

Kern- und Teilchenphysik Teil 2

Prof. Dr. Lothar Oberauer
gemeinsam mit
Prof. Dr. Wolfgang Hollik

Dies ist eine unkorrigierte Vorschau-Version

5. November 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Tiefinelastische Streuung, Quarks	5
1.1	Angeregte Nukleozustände	5
1.2	Strukturfunktionen	7
1.3	Impulsverteilung der Quarks	10
1.4	Tiefinelastische ν -Nukleonstreuung	10
1.5	Antiquarks im Nukleon	14
2	Quantenchromodynamik	15
2.1	Tiefinelastische Streuung im Parton-Bild	15
2.2	Eichtheorien	19
2.2.1	Lagrange-Formalismus für Felder	19
2.2.2	QED als Eichtheorie	21
2.2.3	Nicht-Abelsche Eichtheorien	23
2.3	Formulierung der QCD	28
2.4	Scaling-Verletzung und Parton-Verteilung	33
2.5	Laufende Kopplung und asymptotische Freiheit	43
2.5.1	QED	43
2.5.2	QCD	46
2.6	QCD-Potentiale und Bindungszustände	48
2.6.1	QED	48
2.6.2	QCD	49
2.6.3	Quarkonia	55
3	Colliderphysik	57
3.1	Quarkflavours, Farben, Gluonen, $W^\pm Z$	57
3.1.1	Leptonische Kanäle	58
3.1.2	Hadronische Kanäle	59
3.1.3	Zusammenfassung Quarks	63
3.2	Nichtresonante Erzeugung von Hadronen	63
4	Gluonen	65
4.1	QCD-Potential bei kleinen Abständen	65
4.2	QCD-Potential bei großen Abständen	65
4.3	Quarkonia	67

5	Schwache Wechselwirkung	69
5.1	Betazerfall von Kernen: Fermitheorie	70
5.2	Schwache Zerfälle seltsamer Teilchen	77
5.3	Schwache Mischungsverhältnis mit 6 Quarks	78
5.4	Neutrale Ströme	78
5.5	Nachweis W^\pm, Z^0	79
6	Standardmodell	83
6.1	Chirale Fermionen	83
6.2	Symmetriegruppe der elektromagnetischen WW	84
6.2.1	Isospin	84
6.2.2	Hyperladung Y	85
6.2.3	$SU(2) \times U(1)$ Transformationen	85
6.2.4	Chirale Struktur der Darstellungen	86
6.3	Lokale Eichinvarianz, Wechselwirkungen	87
6.4	Symmetriebrechung, Higgs-Mechanismus	93
6.5	Fermionmassen und -Mischung	98
6.5.1	Eine Generation	98
6.5.2	Mehrere Generationen	99
7	Neutrale Ströme	103
7.1	Nachweis W^\pm, Z^0	104
7.2	Zerfall neutraler K^0 -Mesonen	106
7.3	CP-Verletzung im K^0 -Zerfall	109
7.4	Neutrinooszillationen	110
8	Status des Standardmodells, Perspektiven	113
8.1	Vorhersagen und Tests	113
8.1.1	Niederenergie-Limes	113
8.1.2	Z-Boson-Observable	116
8.1.3	W^+W^- -Paarerzeugung in e^+e^- (LEP)	118
8.1.4	Globale Analyse	119
8.2	Higgs-Bosonen	120
8.2.1	Eigenschaften	120
8.2.2	Erzeugung und Nachweis am LHC	122
8.2.3	Hochenergieverhalten	124
9	Beyond the Standard Modell	127
9.1	Massive Neutrinos	127
9.2	Grand Unification	127
9.3	Supersymmetrie (SUSY)	128
A	Literaturverzeichnis & Index	129

Kapitel 1

Tiefinelastische Streuung, Quarks

Ziel: Struktur der Nukleonen

Methode: Streuung hochenergetischer punktförmiger Teilchen an H_2 - D_2 -Target mit hohem q^2 -Übertrag.

Erinnerung: Ladungsradius d. Protons:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_p} = 0,86 \text{ fm}$$

Pionen, Kaonen:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_\pi} = (0,67 \pm 0,02) \text{ fm}$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_K} = (0,58 \pm 0,04) \text{ fm}$$

Methode: Streuung hochenergetischer π , K an Hüllenelektronen von H_2 -Target.
 \Rightarrow Proton, π^\pm , K^\pm sind *keine* punktförmigen Teilchen

$$\langle r^2 \rangle_{\pi,K}^{1/2} < \langle r^2 \rangle_p^{1/2}$$

1.1 Angeregte Nukleozustände

Inelastische e^- - p -Streuung: **Nukleoresonanzen**

\Rightarrow p ist *nicht* punktförmig $\Delta^+(1232)$ -**Resonanz**: lorentzinvariante Masse $W = 1232 \text{ MeV}/c^2$

Breite $\Gamma = 120 \text{ MeV}$

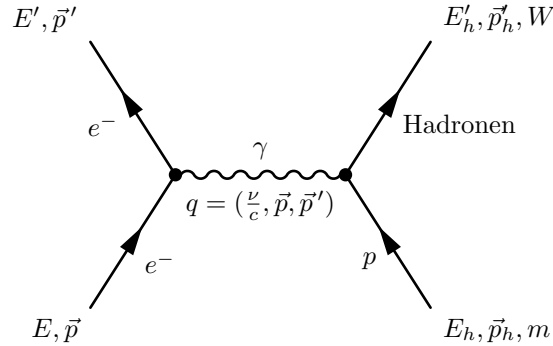
$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{\hbar c}{\Gamma c} \simeq \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{120 \text{ MeV} \cdot 3 \cdot 10^{23} \text{ fm/sec}}$$

$\tau = 5,5 \cdot 10^{-24} \text{ sec}$ (starke WW), Zerfall:

$$\Delta^+ \rightarrow p + \underbrace{\pi^0}_{\rightarrow 2\gamma} \quad \text{oder} \quad \Delta^+ \rightarrow n + \underbrace{\pi^+}_{\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu}$$

$$\Delta^+ \rightarrow p + 2\gamma \quad \Delta^+ \rightarrow n + \mu^+ + \nu_\mu$$

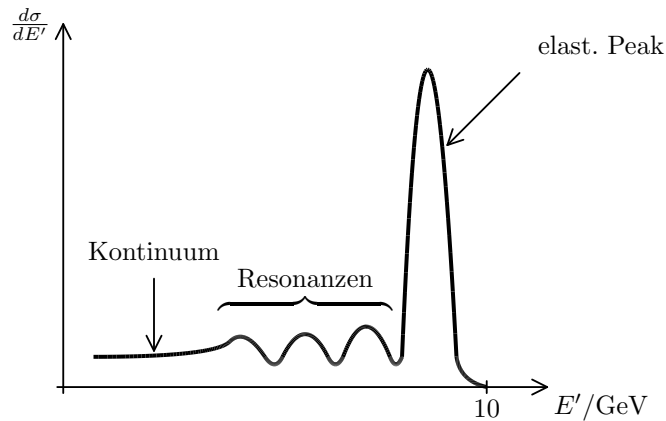
$\Gamma = 120 \text{ MeV}$, $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = 5,5 \cdot 10^{-24} \text{ sec} \Rightarrow$ Typische Zeitskala der starken WW.



Laborsystem: Energieverlust ν des e^- : $\nu = E - E'$

$$q^2 = \frac{\nu^2}{c^2} - (\vec{p} - \vec{p}')^2 = \frac{\nu^2}{c^2} - \vec{p}_h'^2$$

Struktur $\frac{d\sigma}{dE'}$ bei e - p -Streuung:



Keine quasielastische Streuung (im Gegensatz zur Streuung an Kernen) \Rightarrow Konstituenten (Quarks) verlassen das Proton nicht.

$$E_h' = \nu + mc^2 \quad \vec{p}_h' = \vec{p} - \vec{p}'$$

$$W^2 := E_h'^2 - (\vec{p}_h' c)^2 = m^2 c^4 + q^2 c^2 + 2\nu mc^2$$

Dabei ist W die **lorentzinvariante Masse** des hadronischen Zustands. q und ν sind lorentzinvariant.

Erreichte Werte von ν bzw. q^2 :

SLAC: $E \simeq 24 \text{ GeV}$
 $\nu_{max} \simeq 15 \text{ GeV}$
 $|q_{max}^2| \simeq 20 \text{ (GeV/c)}^2$

CERN: $E_\mu \simeq 300 \text{ GeV}$
 $\nu_{max} \simeq 200 \text{ GeV}$
 $|q_{max}^2| \simeq 220 \text{ (GeV/c)}^2$

LHC: $E_{p,\bar{p}} = 14 \text{ TeV}$

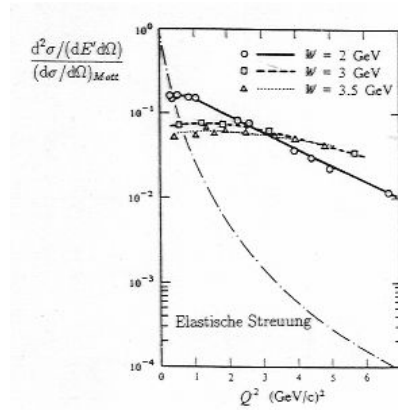


Abbildung 1.1: Elektron-Proton-Streuung: gemessener Wirkungsquerschnitt normiert auf den Mott-Wirkungsquerschnitt als Funktion von Q^2 für verschiedene Werte der invarianten Masse W . Schlüsse: Strukturfunktion konstant mit Q^2 . Streuung an Punktladungen. Proton hat eine Unterstruktur punktförmiger Konstituenten („Quarks“)

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \simeq 8 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \simeq 7 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \simeq 0.5$$

Punktförmige Streuung an den Quarks.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \propto Z^2$$

$$p = (u, u, d)$$

$$\langle (Ze)^2 \rangle = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] e^2 = \left(\frac{1}{3} \right) e^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{1}{3} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}$$

→ Hinweis auf Quark-Ladung $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$

1.2 Strukturfunktionen

≡ Formfaktoren der elastischen Streuung

i) elastischer Fall: $W = m \Rightarrow 2m\nu + q^2 = 0$

ii) inelastischer Fall: $W > m \Rightarrow 2m\nu + q^2 > 0$

daher ist bei der tiefinelastischen Streuung der Wirkungsquerschnitt Funktion 2er Variablen (z. B.: q^2, ν). \Rightarrow **Bjorkensche SkalenvARIABLE** x :

$$x := \frac{Q^2}{2m\nu}$$

mit $Q^2 = -q^2$, x : Maß für die Inelastizität der Streuung.

Für $W = m$ und $2m\nu = Q^2 \Rightarrow x = 1$ (elastischer Fall)

Für $W > m$ ist $2m\nu > Q^2$ und $0 < x < 1$ (inelastischer Fall)

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left(\underbrace{F_1(x, \theta)}_{\substack{\text{berücksichtigt} \\ \text{magn. WW} \\ \text{(Spin d. Quarks)}}} + F_2(x, \theta) \right)$$

Beobachtungen:

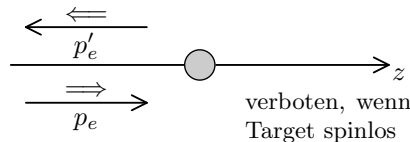
- i) $F_2(x, Q^2)$ unabhängig von Q^2 bei festem x
 \Rightarrow Unterstützung des Quarkmodells
- ii) Für spinlose Quarks wäre $F_1 \equiv 0$.
 Für Spin- $\frac{1}{2}$ Quarks: $F_2(x) = 2xF_1(x)$
 \rightarrow Callan-Gross-Relation \Rightarrow Quarks sind Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen
- iii) Protonen, Neutronen ($s = \frac{\hbar}{2}$) bestehen aus mind. 3q !

Rutherford \rightarrow Mott \rightarrow Tiefinelastische Streuung:

- i) **Mottstreuung:** Berücksichtigt relativ. Effekte ($\beta \rightarrow 1$) des e^- -Spins.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth.}} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (\beta = 1)$$

Unterdrückung der Streuung $\theta = 180^\circ$. Ursache: Erhaltung der Helizität in der QED für masselose Teilchen.



- ii) Proton hat Spin \Rightarrow zusätzliche magnetische Wechselwirkung. Magnetisches Moment $\mu = \frac{g}{2} \left(\frac{e\hbar}{2M} \right)$
 Magnetische WW \Leftrightarrow Umklappen des Spins des Nukleons. Diese WW bevorzugt Streuung um 180° und verbietet jene bei $\theta = 0^\circ \Rightarrow$ zusätzlicher Faktor $\sin^2 \frac{\theta}{2}$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruth.}} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + a \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{pkt., } s = 1/2} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left(1 + a \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

mit $a = \frac{Q^2}{2M^2 c^2}$. Begründung: Matrixelement $\propto \mu \propto \frac{1}{M} \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit proportional zu M^{-2} .

Für elastische Elektron-Proton-Streuung benötigt man Formfaktoren.

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Rosenbluth-Formel mit $G_{E,M}(Q^2)$ = elektrische (magnetische) Formfaktoren. $\tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2}$. Tiefinelastische Streuung:

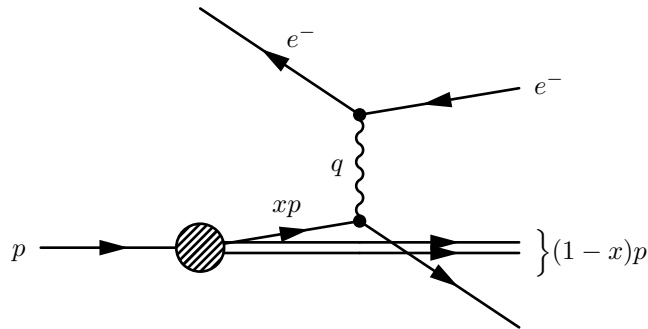
$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left(W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \tau) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Oft verwendet man dimensionslose Strukturfunktionen: $F_1 = Mc^2 W_1(Q^2, \nu)$ und $F_2 = \nu W_2(Q^2, \nu)$

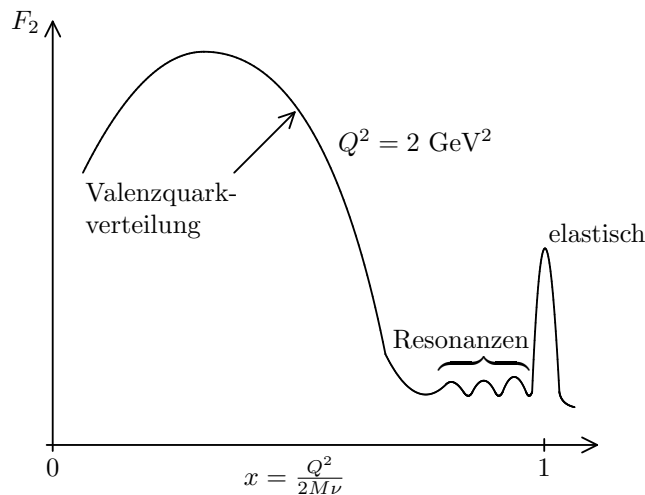
Beobachtung: Strukturfunktionen hängen (für $x \gtrsim 0,1$) nicht von Q^2 ab \Rightarrow elastische Streuung von Elektronen an punktförmigen Konstituenten.

$F_1 \neq 0 \Rightarrow$ Konstituenten haben Spin (und wechselwirken magnetisch mit den Elektronen).

