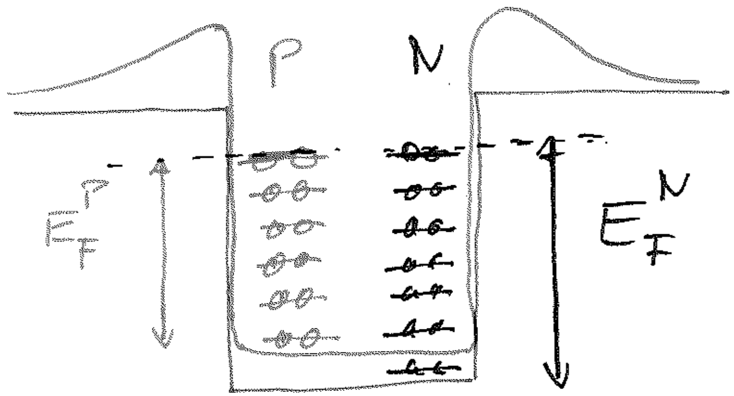
(Wiederholung/ Ergänzung Fermigas-Modell) (0)

- Schwere Kerne haben Neutronenüberschuß
Fermi-Niveau von Protonen und Neutronen müssen auf selben Niveau liegen
(ansonsten β-Zerfall(!))



- Tiefe des Potentialtopfes für Neutronengas muß größer sein als für Protonengas

D.h. Im Mittel sind Protonen schwächer gebunden als Neutronen, was aus Coulomb Abstoßung der Protonen voneinander erklärt werden kann

Schalenmodell

Tröpfchen-Modell und Fermigas-Modell können spezielle Eigenschaften angeregter Kernzustände nicht erklären.

Bartlett u. Elsasser (1932/33) wiesen ~~auf~~ darauf hin, daß Kerne besonders stabile Konfigurationen haben, wenn Z oder N (oder beide) eine magische Zahl ist:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

Experimentelle Hinweise:

- Häufigkeit verschiedener gg-Nuklide als Funktion von A
- Separationsenergie für das letzte Nukleon
- Abweichung d. Bindungsenergie von Weizsäcker Massenformel
- Energie des ersten angeregten Zustandes in gg-Kernen
- β-Umwandlungsenergie in ~~gg-Kernen~~ von u-Neutronen in u-Protonen

- Einfangsquerschnitte von Neutronen als Funktion von N (2)

Evidenz für magische Zahlen: Analog zur Atomphysik schalenähnliche Struktur im Kern

- Spin-Bahn Kräfte entscheidend
- Pauli-Prinzip verbietet Zusammenstoß zw. Nukleonen
  => (fast) ungestörte Bahnen der Nukleonen in Kernmaterie

Naives Schalenmodell: Nukleonen bewegen sich unabhängig von einander im sphärischen Potential

„Schalenabschluss" ergibt sich dann, wenn ein Zustand zum nächst höheren Niveau eine besonders große Energiedifferenz aufweist.

~~Kern~~

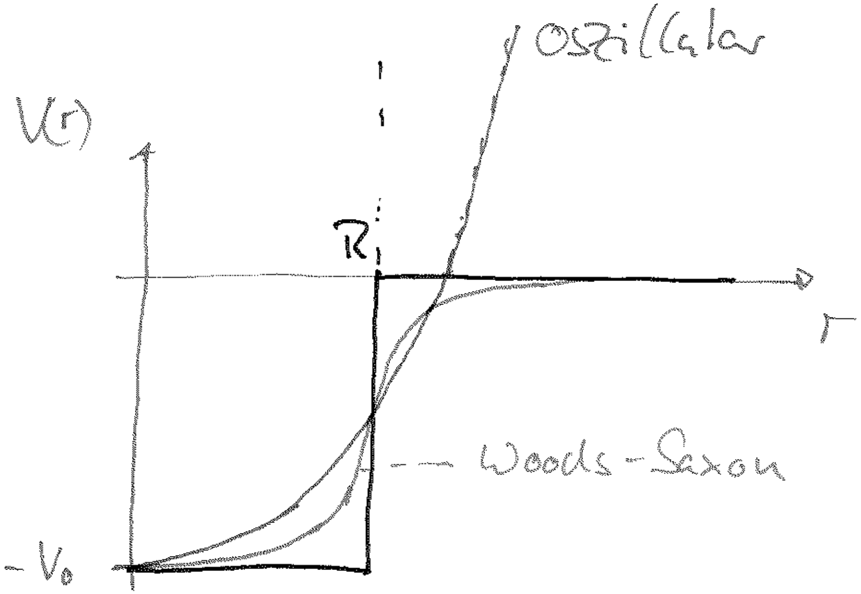
Form des Potentials:

