Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik I

Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik

Wintersemester 2013/14

Blatt Nr. 4 31. Oktober 2013

Aufgabe 1 : Dirac-Matrizen

a. Berechnen Sie die folgenden Summen über $\lambda = 0, \dots, 3$:

$$\gamma^\lambda \gamma_\lambda\,, \quad \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma_\lambda\,, \quad \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\lambda, \quad \gamma^\lambda \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\lambda$$

mit $\sigma^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$

b. Zeigen Sie, dass für zwei Vierer-Vektoren a und b die Identität

$$\not{a}\not{b} = a \cdot b - i\sigma_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

gilt, und berechnen Sie $\not{a}\not{a}$. ($\not{a} \equiv a_\mu \cdot \gamma^\mu$)

c. Berechnen Sie die Spur $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$.

d. Verifizieren Sie folgende Eigenschaften der Dirac-Matrizen:

$$\begin{aligned}
&\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0\,,\\
&(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0\,, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k\,,\\
&\overline{\gamma}^\mu = \gamma^\mu\,, \quad \overline{\gamma}_5 = -\gamma_5\,, \overline{\gamma_\mu \gamma_5} = \gamma_\mu \gamma_5\,,
\end{aligned}$$

wobei die Adjungier-Operation für Dirac-Matrizen als $\overline{\Gamma} := \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ definiert ist.

Aufgabe 2 : Chirale Darstellung der Dirac-Matrizen

Zeigen Sie, daß es eine unitäre Matrix T gibt, die die Dirac-Matrizen von der üblichen Dirac-Darstellung in die chirale Darstellung

$$\gamma^0_{\text{chiral}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k_{\text{chiral}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

transformiert, d.h. zeigen Sie, daß

$$\gamma^\mu_{\text{Dirac}} = T^{-1} \gamma^\mu_{\text{chiral}} T\,.$$

Gehen Sie dabei so vor, daß Sie zunächst T aus der Transformation von γ^0 durch Diagonalisierung bestimmen. Verifizieren Sie dann die Transformationen von γ^k. Bestimmen Sie außerdem die Form für $(\gamma_5)_{\text{chiral}}$.

Aufgabe 3 : Lösung der freien Dirac-Gleichung

Setzt man in die Dirac-Gleichung den Ansatz $\psi(x) = u(k)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\mu x^\mu}$ für ein Elektron mit Impuls $\vec{k}$ ein, so erhält man als Bestimmungsgleichung für u das lineare Gleichungssystem $(\not{k} - m)u(k) = 0$. Zur Vereinfachung soll im folgenden nur die Bewegung in z-Richtung mit $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ betrachtet werden.

a. Wieviele linear unabhängige Lösungen $u(k)$ von $(\not{k} - m)u(k) = 0$ gibt es?

b. Bestimmen Sie die linear unabhängigen Lösungen, die die Orthogonalitäts- und Normierungsrelation $\overline{u}_r u_{r'} = 2m\delta_{rr'}$ erfüllen.

c. Zeigen Sie, daß folgende Identität gilt:

$$\sum_r u_r \overline{u}_r = \not{k} + m.$$

d. Zeigen Sie, daß die u_r so gewählt werden können, dass sie Eigenzustände des Operators $\gamma_5 \not{s}$ sind, wobei der Vektor s die Form $(s^\mu) = \frac{1}{m}(|\vec{k}|, 0, 0, E)$ hat.