$2xF_1 = F_2$ (**Callan-Groß-Beziehung**) für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen \Rightarrow Konstituenten (i.e. Quarks) sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen.



elastische Streuung des Elektrons am „Parton“



Für höhere Q^2 -Werte sind der elastische Peak und die Resonanzen durch Formfaktoren unterdrückt.

1.3 Impulsverteilung der Quarks

Bezugssystem mit großem $\vec{p}_h \Rightarrow$ nur longitudinale Impulse wichtig. Quark mit Impuls xp_h und elastischer Stoß mit einem Elektron:

$$(xp'_h)^2 = (xp_h + q)^2 = m_q^2 c^2$$

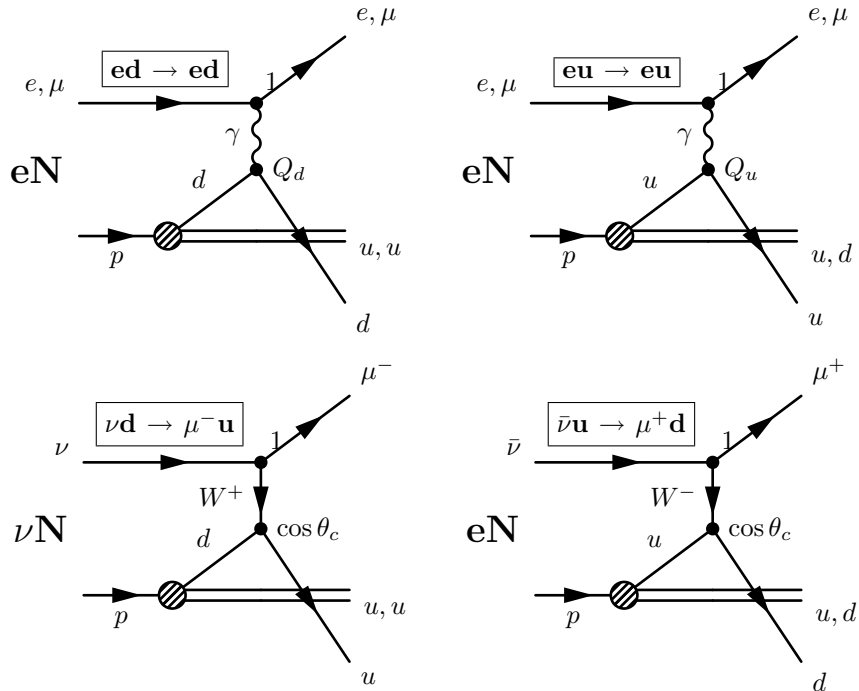
wegen $|\vec{p}'_h|^2 = |\vec{p}_h|^2$ gilt: $x = \frac{-q^2}{2p_h q}$ und wegen $\nu = p_h \cdot q/m$: $x = \frac{-q^2}{2m\nu}$.
 In diesem Bezugssystem entspricht x dem Teilimpuls eines Quarks xp_h mit $0 < x < 1$.

1.4 Tiefinelastische ν -Nukleonstreuung

1. Kopplung über schwache Wechselwirkung
2. Vgl. zur e^- -Nukleonstreuung: Aufschluss über Quarkladungen
3. Unterschied q und \bar{q} -Streuung

Neutrino beam: $p + Be \rightarrow \pi^\pm, K^\pm + \dots, \pi^\pm, K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu, \mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$
 Abschirmung aller geladenen Teilchen führt zu einem reinen ν -Strahl.

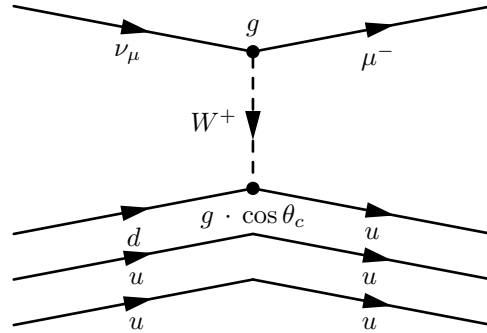
Dominierende Prozesse in der tief-inelastischen Streuung



Nachweis hochenergetischer Neutrinos

$$\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + \text{Hadronen}$$

Bei $E_\nu \simeq 200 \text{ GeV}$ werden ca. 10 Hadronen erzeugt. Totaler WQ σ_ν :



$$\sigma_\nu \simeq \underbrace{\left| g^2 \frac{\cos \theta}{(M_W^2 + q^2)} \right|^2}_{\text{Fermi-Konstante } G_F^2} \cdot \underbrace{\phi(E_\nu)}_{\text{Phasenraum } \phi \sim E_\nu}$$

$$\sigma_\nu \simeq G_F^2 E_\nu$$

$\Rightarrow \sigma_{\nu, \text{tot}} \simeq E_\nu$. \Rightarrow Streuung an Quarks bestätigt.

Elementare Streuprozesse

(für ν_μ und $\bar{\nu}_\mu$)

$$\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u$$

$$\nu_\mu \bar{u} \rightarrow \mu^- \bar{d}$$

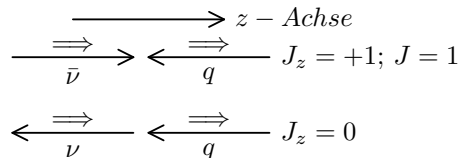
$$\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d$$

$$\bar{\nu}_\mu \bar{d} \rightarrow \mu^+ \bar{u}$$

„geladene Strom“-Wechselwirkungen (i. e. Austausch W^\pm -Boson). Wenn es im Proton nur u, d Quarks gibt, würde folgen:

$$\Rightarrow R := \frac{\sigma(\bar{\nu}q)}{\sigma(\nu q)} = \frac{1}{3}$$

(wegen Paritätsverletzung). Experiment liefert jedoch: ($10 < E_\nu/GeV < 100$): $R = 0,45 \Rightarrow$ Es gibt Antiquarks im Nukleon!



Bei der $\bar{\nu}, q$ - Streuung ist $J_z = +1$ festgelegt (Folge der Paritätsverletzung). \Rightarrow Nur eine Einstellmöglichkeit von sonst dreien (für $J = 1$) ist erlaubt.

Ladung der Konstituenten

Der Nachweis über die Ladungen der Konstituenten gelang über die teufelastische Neutrino-Nukleon-Streuung. Auch die Anzahl der Konstituenten im Nukleon wurde damit festgestellt. Unser heutiges Bild vom Aufbau der Nukleonen:

$\mathbf{p}=(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{d})$ „up-Quarks“

$\mathbf{n}=(\mathbf{u},\mathbf{d},\mathbf{d})$ „down-Quarks“

mit Ladungen u: $+2/3 e$; d: $-1/3 e$. Für $y := \nu/E$ und dem Grenzfall $y \rightarrow 0$ (Vorwärtstreuung ist $\frac{d^2\sigma}{dq^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left(\frac{F_2}{x}\right)$). Der F_1 -Beitrag verschwindet. In diesem Bild sollte gelten:

$$\underbrace{F_2^{ep}}_{\substack{\text{„el.“} \\ \text{Struktur-Fkt. der} \\ e^-p\text{-Streuung}}} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^2 u_p(x) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 d_p(x)$$

mit $u_p(x)$: Verteilungsfunktion der u-Quarks im Proton und $d_p(x)$: Verteilungsfunktion der d-Quarks im Proton.

$$F_2^{en} \sim \left(-\frac{1}{3}\right)^2 d_n(x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 u_n(x)$$

Weiterhin gilt: $u_n(x) = d_p(x)$ und $d_n(x) = u_p(x)$

$$\underbrace{F_2^{eN}}_{\substack{\text{Struktur-Fkt. der} \\ e^- \text{-Nukleonen-} \\ \text{streuung}}} := \frac{1}{2}(F_2^{ep} + F_2^{en}) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{5}{9} u_p(x) + \frac{5}{9} d_p(x) \right)$$

$$F_2^{eN} \sim \frac{5}{18} (u_p(x) + d_p(x))$$

ν -Nukleonenstreuung koppelt mit gleicher Stärke an u- und d-Quarks:

$$F_2^{\nu N} \sim (u_p(x) + d_p(x))$$

$$\Rightarrow F_2^{\nu N} = \frac{18}{5} F_2^{eN}$$

1972 fand man experimentell:

$$\int_0^1 F_2^{\nu N} dx = 0,50 \pm 0,005$$

Für Q^2 von 1 bis 10 GeV². \Rightarrow Nur die Hälfte des Nukleonenimpulses (bzw. der Masse) werden von den Quarks getragen! Dies führt zu dem Postulat der *Gluonen*, den Austauschbosonen der starken Wechselwirkung.

Gluonen koppeln nicht an e^- , ν : Sie tragen also keine Ladung und nehmen nicht an der schwachen Wechselwirkung teil.

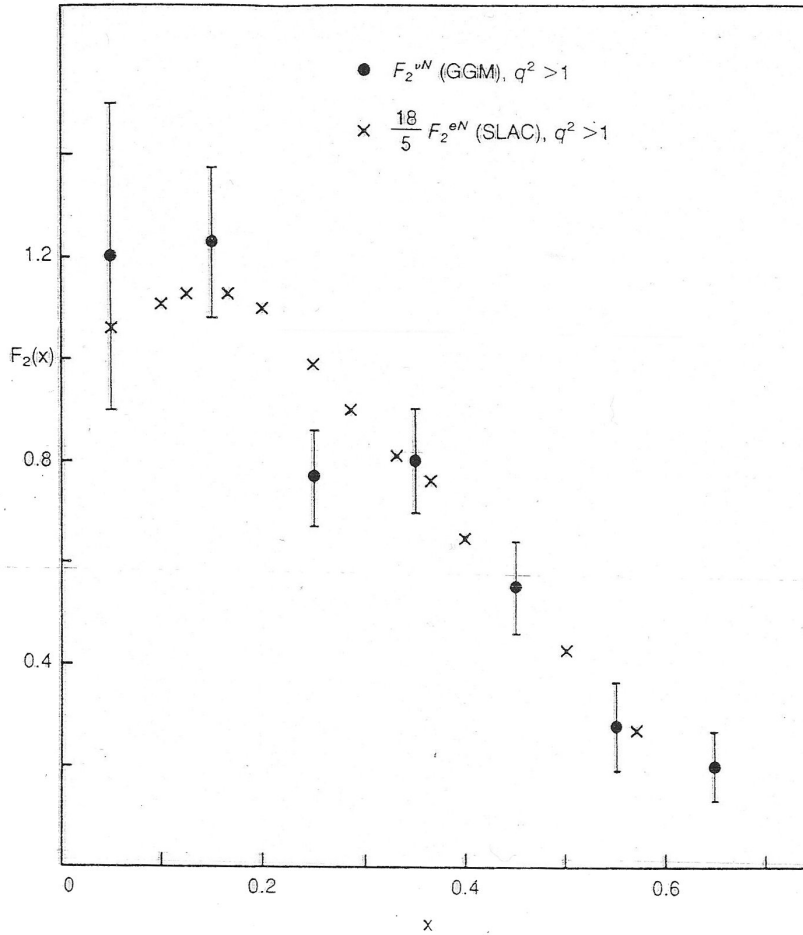


Abbildung 1.2: Erster Vergleich von $F_2^{\nu N}$, gemessen in der Neutrino-Nukleon-Streuung am PS-Neutrinostrahl des CERN mit der Gargamelle-Blasenkammer, die eine spezielle dichte Flüssigkeit verwendete, mit SLAC-Resultaten zu F_2^{eN} aus der Elektron-Nukleon-Streuung. Die Daten überstreichen etwa gleiche Bereiche in q^2 . Die beiden Messergebnisse stimmen überein, wenn die in der Elektron-Streuung erhaltenen Werte mit $\frac{18}{5}$, d.h. dem inversen der mittleren quadratischen Ladung der u- und d-Quarks, multipliziert werden. Dies bestätigt die Annahme drittelzahliger Ladungen für die Quarks. Man beachte, dass die Gesamtfläche unter den Kurven, die dem insgesamt von den Quarks getragenen Impulsbruchteil des Nukleon entspricht, etwa 0,5 ist. Die fehlende Masse wird gluonischen Komponenten zugeschrieben, die als Träger der zwischen den Quarks wirkenden Farbkraft postuliert wurden.

Zusammenfassung: Tiefinelastische Lepton-Nukleonstreuung

1. Nukleonen bestehen aus punktförmigen Konstituenten. $F_2 \sim \text{const. in } Q^2$.
2. Die Konstituenten haben Spin-1/2. $F_2 = 2xF_1$.
3. Elektromagnetischer und schwacher Wirkungsquerschnitt sind konsistent mit Quarkmodell.

$$F_2^{\nu N} = \frac{18}{5} \cdot F_2^{eN}$$

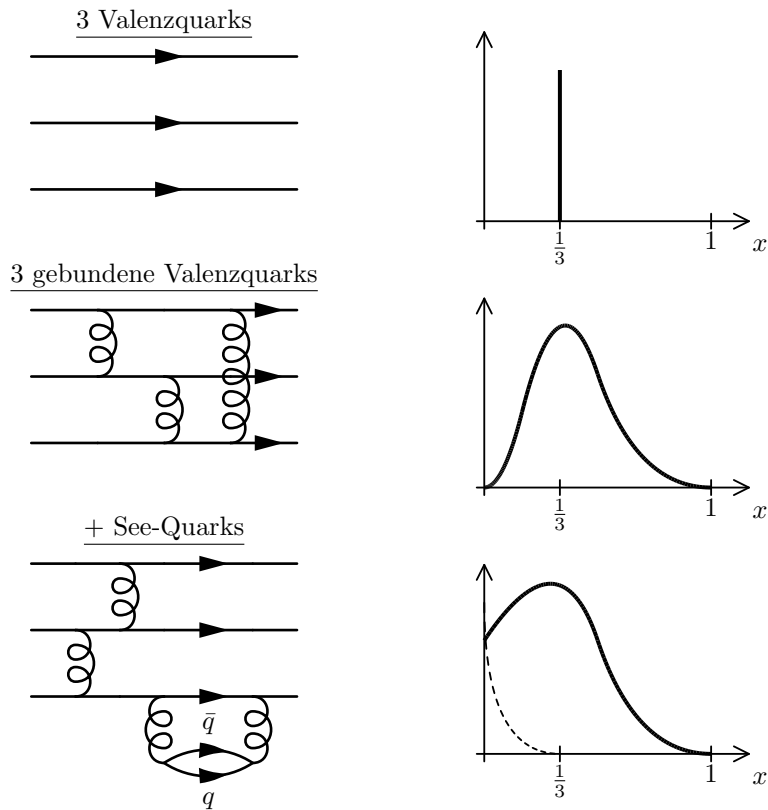
(Ladung $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$)

4. Gluonen kommen für $\sim 50\%$ der Nukleonenmasse auf. Sie vermitteln die Bindung zwischen den Quarks.
5. Es existieren $q\bar{q}$ -Paare (See-Quarks) mit „weicher“ Impulsverteilung. Es existieren 3 Valenzquarks.

1.5 Antiquarks im Nukleon

Nachweis von Antiquarks im Nukleon durch Neutrinostrahlung.

