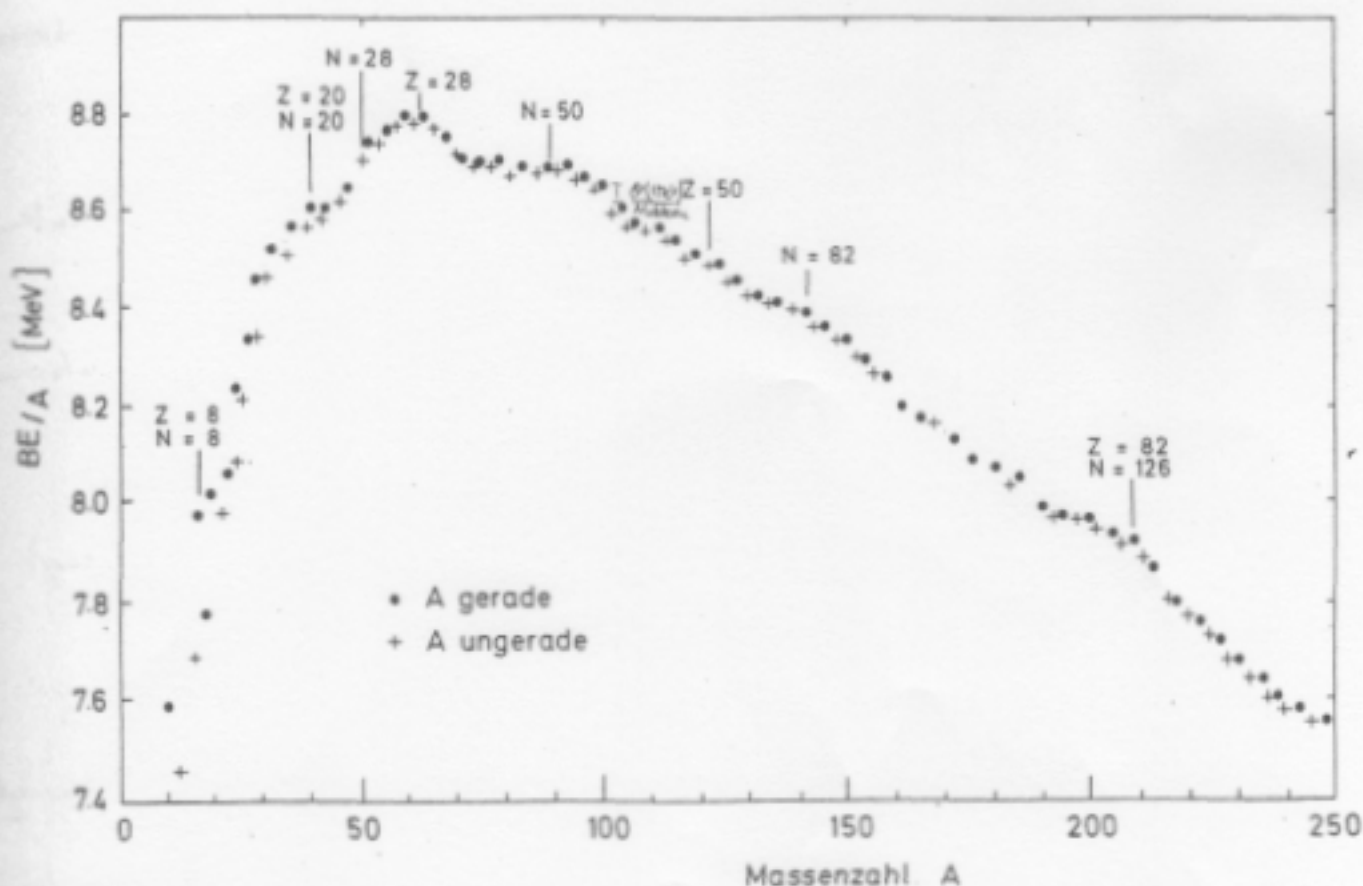


Fig. 76 β -Umwandlungsenergien für den Übergang eines ungeraden Neutrons in ein ungerades Proton. Abszisse: Nukleonenzahl A, Ordinate: Umwandlungsenergien in MeV. Die Linien verbinden Kerne mit gleichem Neutronenüberschuß; nach [May 65]

Maye - beschub, 1975, Abb 76 S. 182



1.1.1 | Einfangquerschnitt für 1 MeV-Neutronen als Funktion der Neutronenzahl im Targetkern (reproduziert nach Hughes 50a). Bei Targetkernen mit magischen Neutronenzahlen sind die Einfangquerschnitte ungewöhnlich klein.