- Rechteckpotential
- 3-d harmonischer Oszillator
- realistische Potentialform die gemessene Dichteverteilung gut wiedergibt (Woods-Saxon Potential)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

$$V(r) = -V_0 \left[1 + e^{\frac{r-R}{a}}\right]^{-1}$$

wobei a: Maß für Randunschärfe



Für Rechteck bzw. Oszillatorpotential lassen sich analytisch lösen (wenn man $V(r \to R_0)$ nicht gegen 0 gehen lässt) für harm. Oszillator (3-d)

Energieniveaus $E_{\ell, n}$

mit Bahndrehimpuls ℓ und Radialquantenzahl n, die angibt wieviel Nullstellen (Knoten) die WF hat.

$$E_{n,\ell} \equiv E_\lambda \doteq \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

mit $\lambda = 2(n-1) + \ell = 0, 1, 2, \ldots$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ (Zahl der Knoten +1)

$\ell = 0, 1, 2, \ldots$ bzw. $s, p, d, \ldots$

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Entartung: abgesehen von untersten zwei Niveaus sind Lsg von verschiedenen Paaren der Werte n und ℓ beim Oszillator „zufällig" entartet

Bsp: $\ell = 3,\ n = 1 \Rightarrow \lambda = 2(n-1)+\ell = 3$

$\ell = 1,\ n = 2 \Rightarrow \lambda = \qquad = 3$

Jeder Zustand mit Bahndrehimpuls l hat hinsichtlich magn. Quantenzahl m eine $(2l+1)$-fache Entartung und kann nach Pauli-Prinzip mit $\nu = 2(2l+1)$ Teilchen von Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen besetzt werden.

Entartung: $\frac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot \underset{\text{Spin}}{\underset{\uparrow}{2}}$

Oszillator-Schalen des 3-d Oszillators:

N	Orbitale	Parität $(-1)^l$	Entartung	Σ Zustände Nukleon	magi. Zahl
0	1s	+	2	2	✓
1	1p	−	6	8	✓
2	2s, 1d	+	12	20	✓
3	2p, 1f	−	20	40	—
4	3s, 2d, 1g	+	30	70	—
5	3p, 2f, 1h	−	42	112	—

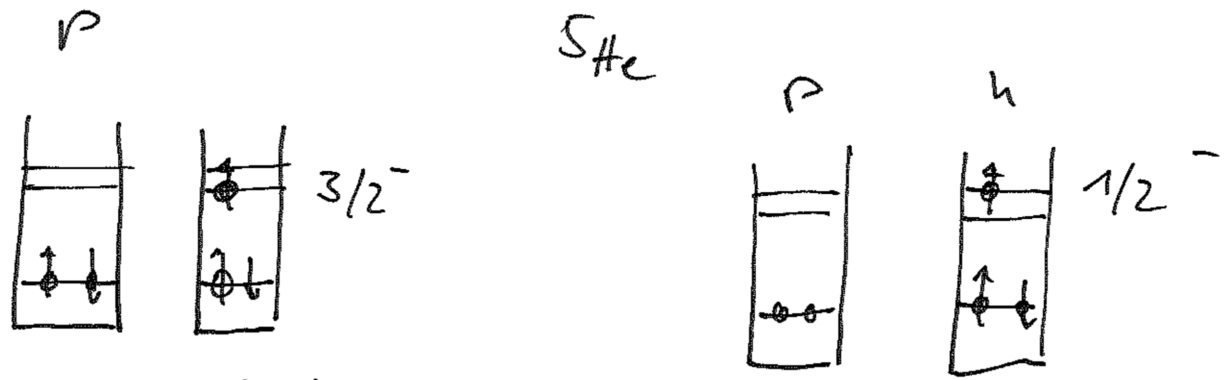
harmonischer Oszillator führt zu Schalenabschlüssen bei
Nukleonenzahl $2, 8, 20, 40, 70, 112, \ldots$
Nur für $N = 0, 1, 2$ richtige Vorhersage der mag. Zahlen.

