Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik I

Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik

Wintersemester 2012/13

Blatt Nr. 9 5. Dezember 2012

Aufgabe 1 Spin-1-Operator

Die Komponenten S_k ($k = 1, 2, 3$) des Spin-Operators $\vec{S}$ für ein Spin-1-Teilchen können definiert werden als Erzeugende von Drehungen in drei Dimensionen, d.h. $D_k(\delta\alpha) = \mathbf{1} + \mathrm{i}\,\delta\alpha\, S_k$, wobei die Drehmatrizen D_k für Drehungen um die x_1, x_2, x_3-Achse gegeben sind durch

$$D_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \; D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, D_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Bestimmen Sie die S_k als 3×3-Matrizen und verifizieren Sie die Drehimpuls-Vertauschungsrelationen $[S_k, S_l] = \mathrm{i}\,\epsilon_{klm} S_m$.

b. Zeigen Sie, dass gilt: $\vec{S}^2 \equiv S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1(1+1)\,\mathbf{1}$.

c. Bestimmen Sie die Eigenwerte m von S_3 und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{\chi}_m$.

d. Ein Photon befinde sich in einem Impuls-Eigenzustand mit Impuls in x_3-Richtung, $\vec{k} = k\,\vec{e}_3$. Was ist die physikalische Bedeutung der m und $\vec{\chi}_m$ aus Teilaufgabe (c)? Welche Zustände sind durch die Transversalitätsbedingung erlaubt?

Aufgabe 2 Vektor-Kugelfunktionen

Vektor-Kugelfunktionen $\mathbf{Y}_{jm}$ können aus den Kugelflächenfunktionen Y_{jm} erhalten werden gemäß

$$\mathbf{Y}_{jm} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\mathbf{L}Y_{jm} \;\; mit \;\; \mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$$

a. Zeigen Sie, dass gilt $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{jm} = 0$ und bestimmen Sie die Komponenten $Y_{jm}^{(\theta,\varphi)}$ in der Entwicklung $\mathbf{Y}_{jm} = Y_{jm}^{\theta}\mathbf{e}_{(\theta)} + Y_{jm}^{(\varphi)}\mathbf{e}_\varphi$ nach den orthonormierten Basisvektoren $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ in Polarkoordinaten.

b. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\nabla \cdot [g(r)\mathbf{Y}_{jm}] = 0,$$

Aufgabe 3 Mößbauer-Effekt

Der angeregte Zustand des Kerns ^{57}Fe bei 14.4 keV hat eine Lebensdauer von $1.4 \cdot 10^{-7}$ s und zerfällt unter γ-Emission.

a. Berechnen Sie die Rückstoßenergie des Kerns und die Linienbreite der γ-Linie.

b. Begründen Sie, wieso das γ-Quant nicht von einem weiteren ruhenden ^{57}Fe-Kern absorbiert werden kann.

c. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich der zweite Kern bewegen, damit er das γ-Quant absorbieren kann? Vergleichen Sie das Ergebnis mit der thermischen Geschwindigkeit eines freien Kerns.

d. Die Kerne seien in einem Kristallgitter mit einer Anregungsfrequenz für Gitterschwingungen von 10^{-2} eV eingebaut. Wieso ist die rückstoßfreie Resonanzabsorption in diesem Fall möglich?

e. Überlegen Sie sich ein Experiment, mit dem man die Gravitationsrotverschiebung von Photonen im Labor nachweisen kann.