Figur 57:

Darstellung der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Massenzahl A (nach Preston: *Physics of the Nucleus*, Addison-Wesley Publ.Comp., Fig. 6 - 1).

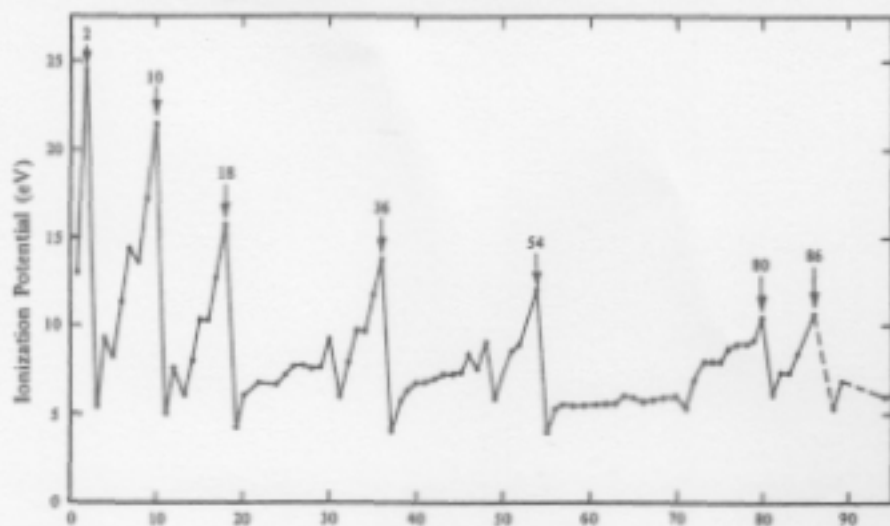


Bild 17.2 Separationsenergien neutraler Atome (Ionisationspotentiale). (Nach Daten von C. E. Moore, „Ionization Potentials and Ionization Limits Derived from the Analysis of Optical Spectra.“ *NSRDS-NBS 34*, 1970.)

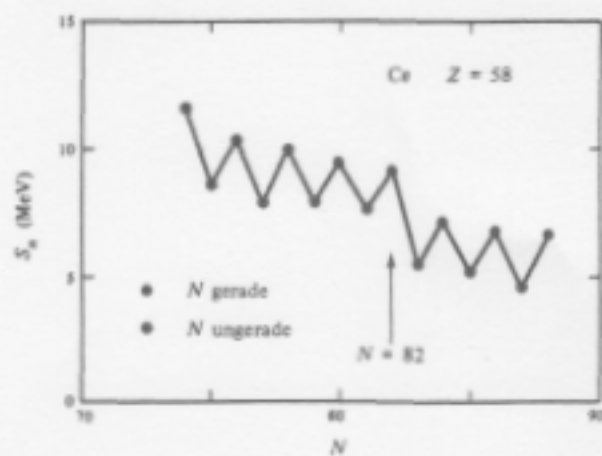


Bild 17.3 Separationsenergie für das letzte Neutron der Cer-Isotope.

Schalenmodell

Tropfen- und Schalenmodelle Ferniges Modell können spezielle Erscheinungen angeregter Kerne -
Stärke nicht erklären.

Bartlett u. Ekassov (1932,33) wiesen darauf hin, daß Kerne besonders stabile Konfiguration haben, wenn Z oder N (oder beide) eine magische Zahl ist:

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

~~Bindungsenergie~~ eines letzten Neutrons oder Protons

Experimentelle Hinweise:

- Häufigkeit verschiedener gg Nuklide als Funktion des Massenzahls A ($A > 50$) (Folie)
- Separationsenergie für das letzte Nukleon Folie E_{se}
- Abweichung d. Bindungsenergie von Weizsäcker-Massenfomel (Folie)
- Energie des ersten angeregten Zustands in gg-Kern
- β -Umwandlungsenergie für Übergang von n-Neutron in n-proton
- Einfanggeschwindigkeit von Neutronen als Funktion d. Neutronenzahl

Evidenz für 'magische' Zahlen
Analog zur Atomphysik \Rightarrow schalenähnliche
Struktur im Kern.

- \Rightarrow • Spin-Bahn Kräfte entscheidend
- Pauli-Prinzip verhindert Zusammenstöße
zwischen Nucleonen \Rightarrow (fest) ungestörte
Bahnen der Nucleonen im Kernpotential

Naives Schalenmodell: Nucleonen bewegen
sich unabhängig voneinander in einem
sphärischen Potential.