Virtuelle Quark-Antiquarkpaare: „See“-Quarks. Schematische Darstellung der Strukturfunktion: Proton besteht aus:



Kapitel 2

Quantenchromodynamik (QCD)

2.1 Tiefinelastische Streuung im Parton-Bild (theoretische Zusammenfassung)

Quark-Parton-Modell

Bei großen Impulsüberträgen $Q^2 \gtrsim (2 \text{ GeV})^2$ erfolgt die Streuung von Elektronen (Positronen, Neutrinos) an punktförmigen freien Konstituenten des Protons/Neutrons: den Partonen. Partonen = Quarks: Dirac-Teilchen, Spin: $\frac{1}{2}$, Ladung $Q = +\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

u	c	t	Ladung $Q = +\frac{2}{3}$
d	s	b	Ladung $Q = -\frac{1}{3}$
1. Generation	2. Gen.	3. Gen.	

Proton: $\underbrace{uud}_{\text{Valenzquarks}} + \underbrace{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} + \dots}_{\text{Seequarks}}$

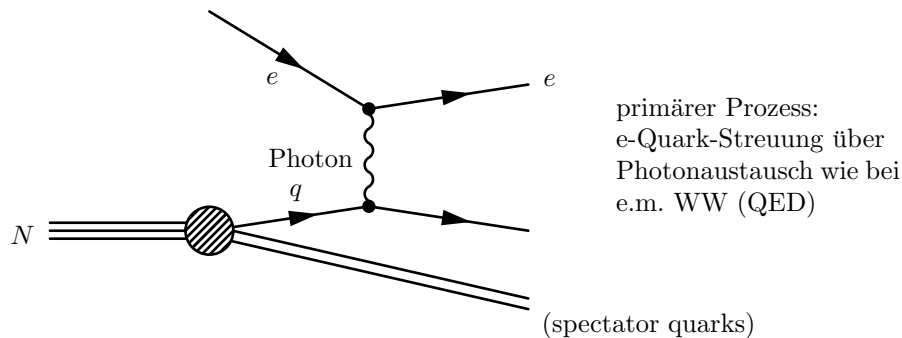
Neutron: $d\bar{d} + u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} + \dots$

Antiproton: $(\bar{u}\bar{u}\bar{d}) + \text{Seequarks}$

wobei \bar{u}, \bar{d}, \dots : Antiquarks

Tiefinelastische e-N-Streuung

$N = p, n$: Proton oder Neutron.

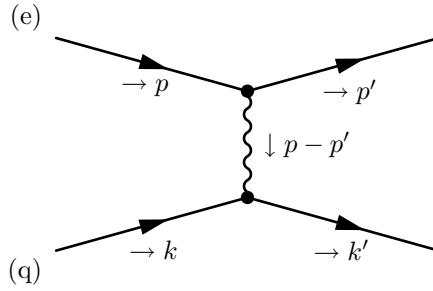


Struktur des WQ:

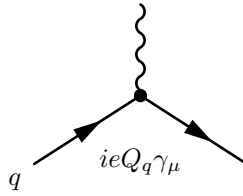
$$d\sigma^{eN} = \sum_{q=u,d,\dots} d\sigma^{eq} \cdot [\text{Wahrsch. f\u00fcr } q \text{ in } N]$$

e-Quark-Streuung: Parton-Prozess

Matrixelement \mathcal{M} aus Feynman Regeln (\rightarrow Kap. 11)



e.m. Vertex f\u00fcr Quarks:



$$\mathcal{M} = \bar{u}_{\sigma'}(p') ie\gamma_\mu u_\sigma(p) \left(\frac{-iq^{\mu\nu}}{(p-p')^2 + i\epsilon} \right) \bar{U}_{\lambda'}(q') ieQ_q \gamma_\nu U_\lambda(q)$$

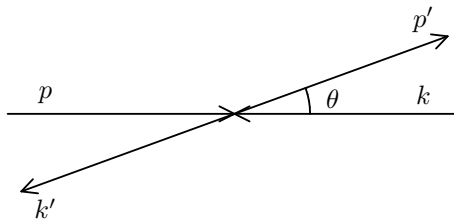
wobei σ, σ' die Helizit\u00e4ten von e und λ, λ' die von q sind.

$$\mathcal{M} = +i \frac{e^2 Q_q}{(p-p')^2} (\bar{u}' \gamma_\nu u) (U' \gamma^\mu U)$$

Alle Teilchen k\u00f6nnen als masselos angenommen werden.
2-T-WQ f\u00fcr $m = 0$ im CMS:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}|^2}$$

mit $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$



- Invariante Variable (Mandelstam-Variable)

$$s = (p+k)^2 = 2pk = (p'+k')^2 = 2p'k' \equiv (p^0+k^0)_{\text{CMS}}^2$$

$$t = (p - p')^2 = -2pp' = (k - k')^2 = -2kk'$$

$$u = (p - k')^2 = (k - p')^2 = -2pk' = -2kp'$$

$$\boxed{s + u + t = 0}$$

wegen $p + k = p' + k'$. WQ durch invariante Variable ausdrücken \Rightarrow Unabhängigkeit vom Bezugssystem.

$$d\Omega = d\phi d \cos \theta \xrightarrow[\text{integrieren}]{\text{über } \phi} 2\pi d \cos \theta$$

$$t = -2p^0 p'^0 (1 - \cos \theta) = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) = -\frac{s}{2} + \frac{s}{2} \cos \theta$$

$$dt = \frac{s}{2} d \cos \theta, \quad d \cos \theta = \frac{2}{s} dt, \quad d\Omega = \frac{4\pi}{s} dt,$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = \frac{4\pi}{s} \frac{d\sigma}{d\Omega}}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2} |\overline{\mathcal{M}}|^2}$$

\rightarrow unpolarisierter Wirkungsquerschnitt

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \sum_{\lambda, \lambda'} |\mathcal{M}|^2$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4 Q_q^2}{t^2} \cdot \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{\sigma, \sigma'} (u'_\sigma \gamma_\mu u_\sigma \bar{u}_\sigma \gamma_\nu)}_{\text{Tr}(\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu)} \cdot \underbrace{\sum_{\lambda, \lambda'} (\bar{U}'_{\lambda'} \gamma^\mu U'_\lambda U_\lambda \gamma^\nu U_{\lambda'})}_{\text{Tr}(\not{q}' \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu)}$$

$$= \frac{e^4 Q_q^2}{t^2} \cdot 2(s^2 + u^2)$$

gleiches Ergebnis für Antiquarks: $q = u, d, \dots, \bar{u}, \bar{d}, \dots$

$$\frac{d\sigma^{eq}}{dt} = \underbrace{\frac{e^4}{16\pi^2}}_{\alpha^2} \cdot \frac{\pi}{s^2 t^2} \cdot 2(s^2 + u^2) \cdot Q_q^2 = \frac{2\pi\alpha^2}{t^2} \cdot \frac{s^2 + u^2}{s^2} \cdot Q_q^2$$

- übliche Variable: $Q^2 = -t$ ($Q^2 > 0$) mit $u = -s - t = -s + Q^2$

$$\boxed{\frac{d\sigma^{eq}}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \left[1 + \left(1 - \frac{Q^2}{s} \right)^2 \right] \cdot Q_q^2}$$

- neue Variable: $y = \frac{Q^2}{s}$, $dQ^2 = s dy$

$$\boxed{\frac{d\sigma^{eq}}{dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \cdot \frac{1 + (1 - y)^2}{y^2} \cdot Q_q^2}$$

Jetzt vom Parton-Prozess zum Nukleon-Prozess:

- Bezugssystem, worin Protonimpuls $\gg M_N$, daher $M_p = 0$ (z. B. e-N-CMS)
Quark q hat Impuls $k = xP$, $0 < x < 1$

$$(p + P)^2 = S [= (p^0 + P^0)^2 \text{ im e-N-CMS }] = 2p \cdot P$$

S ist eine feste Größe

- $s = (p + k)^2 = 2k \cdot p = x \cdot 2pP = xS$
- Quarkverteilungsfunktionen $q^N(x)$ (Quark-Dichten):
 $q^N(x)dx$: Wahrscheinlichkeit für Quarksorte q im Nukleon N mit Impulsanteil zwischen x und $x + dx$.

$$\frac{d\sigma^{eq}}{dy} q^N(x) dx = \frac{2\pi\alpha^2}{S} \cdot \frac{1 + (1 - y)^2}{y^2} \cdot \frac{1}{x} Q_q^2 \cdot q^N(x) dx$$

$$\underbrace{\sum_{q=u,d,\dots} \frac{d\sigma^{eq}}{dy} q^N(x) dx}_{= \frac{d^2\sigma^{eN}}{dydx}} = \underbrace{\frac{2\pi\alpha^2}{S} \cdot \frac{1 + (1 - y)^2}{y^2} \cdot \frac{1}{x} \sum_q Q_q^2 q^N(x) dx}_{= (\dots)}$$

Mit $Q^2 = xyS$

$$\frac{d^2\sigma^{eN}}{dydx} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \cdot S \cdot [1 + (1 - y)^2] \cdot x \sum_q Q_q^2 q^N(x) \quad (\mathbf{A})$$

Mit Strukturfunktionen $W_1(\nu, Q^2)$, $W_2(\nu, Q^2)$ parametrisierter WQ, invariant geschrieben:

$$\frac{d^2\sigma^{eN}}{dydx} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \cdot S \cdot [2xy^2W_1 + 2(1 - y)\nu W_x]$$

Variable: $\nu = P \cdot (p - p') = \frac{Q^2}{2x} = \frac{y}{2} S [= M(E - E') \text{ im N-Ruhsystem}]^1$
empirisch:

Scaling: $W_1(\nu, Q^2) = F_1\left(\frac{Q^2}{2\nu}\right) = F_1(x)$
 $\nu W_2(\nu, Q^2) = F_2\left(\frac{Q^2}{2\nu}\right) = F_2(x)$

$$\Rightarrow \frac{d^2\sigma^{eN}}{dydx} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} S [2xy^2 F_1^N(x) + 2(1 - y) F_2^N(x)] \quad (\mathbf{B})$$

Vergleich von **(A)** und **(B)** ergibt die Darstellung der Strukturfunktionen durch die Quarkverteilungen:

$$F_2^N(x) = 2xF_1^N(x)$$

$$F_2^N(x) = x \sum_q Q_q^2 q^N(x)$$

¹ $P = \frac{1}{x}k$, $P \cdot (p - p') = \frac{1}{2x}(2kp - 2kp') = \frac{1}{2x}(s + u) = \frac{-t}{2x} = \frac{Q^2}{2x}$

Dies nennt man die **Callan-Groß-Beziehung**.

Bezeichnung: $u^p(x) \equiv u(x)$, $d^p(x) \equiv d(x)$

$$\frac{1}{x} F_2^p = \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [s(x) + \bar{s}(x)] \dots$$

Für Neutron: $d^n = u^p$, $d^p = u^n$

$$\frac{1}{x} F_2^n = \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \dots \text{(See, symm.)}$$

$$F_2^{n+p} = \frac{1}{2} (F_2^p + F_2^n) = \frac{5}{18} x [u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x)] + \dots \text{(See vernachl.)}$$

$$\int_0^1 dx x [u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x)] =$$

Erwartungswert der Summe alle Quarkimpulse im Nukleon = Nukleon-Impuls (?)

Experiment: $0,54 \pm 0,4 \Rightarrow$ Defizit von ca. 50%

+ Quark-Parton Modell ergibt

(i) tief-inelastischen WQ, Q^2 -Unabhängigkeit der Strukturfunktionen

(ii) Interpretation der Scaling-Variable $x = \frac{Q^2}{2M_N \nu}$ mit $\nu = E' - E$

(im Ruhesystem des Nukleons)

als Quarkimpuls im Nukleon (in Einheiten des N-Impulses)

- unbeantwortete Fragen:

(i) Wo ist der fehlende Impuls?

(ii) Wo bleibt die starke WW? Warum vernachlässigbar?

(iii) Genaue Messungen ergeben schwache Q^2 -Abhängigkeit der Strukturfunktionen: $F_i(x, Q^2)$

Scaling-Violation

\rightarrow insbesondere Ergebnisse von HERA

Diese Fragen werden beantwortet: von der QCD.

\rightarrow asymptotische Freiheit

$\rightarrow q(x, Q^2) \Rightarrow F_i(x, Q^2)$

2.2 Eichtheorien

2.2.1 Lagrange-Formalismus für Felder

bisher (QED): WW beschrieben durch Hamilton-Operator $H_{int} = \int d^3x \mathcal{H}_{int}$

statt dessen: Lagrange-Funktion $L = \int d^3x \mathcal{L}$, mit \mathcal{L} : Lagrangedichte

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt L = \int \underbrace{d^4x}_{inv.} \underbrace{\mathcal{L}}_{inv.}$$

Dies ist die Wirkung. Dabei ist \mathcal{L} eine Lorentzinvariante Größe. $\delta S = 0 \Rightarrow$ Bewegungsgleichungen, kovariant.

Gründe für Lagrange-Funktion/Dichte als dynamische Grundgröße:

- liefert Bewegungsgleichungen nach einem universellen Prinzip
- Lorentz-Invarianz ist manifestiert
- weitere Eigenschaften von \mathcal{L} haben wichtige physikalische Konsequenzen, z. B. Noether-Theorem. Hier besonders: innere Symmetrien (keine Raum-Zeit-Symmetrien)

Mechanik:

$$L = L(q_k, \dot{q}_k) \xrightarrow{\delta S=0} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{Bewegungsgleichungen}$$

Feldtheorie:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$$

(statt k: kontinuierlicher Index x)

$$\delta S = 0 \Rightarrow \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \text{Bewegungsgleichungen}$$

Falls mehrere Felder $\phi_j(x)$
(auch Komponenten von Vektorfeldern, Spinorfeldern)

$$\phi_j = A_\mu, \psi_a \quad (a = 1, \dots, 4, \bar{\psi}_a, \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \bar{\psi} = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*))$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_j)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} = 0 \quad \text{Bewegungsgleichungen}$$

Beispiele:

a) Skalarfeld: $\phi(x), \phi^\dagger(x)$ (klassisch oder quantisiert)

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$$

mit $\phi_i = \phi, \phi^\dagger$

$$\partial_\mu \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)}}_{\partial^\mu \phi} \right) - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\dagger}}_{-m^2 \phi} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

b) Spinorfeld: $\psi, \bar{\psi}$ bzw. $\psi_a, \bar{\psi}_a$ ($a = 1, \dots, 4$)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \sum_{a,b} \bar{\psi}_a [i\gamma_{ab}^\mu \partial_\mu - m\delta_{ab}] \psi_b$$

$$\partial_\mu \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_a)}}_{=0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_a} = 0$$

$$\sum_b (i\gamma_{ab}^\mu \partial_\mu - m\delta_{ab}) \psi_b = 0$$

Dirac-Gleichung:

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0}$$

c) Photonfeld: A_μ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow [+ \text{Lorentz-Eichung } \partial_\mu A^\mu = 0]$$

$$\partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right]}_{\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu)} = 0$$

Maxwell-Gleichungen für freies Photon-Feld:

$$\boxed{\square A^\nu = 0}$$

2.2.2 QED als Eichtheorie

Felder: Fermion-Feld $\psi, \bar{\psi}$ (Dirac-Feld); Photon-Feld A_μ
 Freies Dirac-Feld hat Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

Formale Symmetrie: $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \alpha \in \mathbb{R}$

Globale Eichtransformation

Abelsche Gruppe: $U(1)$. Da $\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi} \Rightarrow \mathcal{L}_0$ ist invariant.²

Lokale Eichtransformationen

$\psi(x) \rightarrow \underbrace{e^{i\alpha(x)}}_{U(x)} \psi(x)$, $\alpha(x)$ reelle Funktion (beliebig). \mathcal{L}_0 nicht symmetrisch, da

$$\partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi(x)) \neq e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x)$$

Invarianz wird erreicht durch Ersetzen der kovarianten Ableitung

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

²ergibt $\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \Rightarrow Q = \int d^3x j^0$ Erhaltungsgröße

unter der gleichzeitigen Transformation

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \equiv U(x)\psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}$$

Gruppe der Eichtransformationen: **Eichgruppe**

Grundlegende Eigenschaft:

$$\mathcal{D}'_\mu\psi'(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu\psi(x) \quad (\mathcal{D}'_\mu = \partial_\mu - ieA'_\mu)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{L}'_0 &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\mathcal{D}'_\mu - m)\psi' = \\ &= \bar{u}\psi[i\gamma^\mu \underbrace{\mathcal{D}'_\mu\psi'}_{U\mathcal{D}_\mu\psi} - mU\psi] = \\ &= \bar{\psi} \underbrace{U^\dagger U}_{=1} [i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m]\psi = \mathcal{L}_0\end{aligned}$$

Forderung nach lokaler Eichinvarianz \Rightarrow Existenz eines Vektorfeldes A_μ mit Kopplung an ψ -Feld:

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_0 + e \underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{=j^\mu} A_\mu \equiv ej^\mu A_\mu$$

mit e : Kopplungskonstante, A_μ wird ein **dynamisches Feld** durch

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathcal{L} + \mathcal{L}_A}_{=L_{\text{QED}} \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_A + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{int}}}_{ej^\mu A_\mu}}, \quad \mathcal{L}_A &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Legendre-Transformation $\mathcal{L}_{\text{int}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}} \Rightarrow$ weiter wie bisher (Vertices, ...)

