Natürliche Linienbreite

Zahl der angeregten Kerne N

radioaktiver Zerfall: $N(t) = N_0 \, e^{-t/\tau}$ (*) (1)

τ : Zeit nach der Zahl N auf e-ten Teil abgeklungen ist (Lebensdauer)
$\left(\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}\right)$

Im Sinne der QM-Deutung bezieht sich (*) auf den qm Mittelwert des Ensembles. Für einzelnen Atomkern ist Emission völlig statistischer Natur.

Wellenfunktion eines nicht-stationär zerfallenden (Einzel-)Zustandes mit Frequenz $\omega_0 = \frac{E_0}{\hbar}$, wobei E_0 die Übergangsenergie ist und $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$

Lebensdauer: $\psi(t) = \psi(0) \, e^{-i\omega_0 t} \, e^{-t/2\tau}$ $\qquad \hbar = c = 1$

$$= \psi(0) \, e^{-t\left(iE_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)} \qquad (2)$$

Intensität: $\psi(t)^* \, \psi(t) = |\psi(0)|^2 \cdot e^{-\Gamma t}$

entspricht radioaktivem Zerfallsgesetz.

Fourier transformierte von (2) ist:

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \psi(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$

da $\psi(t) = 0$ für $t < 0$

[allgemein:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$$]

mit

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = E$$

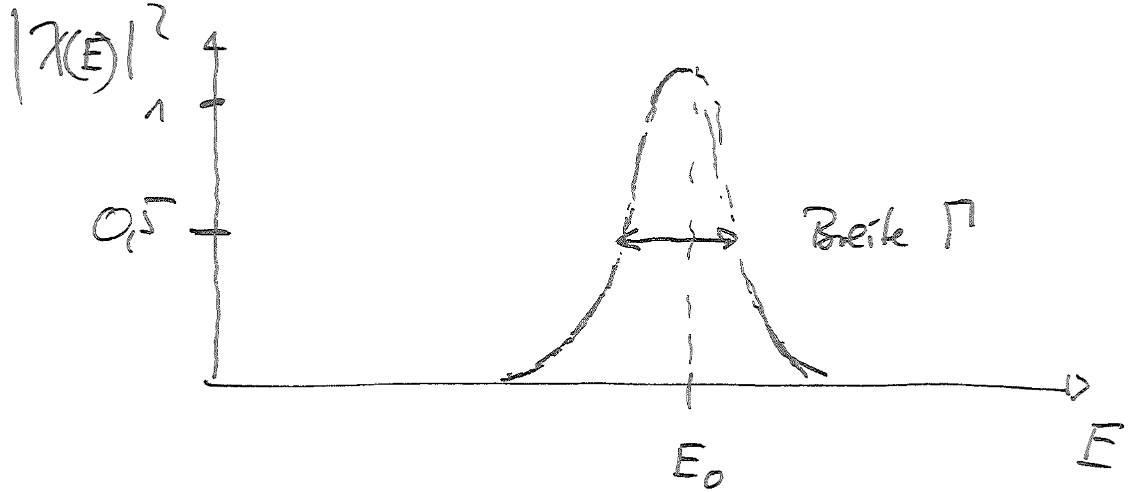
ist <u>Amplitude</u> als Funktion v. E

$$\chi(E) = \int \psi(t)\, e^{iEt}\, dt$$

$$= \psi(0) \int e^{-t[(\Gamma/2) + i(E_0 - E)]}\, dt$$

$$= \frac{K}{(E - E_0) - i\,\Gamma/2} \quad \text{mit Konstante } K$$

Intensitätsverteilung ist proportional $\chi^*(E)\,\chi(E) \propto \dfrac{1}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4}$



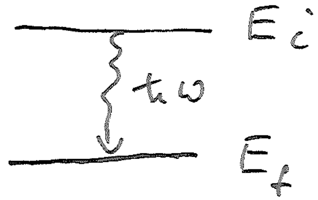
Atom / Kernphysik: Intensitätsverteilung heißt Lorentzlinie
Halbwertsbreite: Γ

Teilchenphysik: Breit-Wigner-Resonanz Formel

Elektromagnetische Übergänge

Relaxation eines angeregten Zustands über γ-Emission oder Konversionselektronen

Erhaltungssätze: 1) Energieerhaltung



$E_i = E_f + \hbar\omega$

i: „initial"

f: „final"

