

---

**Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik I**  
**Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik**  
**Wintersemester 2012/13**

---

Blatt Nr. 6

21. November 2012

### Aufgabe 1 Weyl-Spinoren

- a. Der links- bzw. rechtshändige Anteil eines beliebigen Dirac-Spinors  $\psi$  ist definiert durch

$$\psi_L = \omega_- \psi, \quad \psi_R = \omega_+ \psi \quad \text{mit} \quad \omega_{\pm} = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma_5}{2}.$$

In welchem Fall sind auch  $\psi_L$  und  $\psi_R$  Lösungen der Dirac-Gleichung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis:  $\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} = 0$ .

- b. Zeigen Sie, daß die Dirac-Gleichung für ein masseloses Teilchen in zwei entkoppelte Gleichungen für zweikomponentige Spinoren  $\xi(x)$  und  $\eta(x)$  zerfällt, die sog. Weyl-Gleichungen.

Benutzen Sie dazu am besten die chirale Darstellung der Dirac-Matrizen:

$$\gamma_{\text{chiral}}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\text{chiral}}^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}.$$

- c. Bestimmen Sie die Helizität (d.h. den Eigenwert des Helizitätsoperators) der Lösungen der Weyl-Gleichungen. Besonders leicht läßt sich die Helizität an der Darstellung der Weyl-Gleichungen im Impulsraum ablesen. Machen Sie dazu den Ansatz  $\xi(x) = \hat{\xi}(p)e^{-ip_{\mu}x^{\mu}}$  bzw.  $\eta(x) = \hat{\eta}(p)e^{-ip_{\mu}x^{\mu}}$ .

### Aufgabe 2 Dirac-Algebra

Zeigen Sie folgende Beziehungen für Dirac-Spinoren ( $w$  steht hier für  $u$  oder  $v$ )

$$\begin{aligned} (\bar{w}_1 \gamma_{\mu} w_2)^* &= \bar{w}_2 \gamma_{\mu} w_1 \\ (\bar{w}_1 \gamma_{\mu} w_2)(\bar{w}_2 \gamma_{\nu} w_1) &= \text{Tr} \left[ (w_1 \bar{w}_1) \gamma_{\mu} (w_2 \bar{w}_2) \gamma_{\nu} \right] \\ \text{Tr}(\not{a} \not{b}) &= 4ab \\ \text{Tr}(\not{a} \gamma_{\mu} \not{b} \gamma_{\nu}) &= 4 \left[ a_{\mu} b_{\nu} + a_{\nu} b_{\mu} - (ab) g_{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

### Aufgabe 3 Compton-Effekt

Bei der inelastischen Streuung von  $\gamma$ -Quanten an Elektronen überträgt ein Photon einen Teil seiner Energie auf ein ruhendes Elektron und fliegt unter einem Streuwinkel  $\theta_{\gamma}$  weiter.

- a. Berechnen sie die kinetische Energie des gestreuten Elektrons in Abhängigkeit vom Streuwinkel  $\theta_{\gamma}$  und der Energie des Photons  $E_{\gamma}$ .
- b. Der maximale Energieübertrag auf das Elektron erfolgt bei der Rückstreuung des  $\gamma$ -Quants ( $\theta_{\gamma} = 180^{\circ}$ ). Berechnen Sie die Energiedifferenz zwischen der ursprünglichen  $\gamma$ -Energie und der maximalen Elektronenenergie. Wie groß wird diese Energiedifferenz im Grenzfall hoher  $\gamma$ -Energien?

- 
- c. Diskutieren Sie die Form des in der  $\gamma$ -Spektroskopie beobachteten Energiespektrums. Welche Unterschiede im Spektrum erwarten Sie für kleine und große Detektoren?