$\mathcal{L}_0 \rightarrow$ freie Dirac-Gleichung

$\mathcal{L}_A \rightarrow$ freie Wellengleichung. $\square A_\mu = 0$

\rightarrow Propagatoren für die freien Felder \rightarrow Feynman-Regeln

Zusammenfassung:

- (i) Symmetrie von \mathcal{L}_0 global
- (ii) lokale Symmetrie durch $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$ mit $\mathcal{D}'_\mu U = U\mathcal{D}_\mu$ führt ein Feld A_μ ein mit WW $\sim \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$
- (iii) A_μ dynamisch durch $+\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

Beispiel einer inneren Symmetrie [\equiv keine Raum-Zeit-Symmetrie] und gleichzeitiger Transformation

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow U(x)\psi(x) = e^{e\alpha(x)}\psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu\end{aligned}$$

2.2.3 Nicht-Abelsche Eichtheorien

Verallgemeinerung: „Phasen“-Transformationen, die nicht kommutieren.

$\psi \rightarrow \psi' = U\psi$ mit $U_1U_2 \neq U_2U_1$, erfordert Matrizen, d.h. ψ ist ein Multiplet:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad U : n \times n\text{-Matrix}$$

(i) Globale Symmetrie:

Ausgangspunkt:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

mit $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n) = (\psi_1\gamma^0, \dots, \psi_n\gamma^0)$

Betrachte unitäre U : $U^\dagger = U^{-1}$. $\psi' = U\psi$, $\bar{\psi}' = \bar{\psi}U^\dagger = \bar{\psi}U^{-1}$,

$((\psi')^\dagger = \psi^\dagger U^\dagger, \bar{\psi}' = \psi^\dagger U^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 U^\dagger = \bar{\psi}U^\dagger)$

$\Rightarrow \bar{\psi}'\psi'$, $\bar{\psi}'\gamma^\mu \partial_\mu \psi'$ invariant, wenn U von x unabhängig ist.

$\Rightarrow \mathcal{L}_0$ ist invariant unter $\psi \rightarrow U\psi$ U : globale Eichtransformation. Gilt

analog für Skalarfeld-Multiplet:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad \phi^\dagger = (\phi_1^\dagger, \dots, \phi_n^\dagger)$$

$\phi \rightarrow \phi' = U\phi$, $(\phi')^\dagger = (U\phi)^\dagger = \phi^\dagger U^\dagger = \phi^\dagger U^{-1} \Rightarrow \phi^\dagger \phi$, $(\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi)$ invariant.

$$\boxed{\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi}$$

Physikalisch relevant: Spezielle unitäre $n \times n$ -Matrizen ($\det U = 1$): Gruppe $SU(n)$

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} SU(2): & \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi_e \end{pmatrix} \quad \text{schwacher Isospin} \\ SU(3): & \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad \text{Colour, } \psi: \text{Quarkfeld} \end{array}$$

allgemein: $SU(n)$:

Matrizen U können geschrieben werden als

$$U = e^{i\Theta_a T_a} \equiv U(\Theta_1, \dots, \Theta_N) \quad (\text{Summe über } a)$$

mit $\Theta_1, \dots, \Theta_N \in \mathbb{R}$: reelle Parameter

und T_1, \dots, T_N : $n \times n$ -Matrizen, $T_a^\dagger = T_a$, „Generatoren“. Θ_a infinitesimal:

$$U \simeq 1 + i\Theta_a T_a (+\mathcal{O}(\Theta^2))$$

$$\boxed{\text{Unitarität } + \det = 1 \Rightarrow N = n^2 - 1}$$

N-dimensionale **Lie-Gruppe**

$$\begin{aligned} n = 2: & \quad N = 4 - 1 = 3 \\ n = 3: & \quad N = 9 - 1 = 8 \end{aligned}$$

Kommutator: $[T_a, T_b] \neq 0$, da nicht-abelsch.

$$\boxed{[T_a, T_b] = if_{abc}T_c} \quad \text{Lie-Algebra}$$

$f_{abc} \in \mathbb{R}$: Struktur-Konstanten:

$f_{abc} = -f_{bac} = -f_{acb} \dots$ antisymmetrisch.

$SU(2)$: $f_{abc} = \epsilon_{abc}$ ($\hat{=}$ Drehimpuls-Algebra)

$$T_a = \frac{1}{2}\sigma_a, \sigma_a \quad (a = 1, 2, 3) \quad \text{Pauli-Matrizen}$$

$SU(3)$: $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ ($a = 1, \dots, 8$), mit λ_a : Gell-Mann-Matrizen

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \left(\begin{array}{c|c} \sigma_a & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad (a = 1, 2, 3), \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma_1 \end{array} \right), \quad \lambda_7 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma_2 \end{array} \right), \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Normierung: } \text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}}$$

(ii) Lokale Transformationen:

$\Theta_a = \Theta_a(x)$, $a = 1, \dots, N$ reelle Funktionen. $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x)$

$$U = e^{i\Theta_a(x)T_a = U(\Theta_1(x) \dots \Theta_N(x)) \equiv U(x)}$$

$\partial_\mu \psi'(x) \neq U(x)\partial_\mu \psi(x) \Rightarrow$ keine Symmetrie von \mathcal{L}_0 unter $\psi \rightarrow U(x)\psi$
Lokale Symmetrie kann erreicht werden durch **kovariante Ableitung**:

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$$

wobei gefordert wird:

$$\boxed{\mathcal{D}'_\mu \psi'(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu \psi(x)}$$

$\Rightarrow \bar{\psi} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi$ und $(\mathcal{D}_\mu \phi^\dagger)(D^\mu \phi)$ sind invariant.

Ansatz:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig\mathcal{W}_\mu(x)$$

g : Konstante. $\mathcal{W}_\mu(x)$: $n \times n$ -Matrix, entwickeln nach T_a : $\mathcal{W}_\mu(x) = T_a W_\mu^a(x)$
 mit N Vektorfeldern: W_μ^a , ($a = 1, \dots, N$): **Eichfelder**
 Bedingung:

$$\boxed{\mathcal{D}'_\mu \psi'(x) = U(x)\mathcal{D}_\mu \psi(x)}$$

mit $\mathcal{D}'_\mu = \partial_\mu - ig\mathcal{W}'_\mu$. Zu klären bleibt: Was ist \mathcal{W}'_μ ?

$$(\partial_\mu - ig\mathcal{W}')U\psi = U(\partial_\mu - ig\mathcal{W}_\mu)\psi \quad \forall \psi$$

$$\boxed{\mathcal{W}'_\mu = U\mathcal{W}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}} \quad (*)$$

Lokale nicht-abelsche Eichtransformation:

$$\boxed{\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = U\psi \\ \mathcal{W}_\mu &\rightarrow \mathcal{W}'_\mu = U\mathcal{W}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \end{aligned}}$$

Eichgruppe: Gruppe der Eichtransformationen
 Eichinvarianz: Invarianz unter Eichtransformationen

infinitesimal: $U = 1 + iT_a \Theta_a \mp \mathcal{O}(\Theta^2)$

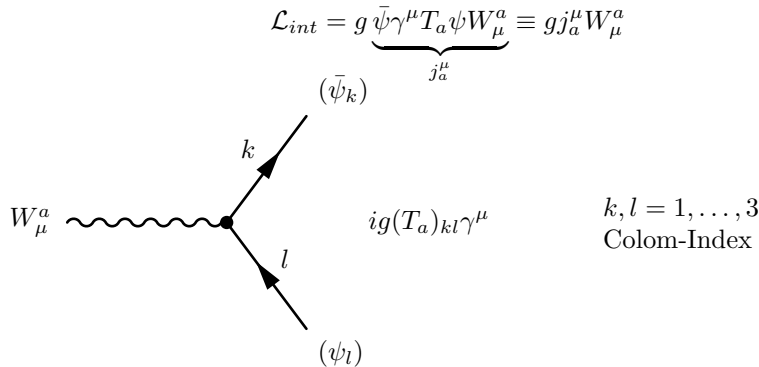
$$(*) \Rightarrow W_\mu'^a = W_\mu^a + \underbrace{\frac{1}{g}\partial_\mu \Theta_a}_{\substack{\text{analog} \\ \text{abelscher} \\ \text{Fall}}} + \underbrace{f_{abc}W_\mu^b \Theta_c}_{\substack{\text{neuer nicht-} \\ \text{abelscher} \\ \text{Term}}}$$

Substitution $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$ im \mathcal{L}_0 induziert Wechselwirkung:

Spin $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ \rightarrow \bar{\psi}i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig\mathcal{W}_\mu)\psi &= \mathcal{L}_0 + \underbrace{ig\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{W}_\mu \psi}_{=\mathcal{L}_{int}} \end{aligned}$$

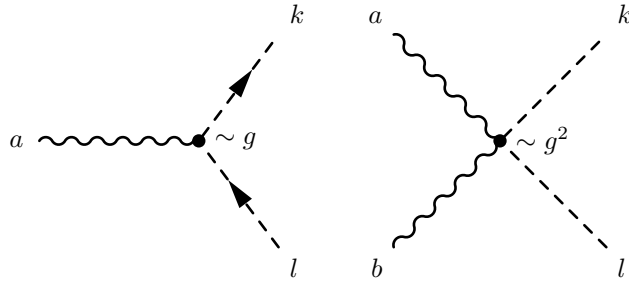
N Ströme:



$$j_a^\mu = \sum_{k,l} (\bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_l) (T_a)_{kl} = (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n) (T_a) \gamma^\mu \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

Spin 0

$$(\mathcal{D}_\mu \phi^\dagger)(\mathcal{D}^\mu \phi) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$



(iii) Dynamik der W-Felder:

Zusätzlicher Term \mathcal{L}_W (eichinvariant!) \rightarrow Dynamik der W-Felder (Bewegungsgleichung, Propagatoren)

$$\sum_a (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)^2 \quad : \text{ nicht eichinvariant}$$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz:} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \mathcal{D}_\mu \mathcal{W}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{W}_\mu = \\ &= \partial_\mu \mathcal{W}_\nu - \partial_\nu \mathcal{W}_\mu - ig[\mathcal{W}_\mu, \mathcal{W}_\nu] = \\ &= \frac{i}{g} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \equiv \\ &\equiv F_{\mu\nu}^a T_a \end{aligned}$$

$$\text{Eichtransformation: } \mathcal{W}_\mu \rightarrow \mathcal{W}'_\mu, \quad \mathcal{D}_\mu \rightarrow \mathcal{D}'_\mu$$

$$\mathcal{D}'_\mu \mathcal{D}'_\nu = \mathcal{D}'_\mu U U^{-1} \mathcal{D}'_\nu = U \mathcal{D}_\mu U^{-1} (U \mathcal{D}_\nu U^{-1}) = U (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu) U^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{F}'_{\mu\nu} = U \mathcal{F}_{\mu\nu} U^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Tr}(\mathcal{F}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}) &\rightarrow \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu'} \mathcal{F}'^{\mu\nu}) = \\ &= \text{Tr}(U \mathcal{F}_{\mu\nu} U^{-1} U \mathcal{F}^{\mu\nu} U^{-1}) = \text{Tr}(U \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} U^{-1}) = \\ &= \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) \quad \text{invariant} \end{aligned}$$

Daher kann man ansetzen:

$$\boxed{\mathcal{L}_W = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} \sum_a \mathcal{F}_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}}$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf_{abc}W_\mu^b W_\nu^c$$

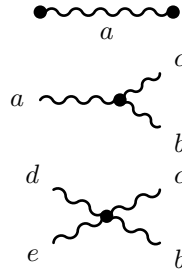
benutzt wurde die Normierung:

$$\boxed{Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}}$$

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}gf_{abc}(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)W^{b,\mu}W^{c,\nu} -$$

$$-\frac{1}{4}g^2 f_{abc}f_{ade}W_\mu^b W_\nu^c W^{d,\mu}W^{e,\nu}$$



neue Kopplungen: Selbst-Kopplung des Eichfeldes.

Mathematischer Einschub: Darstellung von Gruppen

Gruppe G , $g \in G$ mit $g_1 \circ g_2$ Verknüpfung n -dimensionale Darstellung:

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \text{Matrizen, } n \times n \\ g &\rightarrow D(g) \text{ mit } D(g_1 \circ g_2) = D(g_1)D(g_2) \end{aligned}$$

Beispiel: Drehgruppe $SO(3)$ in 3 Dimensionen

Generatoren: $f_k, [f_k, f_l] = i\epsilon_{klm}f_m$

$D = e^{i\alpha_k f_k}, f_k : (2j + 1) \times (2j + 1)$ -Matrizen mit $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ (gleiche Lie-Algebren wie $SU(2)$)

Speziell für $j = 1$:

3-dimensionale Darstellung, 3 Generatoren \rightarrow **adjungierte Darstellung**

$SU(n)$:

N Generatoren T_1, \dots, T_N mit Vertauschungsrelation

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

m -dimensionale Darstellung: $T_a \rightarrow D(T_a)$ ist $m \times m$ -Matrix mit gleicher Vertauschungsrelation. Falls $m = N$, spricht man von einer **adjungierten Darstellung**. $(T_a)_{bc} = if_{abc}$ in adjungierter Darstellung.

Die **definierende Darstellung** von $SU(n)$ durch $n \times n$ -Matrizen (minimale Darstellung) heißt auch **Fundamental-Darstellung**.

Für die Eichtheorie, basierend auf $SU(2)$ und $SU(3)$ gilt:

- Fermionen in der Fundamentaldarstellung
- Eichbosonen in der adjungierten Darstellung

Ergänzende Bemerkungen

- (i) physikalische Bedeutung der nicht-abelschen Eichtheorien: Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen.