(Annahme, dass unabhängig und sphärisch
sind starke Vereinfachung \Rightarrow Restwo,
Bahnen im deformierten Potential)

Annahme: Nukleonen bewegen sich unabhängig von einander im Inneren von den anderen Nukleonen verursachen mittleres Zentralpotential. ~~Approximation~~ (Wie beim Fermi-Gas Modell) werden jeden Zustand mit der nach Pauli-Prinzip erlaubten Anzahl $2s + 1$ von Nukleonen. Ein "Schalenabschluss" ergibt sich dann wenn ein Zustand, der zum nächsthöheren eine besonders große Energieerhöhung aufweist, voll besetzt ist.

Form des Kernpotentials V :

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=0} = 0 \quad \text{und wegen stetig abnehmendem Kernradius, V schnell auf 0 abfällt.}$$

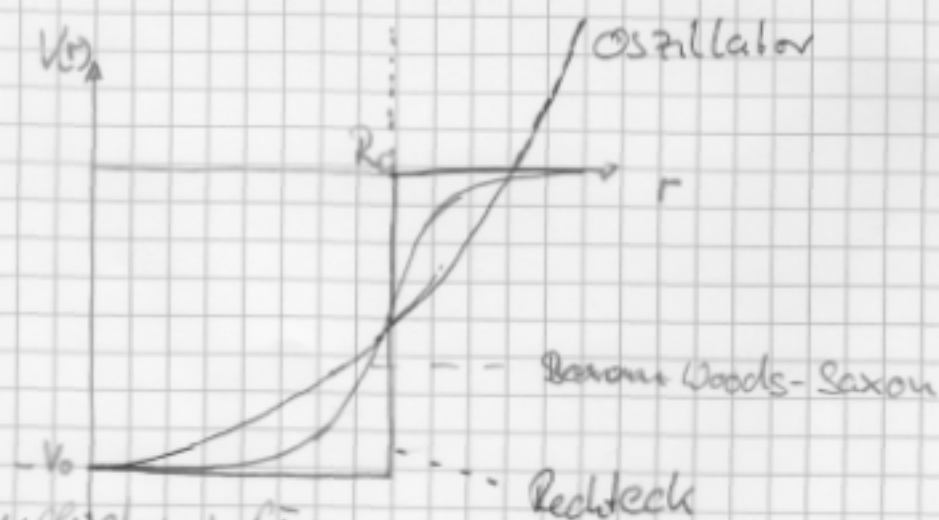
- Rechteckpotential
- 3-d harmonischer Oszillator:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

- Realistischer Potentialform; die gemessene Dichteverteilung gut wiedergeht

$$V(r) = -V_0 \left[1 + e^{-\frac{r-R}{a}}\right]^{-1}$$

wobei a ein Maß für Randstärke ist.



Schrödingergleichung für Rechteck bzw. Oszillatorpotential lassen sich analytisch lösen (wenn man $V(r > R_0) \neq$ nicht gegen 0 gehen lässt).

Für harmonischen Oszillator (3-d)

Energieeigenwerte $E_{n,l}$

mit Bahndrehimpuls l und Radialquantenzahl n , die angibt wieviele radiale Nullstellen (Knoten) die WF hat.

$$E_{n,l} = E_{\lambda} = \left(\lambda + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega$$

mit $\lambda = 2(n-1) + l = 0, 1, 2, \dots$

$n = 1, 2, 3, \dots$ (Zahl d. Knoten + 1)

$l = 0, 1, 2, \dots$ bzw. s, p, d, ...
(Bahndrehimpuls)

$$E_0 = \frac{3}{2} \hbar \omega$$

Entartung,

Erweiterungen

abgesehen von zwei niedrigsten Niveaus sind Lösungen von verschiedenen Paaren der Werte von n und l

beim Oszillator „zufällig“ entartet,

$$\text{Bsp: } l=3, n=1 \Rightarrow \lambda=2(n-1)+l=3$$

$$l=1, n=2 \Rightarrow \lambda=2(2-1)+1=3$$

✱ Jeder Zustand mit Bahndrehimpuls l hat hinsichtlich Bahndrehmoment. Quantenzahl m eine $(2l+1)$ -fache Entartung und kann nach dem Pauli-Prinzip mit $\nu=2(2l+1)$ Teilchen vom Spin- $1/2$ besetzt werden.

