Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik I

Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik

Wintersemester 2013/14

Blatt Nr. 5 13. November 2013

Aufgabe 1 Weyl-Spinoren

a. Der links- bzw. rechtshändige Anteil eines beliebigen Dirac-Spinors ψ ist definiert durch

$$\psi_L = \omega_- \psi\,, \quad \psi_R = \omega_+ \psi \quad \text{mit} \quad \omega_\pm = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma_5}{2}\,.$$

In welchem Fall sind auch ψ_L und ψ_R Lösungen der Dirac-Gleichung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$.

b. Zeigen Sie, daß die Dirac-Gleichung für ein masseloses Teilchen in zwei entkoppelte Gleichungen für zweikomponentige Spinoren $\xi(x)$ und $\eta(x)$ zerfällt, die sog. Weyl-Gleichungen.

Benutzen Sie dazu am besten die chirale Darstellung der Dirac-Matrizen:

$$\gamma^0_{\text{chiral}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k_{\text{chiral}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Bestimmen Sie die Helizität (d.h. den Eigenwert des Helizitätsoperators) der Lösungen der Weyl-Gleichungen. Besonders leicht läßt sich die Helizität an der Darstellung der Weyl-Gleichungen im Impulsraum ablesen. Machen Sie dazu den Ansatz $\xi(x) = \hat{\xi}(p) e^{-\mathrm{i} p_\mu x^\mu}$ bzw. $\eta(x) = \hat{\eta}(p)\, e^{-\mathrm{i} p_\mu x^\mu}$.

Aufgabe 2 Dirac-Algebra

Zeigen Sie folgende Beziehungen für Dirac-Spinoren (w steht hier für u oder v)

$$(\overline{w}_1 \gamma_\mu w_2)^* = \overline{w}_2 \gamma_\mu w_1$$

$$(\overline{w}_1 \gamma_\mu w_2)(\overline{w}_2 \gamma_\nu w_1) = \mathrm{Tr}\left[(w_1 \overline{w}_1)\gamma_\mu (w_2 \overline{w}_2)\gamma_\nu\right]$$

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4ab$$

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\gamma_\mu \not{b}\gamma_\nu) = 4\left[a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu - (ab) g_{\mu\nu}\right]$$