2) Drehimpulserhaltung

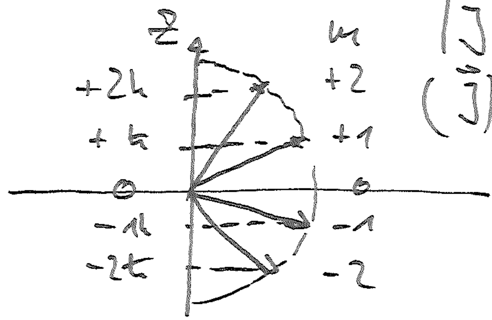
$$\vec{J}_i - \vec{J}_f = \vec{J}_\gamma$$

$$|J_i - J_f| \le l \le J_i + J_f \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

$J_{i,f}$: Gesamtdrehimpulse

l : Drehimpuls des EM Feldes

$$m_i = m_f + \mu$$



$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\,\hbar$$

$$(\vec{J})_z = m\hbar$$

3) Paritätsquantenzahl

$$\Pi_i = \Pi_f \cdot \Pi_\gamma$$

Paritätsoperation

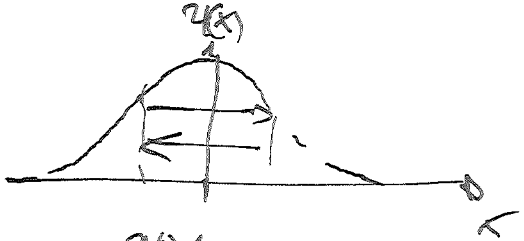
Operation der Inversion der Raumkoordinaten $\quad x, y, z \to -x, -y, -z$

Diskrete Transformation $\quad \vec{r} \to -\vec{r}$

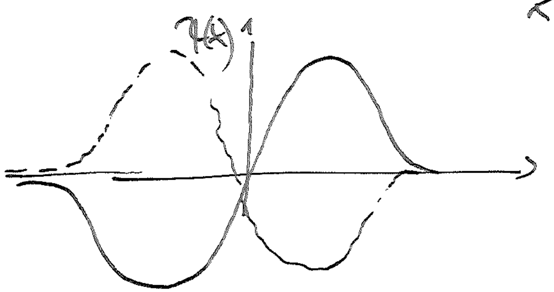
Impuls : $\vec{p} \to -\vec{p}$ $\quad$ (Vektoren)

$\cancel{\vec{k} \to k}$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \to -\vec{r} \times -\vec{p} = \vec{L}$ $\quad$ (Axialvektoren)



symmetrisch



antisymmetrisch

P: Operator der Paritätstrafo

$$P\,\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

$$P^2\,\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad P^2 = \mathbb{1}$$

<u>Eigenwert</u> (falls es einen gibt!) ± 1
wird auch Parität des Systems genannt

WF hat definierte Parität (bzw. keine)
gerade (even) Parität $P = +1$
ungerade (odd) " $P = -1$

Bsp:

$\psi = \cos x \qquad P\psi = \cos(-x) = \cos x = \psi \Rightarrow P = +1$

$\psi = \sin x \qquad \Rightarrow P = -1$

während $\psi = \cos x + \sin x$

$P\psi = \cos x - \sin x \neq \pm\psi$ hat keine definierte Parität

Sphärisch symmetrisches Potential $V(\vec{r}) \Rightarrow V(-\vec{r}) = V(\vec{r})$

Transformationseigenschaften des Hamiltonoperators für sphärisch symm. System!

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

Paritätsoperation:

$$\frac{d^2}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2}{d(-x)^2} = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$V(x) \rightarrow V(-x) = V(x)$$

$$\Rightarrow \quad H(x) \rightarrow H(-x) = H(x)$$

Schrödinger Gleichung:

$$H(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x) \qquad (1)$$

nach Paritätsoperation

$$H(-x)\,\psi(-x) = E\,\psi(-x)$$

$$\Leftrightarrow \quad H(x)\,\psi(-x) = E\,\psi(-x)$$

d.h. falls $\psi(x)$ Eigenfunktion zu (1) ist, dann ist auch $\psi(-x)$ EF von (1).