Problem:

$$\text{Entartung: } \frac{1}{2} (\lambda+1) (\lambda+2) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spin}}}{2}}$$

Oszillator-Schalen des 3-d Oszillators:

N	Orbitale	Parität $(-1)^l$	Entartung	Σ Zustände (Nullonen)	my. Zahl
0	1s	+	2	2	✓
1	1p	-	6	8	✓
2	2s, 1d	+	12	20	✓
3	2p, 1f	-	20	40	-
4	3s, 2d, 1g	+	30	70	-
5	3p, 2f, 1h	-	42	112	-

ham. Osz \Rightarrow Schalenabschlüsse bei Nullonenzahl

2, 8, 20, 40, 70, 112, ... (Nur 1, 0, 1, 2 neutrale Vorzeichen)

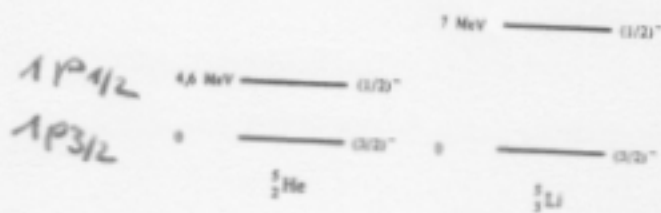


Bild 17.7

Die niedrigsten Energieniveaus von ${}^3\text{He}$ und ${}^3\text{Li}$. Die Zustände sind allerdings sehr kurzlebig und haben deshalb sehr große Energiebreiten. Mit unserer momentanen Argumentation haben diese Breiten aber nichts zu tun; sie sind daher nicht eingezeichnet.

Entwurf von
 $l + 1/2$ und $l - 1/2$ in realen
 Kernen immer aufgehoben

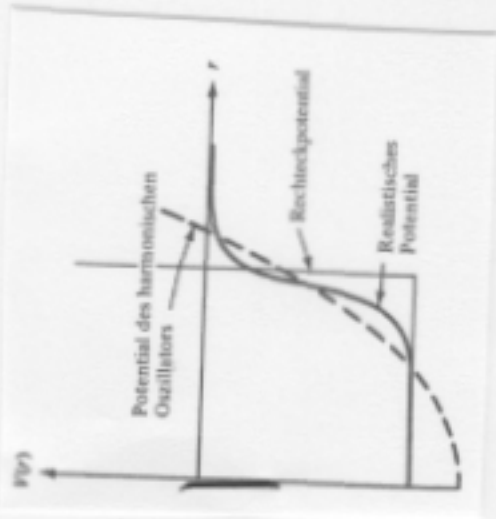


Abb : 17.5

Abb. 17.6

Gesamtzahl der Nukleonen

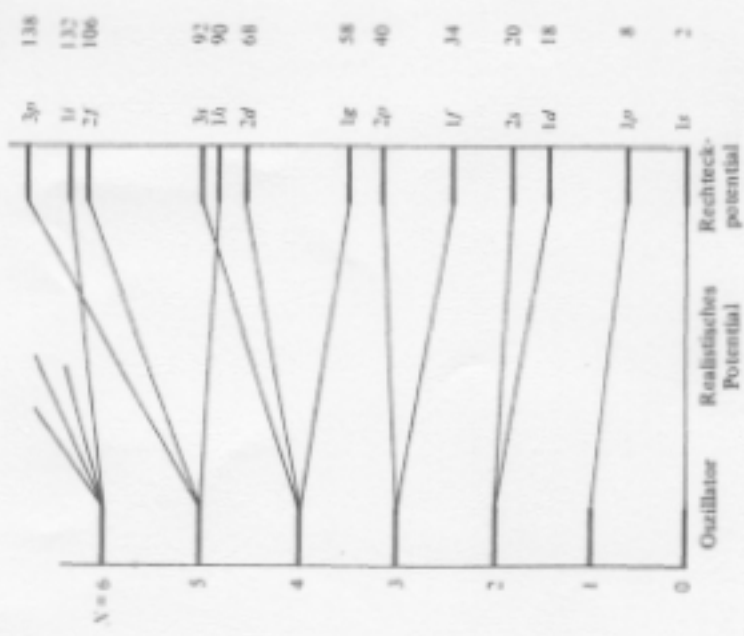


Bild 17.6
 Schalen einzelner Teilchen Links sind die Niveaus des harmonischen Oszillators. Wenn die zufällige Entartung in jeder Oszillatorschale durch einen Wechsel der Potentialform zu einem Rechteckpotential aufgehoben wird, ergibt sich ein Diagramm, wie rechts dargestellt. Die Gesamtzahl der Nukleonen, die im Potential bei zur jeweiligen Schale untergebracht werden kann, ist angegeben.