Eichtheorien sind **renormierbar**, d.h. über Born-Approximation hinaus möglich.

Grundsätzliches Problem einer QFT: Schleifendiagramme sind divergente Integrale \Rightarrow „cut-off“ Γ nötig. Physik muß von Γ abhängig sein.

In renormierbaren Theorien: Γ fällt heraus, wenn die Parameter der Theorie durch experimentelle Meßgrößen festgelegt werden. (in der QED: e, m)

$$\text{Meßgrößen} \xrightarrow{\Gamma} \text{Parameter} \xrightarrow{\Gamma} \text{andere Meßgrößen}$$

Vorhersagen, Γ fällt heraus

- (ii) In Schleifendiagrammen mit Bosonlinien, z.B.  gibt es unphysikalische Polarisierungen der W_μ -Bosonen:

$$2 \text{ transversale} + \underbrace{1 \text{ longitudinale} + 1 \text{ zeitartig}}_{\text{unphysikalisch}}$$

in der Eichung mit Propagator $\sim ig_{\mu\nu}/q^2$.

Diese müssen kompensiert werden durch Hilfsfelder, die an die W -Bosonen koppeln.



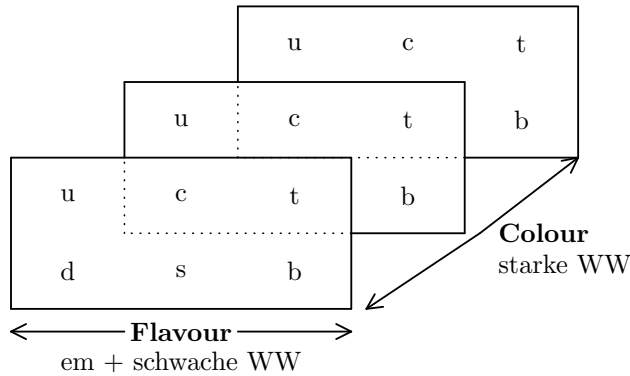
Man nennt diese Hilfsfelder „Geister“ (**Faddeev-Popov-Geister**)

2.3 Formulierung der QCD

Quark-Felder: u, d, s, \dots Dirac-Felder

6 **Flavour**-Freiheitsgrade (Ladung, Generation, ...)

Für jeden Flavour-Freiheitsgrad: Dirac-Feld. Weiterer Freiheitsgrad: **Colour** pro Flavour: 3 Colour-Freiheitsgrade



Pro Flavour: $\psi(x)$ Triplet $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

Jetzt: Nur ein Flavour!

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$$

globale $SU(3)$ Symmetrie, Generatoren: $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$, $a = 1, \dots, 8$ ($N = 8$)

$$U = e^{i\theta_a/2\lambda_a}$$

lokale $SU(3)$ Symmetrie ($\hat{=}$ lokale Eichtransformation) $\theta_a(x)$, $a = 1, \dots, 8$

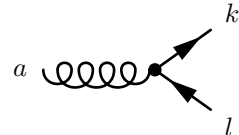
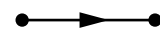
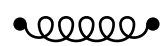
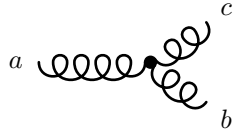
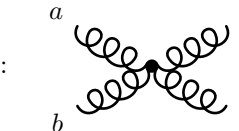
$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu - ig_S \underbrace{T_a}_{W_\mu} W_\mu^a$$

8 Vektorfelder, $W_\mu^a \equiv G_\mu^a$ Gluon-Felder

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\rightarrow \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig_S W_\mu)\psi \\ &= \mathcal{L}_0 + g_S \bar{\psi}\gamma^\mu T_a G_\mu^a \psi \\ &= \mathcal{L}_0 + g_S \underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu T_a \psi}_{=j_\mu^a} G_\mu^a \end{aligned}$$

g_S : Kopplungskonstante der starken WW. Üblicherweise $\alpha_s = \frac{g_S^2}{4\pi}$ „Feinstrukturkonstante“ der starken Wechselwirkung.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \\ \mathcal{D}_\mu &= \partial_\mu - ig \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \end{aligned}$$

- Quark-Gluon-Vertex:  $ig_S(T_a)_{kl}\gamma^\mu$
- Quark-Propagator:  $i \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv \frac{i}{q - m + i\epsilon}$
- Gluon-Propagator:  $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$
- Triple-Gluon-Vertex: 
- Quartic-Gluon-Vertex: 

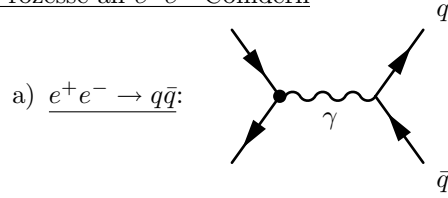
äußere Quarklinien: wie bisher, zusätzlich Colour-Index

äußere Gluon-Linien: ϵ_μ^a wie Photon (transversal), da $m_G = 0$

Damit sind Quark-Gluon-Prozesse beschreibbar (perturbative QCD)!

Beispiele

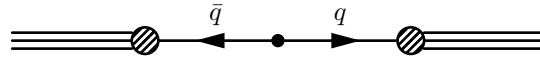
(i) Prozesse an e^+e^- -Collidern



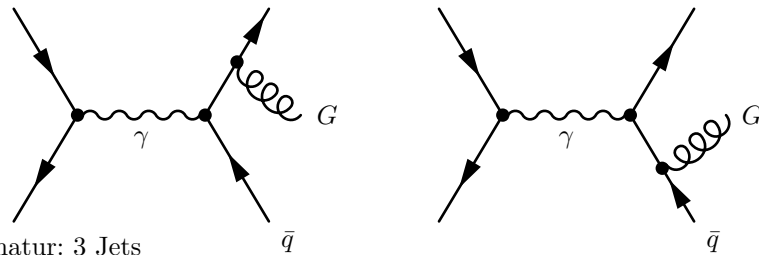
(analog zu $\mu^+\mu^-$) $\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q_q^2 \cdot 3$ (3 Colour!), experimentell gemessen.

$$\sigma_{\text{had}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} 3 \sum_q Q_q^2$$

Quarks \rightarrow Jets aus Hadronen

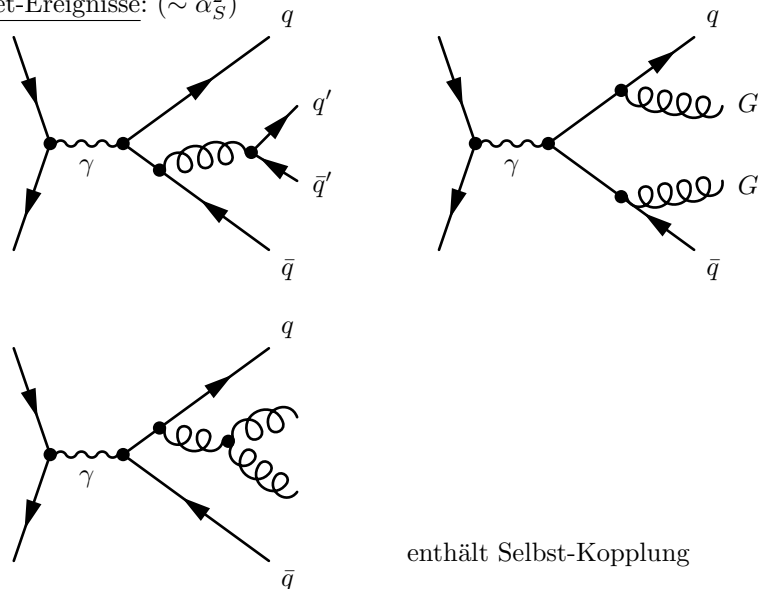


b) Gluon-Abstrahlung: ($\sim \alpha_S$) $_q$



Signatur: 3 Jets
(zuerst bei DESY, e^+e^- -Speicherung PETRA)

c) 4-Jet-Ereignisse: ($\sim \alpha_S^2$)



Verteilungen und Raten \rightarrow Vorhersagen

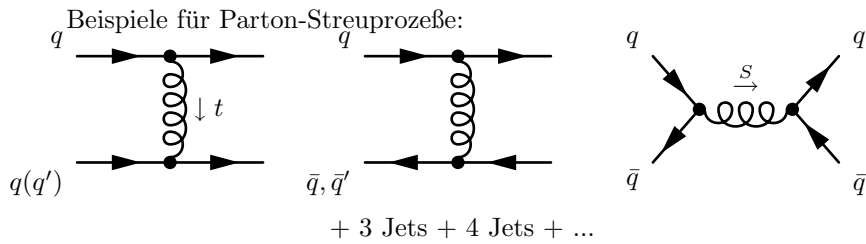
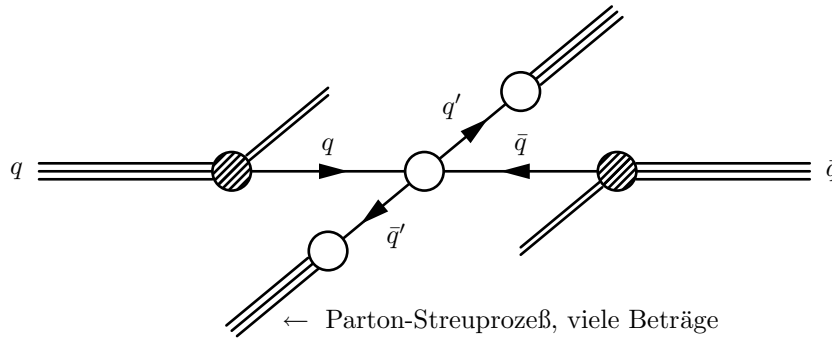
z.B. $\sigma_{4\text{jet}} : \sigma_{3\text{jet}} : \sigma_{2\text{jet}} \Rightarrow \alpha_S \text{ exp.}$

Genaueste α_S Messungen auf der Z-Resonanz (LEP)

$$\alpha_S(M_Z) \approx 0.12 \quad [\alpha_{\text{QED}} = \frac{1}{137} = 0,0073]$$

- (ii) Prozesse an Hadron-Collidern Tevatron: $p\bar{p}$; $\sqrt{S} = 2 \text{ TeV}$
 LHC: $p\text{-}p$; $\sqrt{S} = 14 \text{ TeV}$

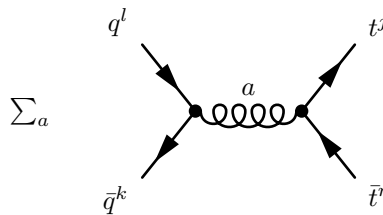
a) Jet-Erzeugung:



b) Top-Quark-Erzeugung am Tevatron:

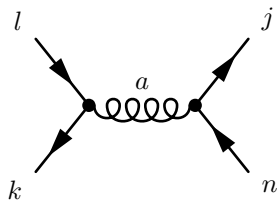
$$m_{\text{top}} \approx 172 \text{ GeV} \quad (172,6 \pm 1,4 \text{ GeV})$$

hauptsächlich:



\mathcal{M} für $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$

$$\mathcal{M} = i \frac{g_S^2}{s} \sum_{a=1}^8 (T_a)_{kl} (T_a)_{jn} (\bar{v} \gamma^\mu u) (\bar{u}' \gamma_\mu v')$$



l, k, j, n :
 Colour der \bar{q}, q
 und $t\bar{t}$

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^* \sim \sum_{a,b} (T_a)_{kl} (T_a)_{jn} \underbrace{(T_b)_{kl}^*}_{(T_b)_{lk}} \underbrace{(T_b)_{jn}^*}_{(T_b)_{nj}}$$

Über j, n Summieren und über k, l Mitteln ergibt:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum_{a,b} \sum_{k,l} \sum_{j,n} (T_a)_{kl} (T_b)_{lk} (T_a)_{jn} (T_b)_{nj} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{a,b} \text{Tr}(T_a T_b) \cdot \text{Tr}(T_a T_b) \\ &= \frac{1}{9} \sum_{a,b} \frac{1}{2} \delta_{ab} \cdot \frac{1}{2} \delta_{ab} = \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{4} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Berechnung des Wirkungsquerschnitts:

$$\sigma_{q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}} = \frac{4\pi\alpha_S^2}{3s} \cdot \frac{2}{9} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right)$$

Um den Wirkungsquerschnitt für $p - \bar{p}$ zu bekommen, muß mit den Quark-Dichten gefaltet werden und über die verschiedenen Quarks summiert werden:

$$\sigma(p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}) = \sum_q \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 [q^p(x_1) \bar{q}^{\bar{p}}(x_2) + (x_1 \leftrightarrow x_2)] \cdot \sigma_{q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}}(x_1 x_2 S)$$

wobei $S = (p + \bar{p})^2$, $s = x_1 x_2 S$

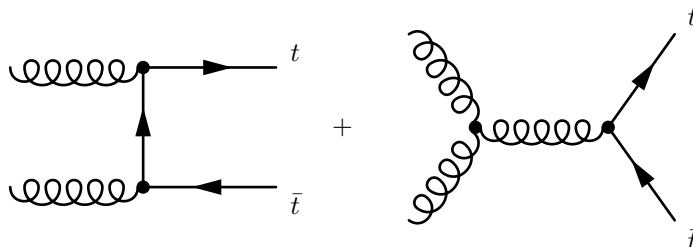
Mit den Variablen $\tau = x_1 x_2$ hat man die Form

$$\sigma(p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}) = \int_{\tau_0}^1 d\tau \frac{d\mathcal{L}}{d\tau}(\tau) \sigma_{q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}}(\tau S)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\tau}(\tau) = \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \sum_q [q^p(x) \bar{q}^{\bar{p}}\left(\frac{\tau}{x}\right) + \bar{q}^p(x) q^{\bar{p}}\left(\frac{\tau}{x}\right)]$$

Dies nennt man die **Parton-Luminosität**.

Anmerkung: Es gibt noch weitere Beiträge aus der Gluon-Fusion



mit der Gluon-Dichte $G(x)$ im Proton.

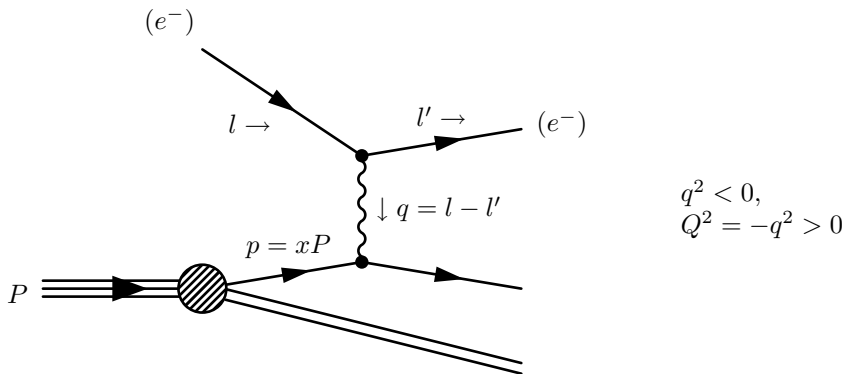
Klein beim Tevatron, dominant beim LHC wegen der höheren Energie $\sqrt{S} = 14$ TeV.