Bisher nicht berücksichtigt: Spin Nukleonen

z. Bsp. Nukleon mit $1p$ Orbital kann
Gesamtdrehimpuls $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ haben

$1p_{1/2}$ – $1p_{3/2}$ (sind bisher entartet)

^5He $\qquad$ $^4He \oplus n$



Grundzustand
Gesamtspin $\frac{3}{2}$, neg. Parität

1. Angeregter Zustand
Gesamtspin $1/2$ neg. Parität

1. angeregte Zustände $\Delta E \approx 1\,\mathrm{MeV}$!

Ansatz: Spin-Bahn-Kraft

$$V_{\ell s} = C_{\ell s}\, \vec{\ell} \cdot \vec{s}$$

mit $\vec{\ell} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}\left(J^2 - \ell^2 - s^2\right)$

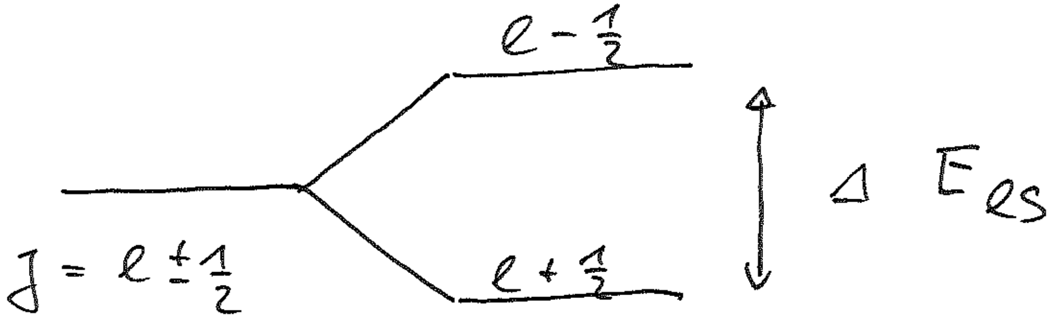
wobei $\vec{J} := \vec{\ell} + \vec{s}$

$$\Rightarrow V_{\ell s} \,|j, \ell, s\rangle =$$

$$C_{\ell s} \frac{\hbar^2}{2} \big(j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1) \big) \,|j, \ell, s\rangle$$

weil $s = \frac{1}{2}$, ist $j = \ell + \frac{1}{2}$ oder $j = \ell - \frac{1}{2}$

$$\frac{V_{\ell s}}{C_{\ell s}} \,|j, \ell, s\rangle = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2} \ell \,|j, \ell, \frac{1}{2}\rangle & ;\ \text{für } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar}{2}(\ell+1) \,|j, \ell, \frac{1}{2}\rangle & ;\ \text{für } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\Delta E_{ls} = C_{ls} \hbar^2 \left(l + \frac{1}{2} \right)$$

$\Rightarrow$ ΔE_{ls} wächst mit Bahndrehimpuls

<u>Zusammenfassung</u>

- „Magische" Zahlen können durch <u>starke</u> Spin-Bahn-Kraft erklärt werden
- Diese Spin-Bahn-Energie (MeV!) ist Folge der Nukleonenkräfte
- Drehimpuls und Parität von Nukliden mit <u>1</u> Nukleon über einer abgeschlossenen Schale leicht vorhersagbar