Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik I

Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik
Wintersemester 2013/14

Blatt Nr. 12 14. Januar 2014

Aufgabe 1 GZK cut-off

Treffen die hochenergetischen Protonen der kosmischen Strahlung auf die Photonen der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB, Cosmic Microwave Background) kann dies zur Photoproduktion von Pionen in folgender Reaktion führen:

$$\gamma + p \to (\Delta^+) \to n + \pi^+ \quad \text{or} \quad \gamma + p \to (\Delta^+) \to p + \pi^0$$

a. Berechnen Sie die mittlere Energie der CMB-Photonen. Das Schwarzkörperspektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung entspricht einer Temperatur von 2,72 K.

b. Wie groß ist die minimale Energie die ein Proton benötigt um ein Proton und ein Pion durch die frontale Kollision mit einem CMB-Photon zu erzeugen? ($m(\pi^0) = 135$ MeV).

c. Berechnen Sie die mittlere freie Weglänge eines 10^{20} eV-Protons, welche durch die Wechselwirkung mit den CMB-Photonen gegeben wird und geben Sie das Ergebnis in den Einheiten Lichtjahren und Parsec an. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit den typischen kosmischen Skalen unserer Galaxie, unseres lokalen Galxienhaufens und unseres lokalen Superhaufens. Der totale Wirkungsquerschnit für die γ-Proton-Reaktion beträgt bei hohen Energien rund $\sigma \simeq 2 \cdot 10^{-28} cm^2$.

Aufgabe 2 Spin-1-Operator

Die Komponenten S_k ($k = 1, 2, 3$) des Spin-Operators $\vec{S}$ für ein Spin-1-Teilchen können definiert werden als Erzeugende von Drehungen in drei Dimensionen, d.h. $D_k(\delta\alpha) = \mathbf{1} + \mathrm{i}\,\delta\alpha\, S_k$, wobei die Drehmatrizen D_k für Drehungen um die x_1, x_2, x_3-Achse gegeben sind durch

$$D_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, D_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Bestimmen Sie die S_k als 3×3-Matrizen und verifizieren Sie die Drehimpuls-Vertauschungsrelationen $[S_k, S_l] = \mathrm{i}\,\epsilon_{klm} S_m$.

b. Zeigen Sie, dass gilt: $\vec{S}^2 \equiv S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1(1+1)\,\mathbf{1}$.

c. Bestimmen Sie die Eigenwerte m von S_3 und die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{\chi}_m$.

d. Ein Photon befinde sich in einem Impuls-Eigenzustand mit Impuls in x_3-Richtung, $\vec{k} = k\,\vec{e}_3$. Was ist die physikalische Bedeutung der m und $\vec{\chi}_m$ aus Teilaufgabe (c)? Welche Zustände sind durch die Transversalitätsbedingung erlaubt?

Aufgabe 3 Vektor-Kugelfunktionen

Vektor-Kugelfunktionen $\mathbf{Y}_{jm}$ können aus den Kugelflächenfunktionen Y_{jm} erhalten werden gemäß

$$\mathbf{Y}_{jm} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\mathbf{L}Y_{jm} \;\; mit \;\; \mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$$

a. Zeigen Sie, dass gilt $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{Y}_{jm} = 0$ und bestimmen Sie die Komponenten $Y_{jm}^{(\theta,\varphi)}$ in der Entwicklung $\mathbf{Y}_{jm} = Y_{jm}^{\theta}\mathbf{e}_{(\theta)} + Y_{jm}^{(\varphi)}\mathbf{e}_{\varphi}$ nach den orthonormierten Basisvektoren $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ in Polarkoordinaten.

b. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\nabla \cdot [g(r)\mathbf{Y}_{jm}] = 0,$$