2.4 Scaling-Verletzung und Parton-Verteilung

tief-inelastische Streuung:

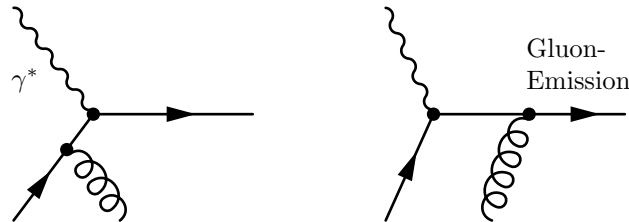
$$\frac{d^2\sigma^{\epsilon P}}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} [1 + (1-y)^2] \frac{F_2(x)}{x} \sim F_2(x) = \underbrace{\sum_q q(x) Q_q^2}_{\text{von } Q^2 \text{ unabh.} \rightarrow \text{Scaling}}$$

Parton-Modell:

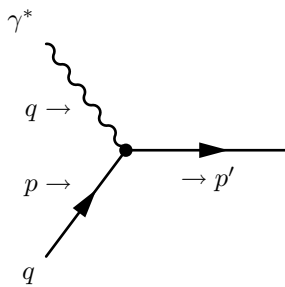


enthält die Streuung des virtuellen Photons γ^* am Quark q mit Impuls $p = xP$.
 $q^2 = -Q^2 \neq 0$: Masse des virtuellen Photons

mit QCD:



WQ für γ^*q , ohne QCD



$$\mathcal{M} = ieQ_q \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \cdot \epsilon_\mu$$

mit ϵ_μ : Polarisationsvektor von γ^* (Polarisationssumme: $\sum_{pol} \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* = -g_{\mu\nu}$)
 und Q_q : Ladung des Quarks q

Spin-Summation:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= -e^2 Q_q^2 \cdot \frac{1}{2} \text{Tr}(\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu) = e^2 Q_q^2 \cdot \text{Tr}(\not{p}' \not{p}) = \\ &= e^2 Q_q^2 \cdot 4(p p') = e^2 Q_q^2 \cdot 2Q^2 \end{aligned}$$

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{10}}{4(pq)} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^3 \cdot \underbrace{2 \delta^4(p' - p - q) \frac{d^3 p'}{2p'^0}}_{\delta^4(p' - p - q) \delta(p'^2) d^4 p'}$$

(alle Quarks wurden als masselos angenommen)
über p' integrieren ergibt:

$$\sigma(\gamma^* q) = \frac{2\pi}{2 \cdot (2pq)} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \cdot \delta((p+q)^2) = \frac{2\pi e^2 Q_q^2}{(2pq)} \cdot Q^2 \cdot \delta(2pq - Q^2)$$

$$\boxed{\sigma(\gamma^* q) = 8\pi^2 \alpha Q_q^2 \delta(2pq - Q^2)}$$

mit $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

WQ für $\gamma^* P$: $p = xP$

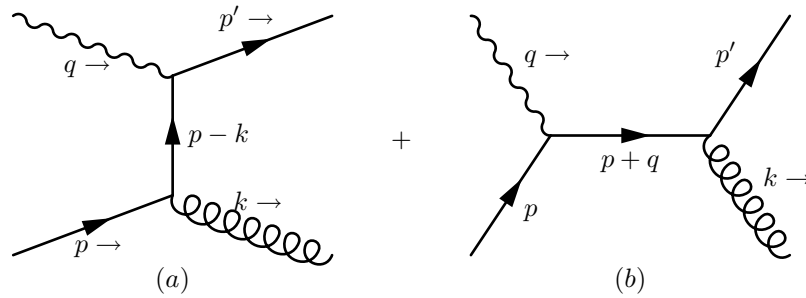
$f(x) \equiv q(x)$ Bezeichnung für die Verteilungsfunktion des Quarks q .

$$\sigma(\gamma^* P) = \int_0^1 dx f(x) \sigma(\gamma^* q) = \int_0^1 dx f(x) \underbrace{\delta(2xqP - Q^2) \cdot 8\pi^2 \alpha Q_q^2}_{\delta(x - \frac{Q^2}{2qP}) \cdot \frac{1}{2qP}}$$

$$\boxed{\sigma(\gamma^* P) = \frac{8\pi^2 \alpha}{2qP} Q_q^2 \cdot f(x), \quad x = \frac{Q^2}{2qP}}$$

Anmerkung: $\frac{F_2(x)}{x} \sim \sum_q Q_q^2 f_q(x) \sim \sigma(\gamma^* P)$

WQ für $\gamma^* q$ mit QCD: $\gamma^* q \rightarrow gq$



(a): Quark im t-Kanal

(b): Quark im s-Kanal

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(a)} + \mathcal{M}_{(b)}$$

(analog zu Compton-Streuung)

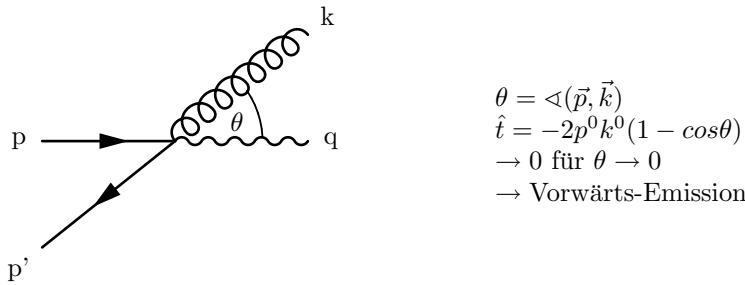
Kinematik

$$\begin{aligned}\hat{s} &= (p + q)^2 = 2pq - Q^2 \\ \hat{t} &= (p - k)^2 = -2pk \\ \hat{u} &= (p - p')^2 = -2pp'\end{aligned}$$

wegen Impuls-Erhaltung ist

$$\boxed{\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = -Q^2}$$

im CMS:



$\mathcal{M}_{(a)}$ enthält den Quarkpropagator $\frac{\not{p}-\not{k}}{(p-k)^2} \sim \frac{1}{\hat{t}}$

$\mathcal{M}_{(b)}$ enthält den Quarkpropagator $\frac{\not{p}+\not{q}}{(p+q)^2} \sim \frac{1}{\hat{s}}$

daher $\mathcal{M}_{(a)} \sim \frac{1}{\hat{t}}$ (wird singularär für $\hat{t} \rightarrow 0$, d.h. $\theta \rightarrow 0$), $\mathcal{M}_{(b)} \sim \frac{1}{\hat{s}}$

Für die Emission von Gluonen in Vorwärtsrichtung (d.h. kleine θ) dominiert

$\mathcal{M}_{(a)}$: **kollineare Emission**

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_{(a)} + \mathcal{M}_{(b)}|^2 \simeq |\mathcal{M}_a|^2 + 2\text{Re}(\mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b)$$

($|\mathcal{M}_b|^2$ kann vernachlässigt werden)

Im Folgenden wird nur die Emission von Gluonen mit kleinen θ betrachtet.

$\hat{t} \ll \hat{s}, |\hat{u}|, Q^2$: $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = -Q^2$

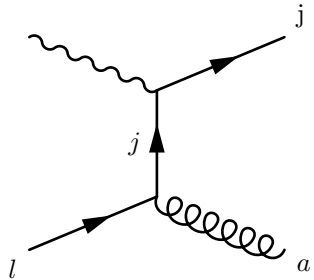
$$\boxed{\hat{s} + \hat{u} \simeq -Q^2}$$

mit $\hat{u} = -(\hat{s} + Q^2)$. Jetzt summieren/mitteln:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} \frac{1}{3} \sum_{\text{Colour}} \overline{|\mathcal{M}|^2}$$

Colour-Summation

(am Beispiel von $|\mathcal{M}_a|^2, \mathcal{M}_b \cdot \mathcal{M}_a^*$ analog)



$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{a,b} &\sim (T_a)_{jl} \\ a &= 1, \dots, 8 \\ j, l &= 1, 2, 3\end{aligned}$$

$$|\mathcal{M}_{(a)}|^2 \sim (T_a)_{jl}(T_a)_{jl}^* = (T_a)_{jl}(T_a)_{lj}$$

über a, j summieren und über l mitteln:

$$\overline{|\mathcal{M}_a|^2} = \frac{1}{3} \sum_{l,j} \sum_a (T_a)_{jl}(T_a)_{lj} = \frac{1}{3} \sum_a \text{Tr}(T_a \cdot T_a) = \frac{1}{3} \sum_a \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{2} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Colour-Faktor} = \frac{4}{3}$$

Die restliche Spin-Summation erfolgt mit den üblichen Techniken der Dirac-Algebra und Spurbildung mit anschließender Kontraktion der 4-Impulse, sowie Ersetzen der Skalarprodukte aus 4-Impulsen durch \hat{s} , \hat{t} , \hat{u} und Q^2 .

Ergebnis:

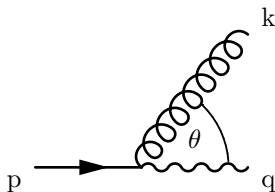
$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \overline{|\mathcal{M}_{(a)}|^2} + 2\text{Re} \overline{\mathcal{M}_{(a)}^* \mathcal{M}_{(b)}} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot Q_q^2 e^2 g_s^2 \cdot 4 \left[-\frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{s}\hat{t}} \right] = \\ &= \frac{4}{3} \cdot Q_q^2 e^2 g_s^2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{-\hat{t}} \right) \left[\hat{s} + \frac{2Q^2(\hat{s} + Q^2)}{\hat{s}} \right] \end{aligned}$$

(verwendet: $\hat{u} = -(\hat{s} + Q^2)$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 4(pq) \cdot 8} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{\alpha\alpha_s Q_q^2}{(2pq)} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(-\hat{t})} \left[\hat{s} + \frac{2Q^2(\hat{s} + Q^2)}{\hat{s}} \right]$$

mit $\frac{e^2}{4\pi} = \alpha$, $\frac{g_s^2}{4\pi} = \alpha_s$

Betrachte k längs p , mit kleinem Transversalimpuls p_T :



$$p_T \equiv |\vec{p}_T| = |\vec{k}| \sin \theta$$

$$|\vec{k}| = k^0 = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}$$

$$p_T^2 = \frac{\hat{s}}{4} \sin^2 \theta$$

$$dp_T^2 = \frac{\hat{s}}{4} \cdot 2 \sin \theta d\theta = \frac{\hat{s}}{2} \sin \theta d\theta$$

$$d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi \cdot \frac{2}{\hat{s}} dp_T^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{dp_T^2} = \frac{4\pi}{\hat{s}} \frac{4\sigma}{d\Omega}$$

ergibt die Darstellung bzgl. der p_T^2 -Verteilung. Aus der Kinematik erhält man wegen $\hat{u} = -(\hat{s} + Q^2)$ bei kleinen $|\hat{t}|$

$$p_T^2 = \frac{\hat{s}\hat{u}}{(\hat{s} + Q^2)^2} \simeq \frac{\hat{s}(-\hat{t})}{\hat{s} + Q^2}$$

die Beziehung

$$p_T^2 = \frac{\hat{s}\hat{t}\hat{u}}{(\hat{s} + Q^2)^2}$$

im CMS: $p^0 + q^0 = \sqrt{\hat{s}}$ und $\vec{p} + \vec{q} = 0$ ($p^2 = 0, q^2 = -Q^2$). Also:

$$\left. \begin{aligned} (q^0)^2 &= (\sqrt{\hat{s}} - p^0)^2 = \hat{s} - 2p^0\sqrt{\hat{s}} + (p^0)^2 \\ &= \vec{q}^2 - Q^2 = \vec{p}^2 - Q^2 = (p^0)^2 - Q^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -Q^2 = \hat{s} - 2p^0\sqrt{\hat{s}}$$

$$p^0 = \frac{\hat{s} + Q^2}{2\sqrt{\hat{s}}}$$

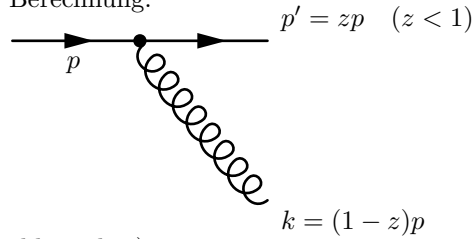
$$\hat{t} = -2k^0p^0(1 - \cos\theta) = -2 \cdot \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \cdot \frac{\hat{s} + Q^2}{2\sqrt{\hat{s}}} (1 - \cos\theta) = -\frac{\hat{s} + Q^2}{2}(1 - \cos\theta)$$

daraus: $1 - \cos\theta = \frac{2(-\hat{t})}{\hat{s} + Q^2}$, $\cos\theta = 1 + \frac{2(+\hat{t})}{\hat{s} + Q^2}$

$$\begin{aligned} \sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta = -\left(\frac{4\hat{t}}{\hat{s} + Q^2} + \frac{4\hat{t}^2}{(\hat{s} + Q^2)^2}\right) = \\ &= -4\hat{t}\frac{\hat{s} + Q^2 + \hat{t}}{(\hat{s} + Q^2)^2} = -4\hat{t}\frac{(-\hat{u})}{(\hat{s} + Q^2)^2} = \\ &= \frac{4\hat{t}\hat{u}}{(\hat{s} + Q^2)^2} \end{aligned}$$

$$p_T^2 = \frac{\hat{s}}{4} \sin^2\theta = \frac{\hat{s}\hat{t}\hat{u}}{(\hat{s} + Q^2)^2}$$

Wegen $\frac{d\sigma}{dp_T^2} \sim \frac{1}{(-\hat{t})} \sim \frac{1}{p_T^2} \cdot \{\dots\}$ hat man eine $\frac{1}{p_T^2}$ Singularität im Wirkungsquerschnitt. Im Folgenden werden nur Terme mitgenommen, die zu dieser $\frac{1}{p_T^2}$ -Singularität beitragen (\equiv dominant für kleine p_T), d.h. im Ausdruck $\{\dots\}$ wird $p_T = 0$ gesetzt zur weiteren Berechnung.