Fraunfelder Henry

Zusatz: Aufhebung der zufälligen Entartung des harmonischen Oszillatorpotentials durch realistischere Potentiale:

(Entartung spezielle Eigenschaft des harm. Oszillators)

Folge:

Ausdrücklich: ~~Folge~~ z. Bsp 2s und 1d Zustand entartet im harm. Osz.

Zustände mit höherem Drehimpuls sind wahrscheinlicher bei größeren Radien zu finden und sehen im realistischen Fall ein tieferes Potential \rightarrow Entartung wird aufgehoben, Zustände mit hohem l bei kleineren Energien

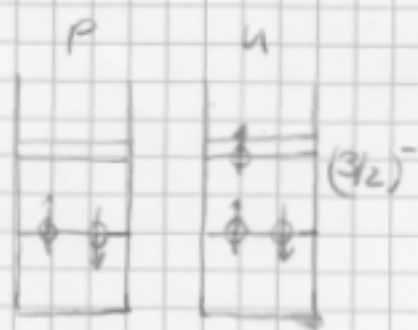
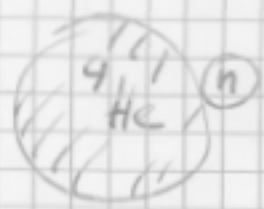
Bisher nicht berücksichtigt: Spin d. Nukleonen

z. Bsp. Nukleon mit Orbital 1p

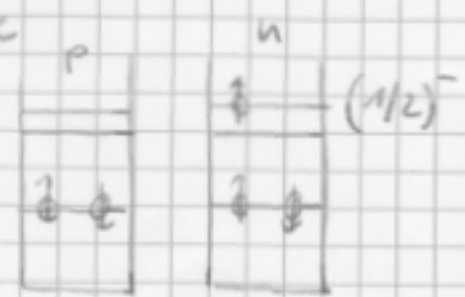
kann Gesamtdrehimpuls $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ haben

$1p_{1/2}$ — $1p_{3/2}$ sind (bisher) entartet

Bsp ^5He



Grundzustand
Gesamtspin $\frac{3}{2}$ neg. Parität



1. angeregte Zustand
Gesamtspin $\frac{1}{2}$
neg. Parität

1. angeregter Zustand $\Delta E \approx 10 \text{ eV}$!

Ansatz: Spin-Bahn-Kraft mit

$$V_{es} = C_{es} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

$$\text{mit } \vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} (j^2 - l^2 - s^2)$$

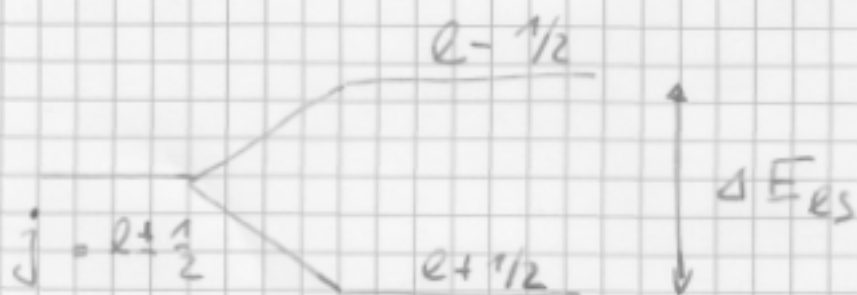
$$\text{mit } \vec{j} := \vec{l} + \vec{s}$$

$$\Rightarrow V_{es} |j, l, s\rangle =$$

$$C_{es} \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) |j, l, s\rangle$$