Annahme: zu Energie E gibt es nur eine einzige Eigenfunkt die sich allerdings um einen Faktor α unterscheiden können

$$\psi(-x) = \alpha\, \psi(+x) \qquad (2)$$

Ersetzen x durch $-x$

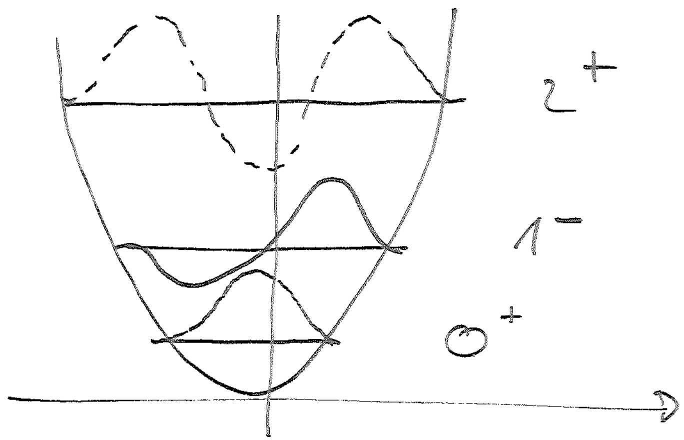
$$\psi(x) = \alpha\, \psi(-x)$$

eingesetzt in (2)

$$\psi(+x) = \alpha^2\, \psi(-x) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 1 \;,\; \alpha \pm 1$$

$$\Rightarrow \psi(-\vec{r}) = \pm\, \psi(\vec{r})$$

Bsp. Oszillatorpotential



Wellenfunktion <u>H-Atoms</u> (equiv. EM Strahlung)

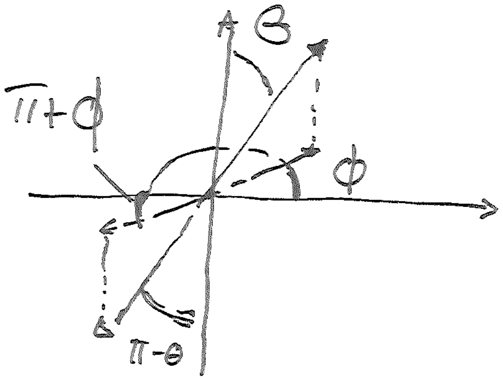
Produkt aus radial und Winkelanteil

sog. Kugelwellenfunktion (spherical harmonics) $Y^{l}_{m}(\theta, \phi)$

θ, ϕ polar, azimuth Koordinate

Rauminversion $\vec{r} \to -\vec{r}$

equivalent zu
$$r \to r$$
$$\theta \to \pi - \theta$$
$$\phi \to \pi + \phi$$



$$\psi(r, \theta, \phi) = \chi(r)\, Y^{m}_{l}(\theta, \phi)$$

$$Y^{m}_{l}(\theta, \phi) \to Y^{m}_{l}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^{l}\, Y^{m}_{l}(\theta, \phi)$$

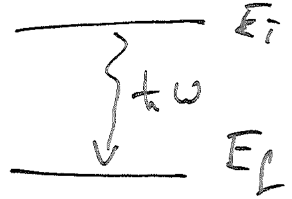
$$P\, Y^{m}_{l}(\theta, \phi) = (-1)^{l}\, Y^{m}_{l}(\theta, \phi)$$

unter Paritätstransformation ändert sich das Vorzeichen (ungerade Parität) wenn $l = 1, 3, \ldots$ ungerade ist und gerade Parität für $l = 0, 2, \ldots$

Atom: Dipolübergänge haben Auswahlregeln $\Delta J = \pm 1$

Parität eines atomaren Zustandes ändert sich, Parität des (E1) emittierten Photons muß folglich auch -1, damit die Parität des gesamten Systems erhalten bleibt (Atom + Photon) in el. magn. WW erhalten bleibt.

Experimentelle Beobachtung: Parität ist in el. magnet. und starken WW erhalten.



„Elektrische Übergänge / Strahlung“ wenn $\vec{E}$ in einer Ebene mit dem elektrischen Dipolmoment

„Magn. Übergänge / Strahlung“ wenn $\vec{B}$ in Ebene mit magn. Moment

$$\Pi_i = (-1)^{l}\, \Pi_f \quad \text{für } (El)\text{-Photonen}$$

$$\Pi_i = (-1)^{l+1}\, \Pi_f \quad \text{für } (Ml)\text{-Photonen}$$