(Impulse kollinear, p_T vernachlässigbar)

$$(p - k + q)^2 = p'^2 = 0 = (p - (1-z)p + q)^2 = (zp + q)^2 = 2zpq - Q^2$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{Q^2}{2pq} = \frac{Q^2}{\hat{s} + Q^2} \\ \hat{s} &= Q^2 \frac{1-z}{z} \quad \hat{s} + Q^2 = \frac{Q^2}{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dp_T^2} &= \frac{4\pi\alpha\alpha_s Q_q^2}{(2pq)} \cdot \frac{4}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{\hat{s}(-t)}}_{\frac{1}{p_T^2} \cdot \frac{1}{\hat{s}+Q^2}} \left[\hat{s} + \frac{2Q^2(\hat{s}Q^2)}{\hat{s}} \right] \\ &= \frac{1}{p_T^2} \cdot \frac{1}{\hat{s}+Q^2} \cdot [\dots] \\ &= \frac{1}{p_T^2} \cdot \frac{1+z^2}{1-z} \\ \frac{d\sigma}{dp_T^2} &= \underbrace{\frac{8\pi^2\alpha Q_q^2}{(2pq)}}_{=: \hat{\sigma}_0} \cdot \frac{1}{p_T^2} \cdot \frac{\alpha_S}{2\pi} \cdot \underbrace{\frac{4}{3} \cdot \frac{1+z^2}{1-z}}_{=: P_{qq}(z)} \end{aligned}$$

Bezeichnung: Quark-Quark **Splitting-Funktion**

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1+z^2}{1-z}$$

$$\frac{d\sigma}{dp_T^2} = \hat{\sigma}_0 \cdot \frac{\alpha_S}{2\pi} P_{qq}(z) \cdot \frac{1}{p_T^2}$$

Integration über $p_T^2 \rightarrow \sigma(\gamma^* q)$

$$\sigma(\gamma^* q) = \int_0^{p_T^2(max)} dp_T^2 \frac{d\sigma}{dp_T^2} \quad \text{divergent}$$

Cut-off μ^2 für untere Grenze:

$(p_T^2)_{min} = \mu^2$ (willkürlich, z. B. m_q , falls Quark, mit kleiner Masse m_q)

$(p_T^2)_{max} = \frac{\hat{s}}{4} \sin^2 \theta|_{max} = \frac{\hat{s}}{4} = Q^2 \cdot \frac{(1-z)}{4z}$

Damit:

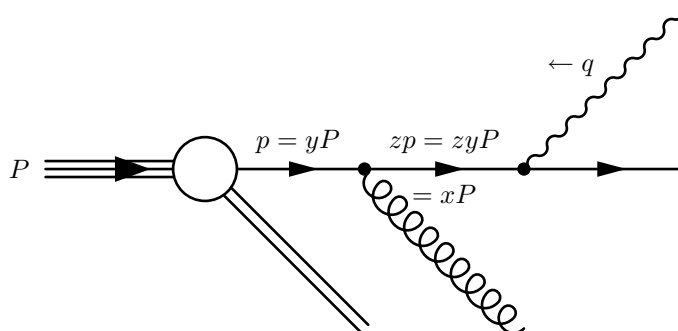
$$\int_{(p_T^2)_{min}}^{(p_T^2)_{max}} \frac{dp_T^2}{p_T^2} = \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \log\left(\frac{1-z}{4z}\right)$$

$$\sigma(\gamma^* q) = \hat{\sigma}_0 \cdot \frac{\alpha_S}{2\pi} P_{qq}(z) \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} + \log \frac{1-z}{4z} \right]$$

P_{qq} : Splitting von Quark $q \rightarrow$ Quark mit Impulsanteil z .

\sim Wahrscheinlichkeit, dass ein Quark mit Impuls zp („Tochter-Quark“) aus einem „Mutter-Quark“ mit Impuls p stammt.

Übergang zum Hadron: $\sigma(\gamma^* P)$



$$\boxed{x = zy, \quad z = \frac{x}{y}}$$

$$2qp = 2qyP = y \cdot 2qP$$

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma^*P) &= \int_x^1 dy f(y) \sigma(\gamma^*q) = \\ &= \int_x^1 dy f(y) \frac{8\pi^2 \alpha Q_q^2}{y \cdot (2qP)} \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \cdot \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots \right] = \\ &= \underbrace{\frac{8\pi^2 \alpha Q_q^2}{(2qP)}}_{\substack{= \sigma_0 \text{ in Näherung} \\ \text{ohne QCD}}} \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots \right] = \\ &= \sigma_0 \cdot \underbrace{\frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots \right] \int_x^1 \frac{dy}{y} f(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)}_{= \Delta f(x, Q^2)} \end{aligned}$$

Faktorisierung: $\underbrace{\sigma_0(\gamma^*P)}_{\substack{\text{große Skala} \\ Q^2, \text{ harter} \\ \text{Prozess,} \\ \text{perturbativ}}} \cdot \underbrace{\Delta f(x, Q^2)}_{\substack{\text{kleine Skala } p_T^2, \\ \text{nicht} \\ \text{perturbativer} \\ \text{Anteil}}}$

Zusammen mit dem Beitrag niedrigster Ordnung:

$$\sigma(\gamma^*P) = \underbrace{\sigma_0}_{\substack{\text{niedrigste} \\ \text{Ordnung}}} \cdot \underbrace{[f(x) + \Delta f(x, Q^2)]}_{= f(x, Q^2)}$$

Effekte der QCD → Modifikation der Parton-Verteilung.

Quark-Verteilung: $q(x, Q^2) \equiv f(x, Q^2)$ (urspr. Notation)

$$q(x, Q^2) = q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} \right] \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)$$

Scaling-Verletzung:

$$\boxed{\Rightarrow F_2 = x \sum_q Q_q^2(x, Q^2) \equiv F_2(x, Q^2)}$$

Experimentelle Bestimmung bei Q_0^2 : $q(x, Q_0^2)$

$$q(x, Q^2) - q(x, Q_0^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \frac{Q^2}{Q_0^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (1)$$

- Vorhersagen für $Q^2 \neq Q_0^2$
- unphysikalische Größe μ^2 fällt heraus

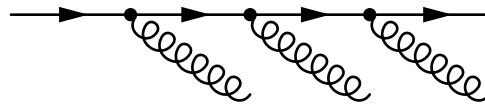
Systematischer Weg: **Evolutions-Gleichungen**

$$\frac{\partial}{\partial Q^2} q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \cdot \frac{1}{Q^2} \cdot \int \dots$$

$$Q^2 \frac{\partial q(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(x, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right)$$

Dies ist die **Altarelli-Parisi-Gleichung**

(1) ist 1. Näherung bei iterativer Lösung mit Anfangsbedingung $q(x, Q_0^2)$. Iterieren \rightarrow Aufsummieren

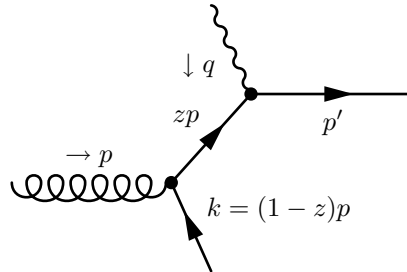


Beachte: ursprüngliche Verteilung $q(x)$ ist nicht messbar, nur $q(x) + \Delta q(x, Q^2)$

Singularität bei kollinearen Emission verschwindet in der exp-Verteilung

$$q(x, Q_0^2) = q(x) + \Delta q(x, Q_0^2)$$

Weiterer Beitrag (von QCD stammend): $\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}$

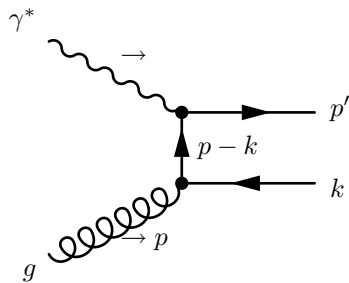


Gluon-Splitting dominiert für kollineare Impulse $\vec{p} \sim \vec{k}$

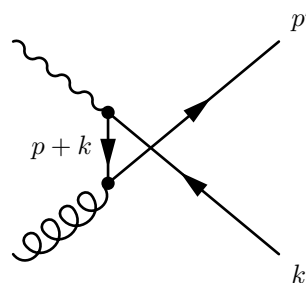
Beschrieben durch die Gluon-Quark Splitting-Funktion $P_{qg}(z)$

(Quark q aus Gluon g, Quarkimpuls z)

Es ergeben sich 2 Graphen:



$$\sim \frac{1}{\hat{t}} = \frac{1}{(p-k)^2} \text{ singularär für } \hat{t} \rightarrow 0$$



$$\sim \frac{1}{(q+k)^2} = \frac{1}{\hat{u}}$$

Analoge Rechnung, nur andere Colour-Summe:

$$\left| a \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} \nearrow j \\ \searrow l \end{array} \right|^2 \rightarrow \frac{1}{8} \sum_a \cdot \sum_{j,l} (T_a)_{jl} (T_a)_{jl}^* \\ = \frac{1}{8} \sum_a \text{Tr}(T_a T_a) = \frac{1}{8} \sum_a \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = \frac{1}{2}$$

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2]$$

liefert nach Integration über p_T^2 :

$$\sigma(\gamma^* g) = \hat{\sigma}_0 \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qg}(z) \left[\log \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots \right]$$

hadronischer Beitrag: $\sigma(\gamma^* P)$ gemäß

$$\sigma(\gamma^* P) = \sigma_0 \cdot \underbrace{\frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} G(y) P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right) \log \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots}_{=\Delta q(x, Q^2) \text{ von Gluon-Splitting}}$$

mit $G(y)$: Gluon-Dichte

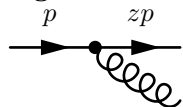
Systematisch: gekoppelte Gleichungen (auch DGLAP: Dokshitzer, Gribov, Lipatov, AP)

$$Q^2 \frac{\partial q(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) q(y, Q^2) + P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right) G(y, Q^2) \right] \\ Q^2 \frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) q(y) + P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right) G(y, Q^2) \right]$$

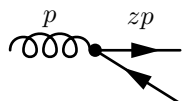
Anfangsbedingungen aus experimentellen Daten.

Lösung perturbativ (iterativ) oder numerisch. Lösung liefert einen Satz von $G(x, Q^2)$ und $q_i(x, Q^2)$ [$i = u, d, s$]

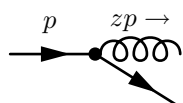
Splitting-Funktionen



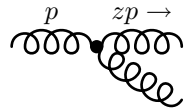
$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1+z^2}{1-z}$$



$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2]$$

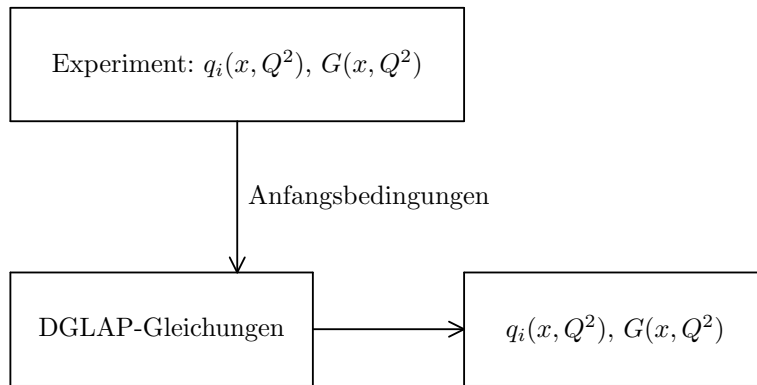
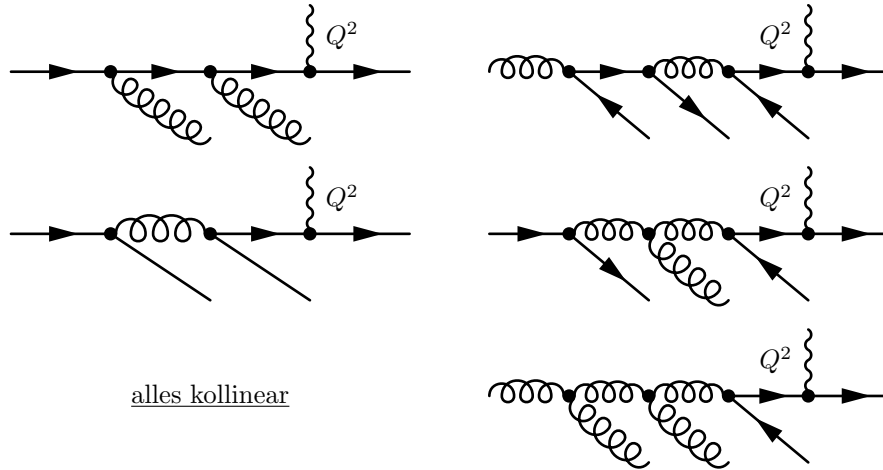


$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1+(1-z)^2}{z}$$



$$P_{gg}(z) = 6 \left[\frac{z}{1-z} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right]$$

Lösung von DGLAP enthält Aufsummationen:

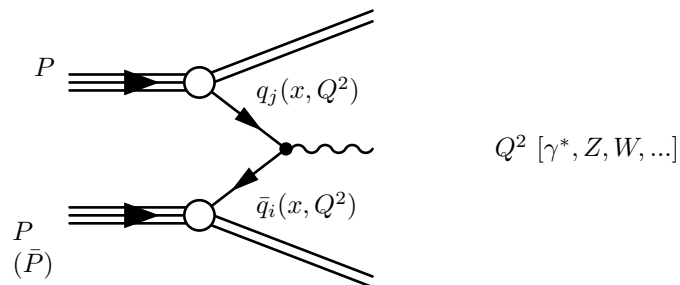


wichtig:

Die aus Daten und DGLAP bestimmten Verteilungsfunktionen sind universell, d.h. sie gelten bei allen harten partonischen Streuprozessen mit (Proton, Anti-Proton, Neutron, ...) im Anfangszustand.

Beispiele

Tevatron/LHC:



Gluon-Fusionsprozesse:

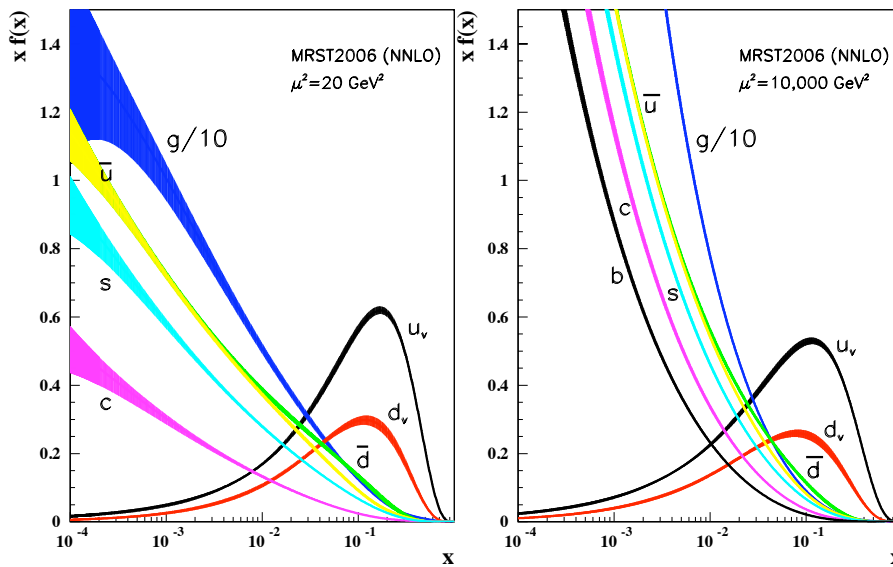
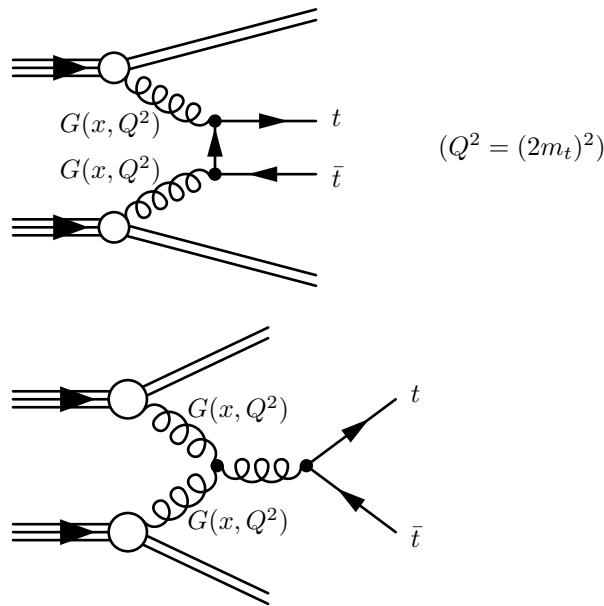
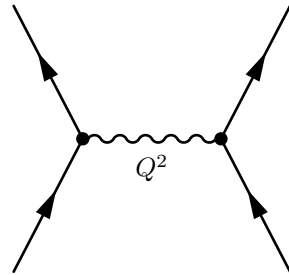


Abbildung 2.1: Partonverteilung

2.5 Laufende Kopplung und asymptotische Freiheit

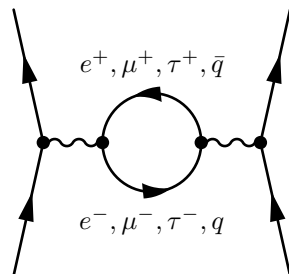
2.5.1 QED

WW zwischen 2 Ladungen:



$\sim \frac{e^2}{Q^2} = \frac{4\pi\alpha}{Q^2}$ mit $\alpha = \frac{1}{137,086\dots}$ und e : klassische Ladung

Ladung wird modifiziert durch Schleifen-Terme (\sim höhere Ordnung Störungstheorie):

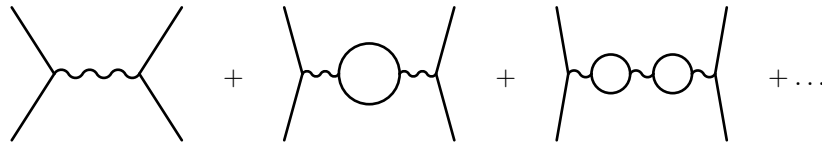


$\sim e^2 \cdot \underbrace{\Pi(Q^2)}_{\text{Vakuumpolarisation}}$
 $\sim e^2 \sum_{f=e,\dots,q} Q_f^2(\dots)$

$$\Pi(Q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_f Q_f^2 \left[\log \frac{Q^2}{m_f^2} + (\dots \text{ von } Q^2 \text{ unabh. Terme}) \right]$$

gilt für $|Q^2| > m^2$, sonst $\Pi(Q^2) \sim \frac{Q^2}{m_f^2} \rightarrow 0$ für $Q^2 \ll m_f^2$.