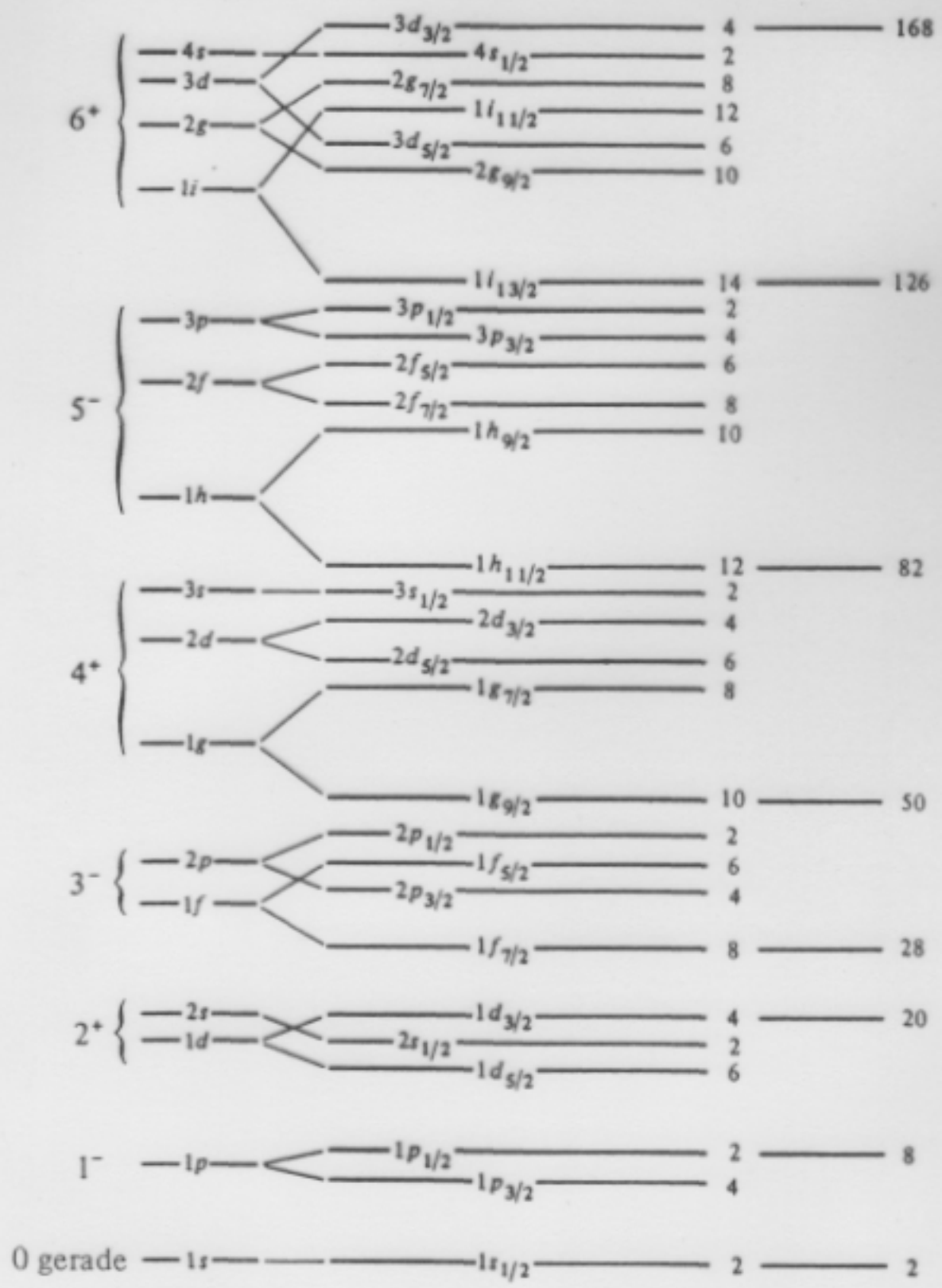
$$\text{mit } s = \frac{1}{2}, \text{ ist } j = l + \frac{1}{2} \text{ oder } j = l - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{es}}{C_{es}} |j, l, \frac{1}{2}\rangle = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2} l |j, l, \frac{1}{2}\rangle & \text{für } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar^2}{2} (l+1) |j, l, \frac{1}{2}\rangle & \text{für } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\Delta E_{es} = C_{es} \hbar^2 (l + \frac{1}{2})$$

$\Rightarrow \Delta E_{es}$ wächst mit Bahndrehimpuls



[Abb. 15.10, S. 457, Henley Frauent.]

~~18~~
Zusammenfassung:

- a) „Magische“ Zahlen können durch starke Spin-Bahn-Kraft erklärt werden.
- b) Diese Spin-Bahn-Energie (MeV!) ist Folge der Nukleonkräfte.
- c) Drehimpuls und Parität von Nukliden mit 1 Nukleon über einer abgeschl. Schale leicht voraussagbar.

Erweiterungen

d) Nukliden mit mehreren Nukleonen über einer abgeschl. Schale:

Russel-Saunders (LS)-Kopplung ($A \leq 16$)

jj-Kopplung ($A > 16$)

e) Einführung von „Paarungskraft“ und Kollektivmodellen.