Wiederholtes Einsetzen und Summieren:



$\sim \frac{e^2}{Q^2} [1 + \Pi(Q^2) + \Pi(Q^2)^2 + \dots] = \frac{e^2}{Q^2} \cdot \frac{1}{1 - \Pi(Q^2)}$ geometrische Reihe

Effekt:

$\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{1 - \Pi(Q^2)} \equiv \alpha(Q^2)$

laufende Kopplung der QED³

z. B. bei $M_t = 91$: $\alpha(M_z^2) = \frac{1}{128,8}$ (\sum_f mit $f = e, \mu, \tau, u, d, \dots, b$, ohne top, da $M_z^2 \ll m_t^2$) Statt $\alpha = \frac{1}{137}$ als Input kann $\alpha(Q_0^2)$ bei einem beliebigen (aber festen) Q_0^2 gewählt werden.

³wächst an mit Q^2 , siehe auch Abbildung 2.2

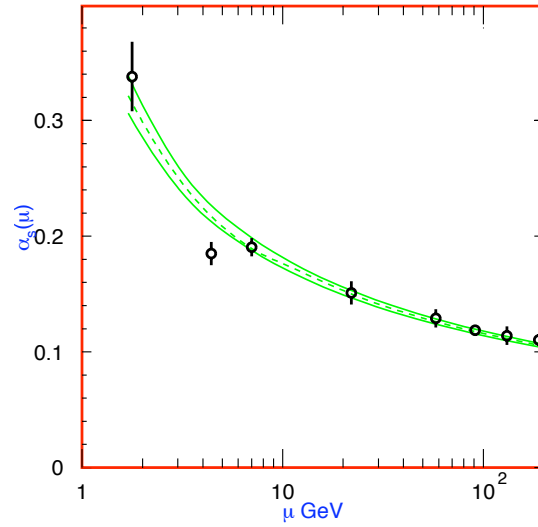
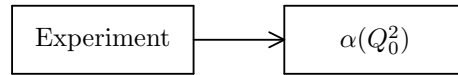


Abbildung 2.2: laufende QCD-Kopplung



$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\pi} \sum_f Q_f^2 \left(\log \frac{Q^2}{m_f^2} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{\alpha(Q_0^2)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\pi} \sum_f Q_f^2 \left(\log \frac{Q_0^2}{m_f^2} + \dots \right)$$

ergibt:

$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} - \frac{1}{\alpha(Q_0^2)} = -\frac{1}{3\pi} \sum_f Q_f^2 \cdot \log \frac{Q^2}{Q_0^2} = -\frac{\beta_0}{4\pi} \log \frac{Q^2}{Q_0^2} \quad (1)$$

wobei

$$\beta_0 = \frac{4}{3} \sum_f Q_f^2 > 0$$

Auflösen nach $\alpha(Q^2)$ ergibt:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(Q_0^2)}{1 - \frac{\alpha(Q_0^2)}{4\pi} \beta_0 \log \frac{Q^2}{Q_0^2}} \quad (1')$$

erfüllt DGL

$$Q^2 \frac{d\alpha(Q^2)}{dQ^2} = \frac{\beta_0}{4\pi} \alpha^2$$

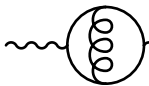
Evolutionsgleichung, Renormierungsgruppen-Gleichung (RGE)
 (1), (1') ist Lösung mit Anfangsbedingung $\alpha(Q_0^2)$.

Allgemein lautet die RGE (aus QFT):

$$Q^2 \frac{d\alpha}{dQ^2} = \beta(\alpha)$$

mit der β -Funktion $\beta(\alpha)$, die das Laufen von α bestimmt. $\beta(\alpha)$ kann perturbativ berechnet werden:

$$\beta(\alpha) = \underbrace{\frac{\beta_0}{4\pi}}_{1\text{-Loop}} \alpha^2 + \underbrace{\frac{\beta_1}{(4\pi)^2}}_{2\text{-Loop}} \alpha^3$$



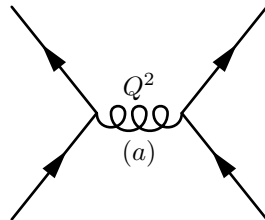
$$\Pi^{(2\text{-Loop})} = \frac{\beta_1}{(4\pi)^2} \alpha^2 \log Q^2 + \dots$$

Die Lösung der RGE entspricht dem Aufsummieren der geometrischen Reihe $1 + \Pi + \Pi^2 + \dots = \frac{1}{1-\Pi} \hat{=} \text{Aufsummieren von } \alpha^n \log \frac{nQ^2}{Q_0^2}$

Vorzeichen von $\beta(\alpha)$ bestimmt das asymptotische Verhalten von α

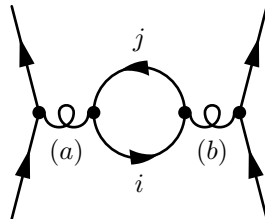
2.5.2 QCD

WW zwischen 2 Quarks (starke WW):



$$\sim \frac{g_s^2}{Q^2} = \frac{4\pi\alpha_s}{Q^2}$$

Vakuum-Polarisation durch virtuelle Quark-Paare:



$$\sim \frac{g_s^2}{Q^2} = \frac{4\pi\alpha_s}{Q^2}$$

$$\Pi^{(q)}(Q^2) = \sum_{q=u,d,\dots} g_s^2 \underbrace{\sum_{i,j} (T_a)_{ij} (T_b)_{ji}}_{=Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}} \cdot [\text{Rest wie QED}]$$

Man erhält demnach $\Pi^{(q)}$ aus Π^{QED} durch Ersetzen:

$$\sum_{f=e,\mu,\tau,q} e^2 Q_f^2 \rightarrow \sum_q g_s^2 \cdot \frac{1}{2}$$

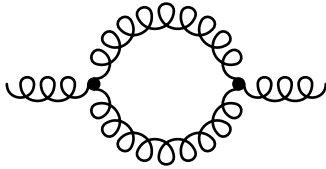
Also:

$$\Pi^{(q)}(Q^2) = \frac{\alpha_s}{3\pi} \cdot \frac{1}{2} \sum_q \left(\log \frac{Q^2}{m_q^2 + \dots} \right) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot \beta_0^{(q)} \cdot \log Q^2 + (\dots \text{ von } Q^2 \text{ unabh.})$$

mit

- $\beta_0^{(q)} = \frac{4}{3} \sum_q \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{n_f}{2} > 0,$
- n_f : Anzahl der Flavour (≤ 6)
- ($n_f = 5$ für $Q^2 < m_t^2$)

Soweit alles analog zu QED. Es ergäbe sich ein Anwachsen von $\alpha_s(Q^2)$ mit wachsendem Q^2 . Jedoch: $\beta_0 = \beta_0^{(q)} + \beta_0^{(g)}$ mit einem weiteren nicht-abelschen Beitrag von den Gluonen:



$$\beta_0^{(g)} = -11 \quad (\text{Vorzeichen!})$$

Damit:

$$\beta_0 = -11 + \frac{2}{3} n_f$$

$\rightarrow \beta_0 < 0$ für $n_f < \frac{33}{2}$

Da empirisch $n_f \leq 6$ gilt, ist also $\beta_0 < 0$.

Laufende Kopplung der QCD:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{1 + \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{4\pi} (11 - \frac{2}{3} n_f) \log \frac{Q^2}{Q_0^2}}$$

$\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ für $Q^2 \rightarrow \infty$

starke WW wird schwach für große Q^2 . Diese Eigenschaft wird als „*asymptotische Freiheit*“ bezeichnet und ist eine wesentliche Eigenschaft der QCD. Beispiel:

$$\begin{aligned} \alpha_s(M_z^2) &= 0,12 & M_z &= 91 \text{ GeV} \\ \alpha_s(m_\tau^2) &= 0,34 & m_\tau &= 1,8 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Bei kleinen Q^2 : $\alpha_s(Q^2)$ wird groß, divergiert für ein bestimmtes $Q^2 = \Lambda^2$:

$$\frac{1}{\alpha_s(\Lambda^2)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^2 = Q_0^2 \exp \frac{-12\pi}{(33 - 2n_f)\alpha_s(Q_0^2)}$$

$$\Lambda \simeq (200 \pm 100) \text{ MeV}$$

Die laufende Kopplungskonstante lässt sich durch Λ ausdrücken, wenn man $\alpha_s(Q_0^2)$ durch Λ substituiert:

$$\underbrace{\frac{1}{\alpha_s(\Lambda^2)}}_{=0} - \frac{1}{\alpha_s(Q_0^2)} = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3}n_f \right) \log \frac{\Lambda^2}{Q_0^2}$$

und damit

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3}n_f \right) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

oder aufgelöst nach $\alpha_s(Q^2)$:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}}$$

Λ bestimmt die Skala, wo die Störungsrechnung nicht mehr anwendbar ist. (zum Vergleich: π -Masse $m_\pi \simeq 140$ MeV) Störungsrechnung für $|Q^2| \gg \Lambda^2$

Die Unsicherheit von Λ hat mehrere Gründe:

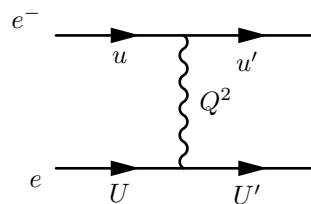
- exp. Fehler von $\alpha_s(Q_0^2)$
- Abhängigkeit von der Ordnung der Störungsrechnung
- Abhängigkeit von der Zahl der „aktiven“ Flavour, d.h. derjenigen die zum Laufen beitragen.

Für $Q^2 \lesssim \Lambda^2$ sind nicht-perturbative Methoden nötig, wie z. B. Gitter-Approximation, oder chirale Störungsrechnung,...

2.6 QCD-Potentiale und Bindungszustände

2.6.1 QED (als bekanntes Beispiel)

Coulomb-Potential $V_{QED} = \pm \frac{\alpha}{r}$ zwischen zwei Ladungen (e^-e^- oder e^-e^+) folgt aus Feynman-Graph mit 1-Photon-Austausch im nicht-relativistischen Limes $|\vec{p}| \ll m (= m_e)$:



$$\mathcal{M} = i \frac{e^2}{Q^2} \underbrace{(\bar{u}' \gamma^\mu u') (\bar{U}' \gamma_\mu U)}_{\simeq (\bar{u}' \gamma^0 u) \cdot (\bar{U}' \gamma_0 U)} \simeq 2m \cdot 2m \text{ für } |\vec{p}|, |\vec{p}'| \ll m$$

(\rightarrow siehe WS 07/08, Kap. 3, Mott-WQ)

$\mathcal{M} = if$, wobei

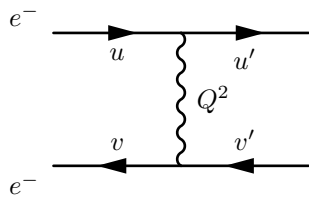
f : Streuamplitude, nicht-relativistisch.

$f = -\tilde{V}(\vec{Q}^2)$ Fourier-Transformation des Potentials $V(\vec{r})$

Da $p^0 = p'^0$ (im CMS) $\Rightarrow Q^2 = -\vec{Q}^2 = -(\vec{p} - \vec{p}')^2$

$\Rightarrow f \sim -\frac{e^2}{Q^2} = -\tilde{V}(\vec{Q}^2)$, $\int d^3x e^{i\vec{Q}\vec{x}} \frac{\alpha}{r} = \frac{e^2}{Q^2} = \tilde{V}(\vec{Q})$

Jetzt: e^+e^- :



$$\mathcal{M} = -i \frac{e^2}{Q^2} \underbrace{(\bar{u}' \gamma^0 u)(\bar{v} \gamma^0 v')}_{\simeq 2m \cdot 2m}$$

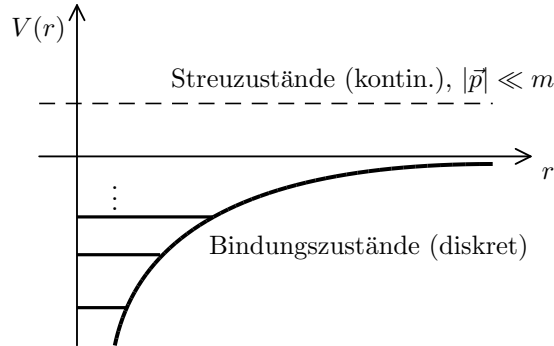
„-“ Zeichen, wegen Vertauschung der Reihenfolge zweiter Fermionen in der Anordnung der Spinoren.

($\bar{v} \gamma^0 v'$ statt $\bar{U}' \gamma^0 U$, also $v \leftrightarrow U'$, $v' \leftrightarrow U$, einlaufend/auslaufend)

Daher:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

anziehendes Potential zwischen e^- und e^+ erlaubt Bindungszustände aus e^- und e^+ : **Positronium**



analog H-Atom, jedoch mit $m_e \rightarrow \mu_e = \frac{m_e}{2}$ als reduzierte Masse, (2-Teilchenproblem \rightarrow effektives 1-Teilchen-Problem)

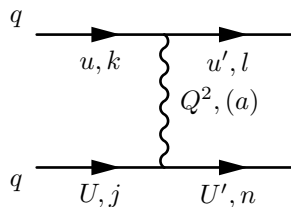
Feinstruktur durch Spin-Bahn/Spin-Spin-WW:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0 \quad \text{Spin-Spin-Kopplung}$$

$$e^- \otimes e^+ = \underbrace{\text{Triplet}}_{\text{Ortho-Positronium}} \oplus \underbrace{\text{Singlett}}_{\text{Para-Positronium}}$$

2.6.2 QCD

- Quark-Quark-Streuung mit 1-Gluon-Austausch im nicht-relativistischer Näherung



k, l, j, n sind die Colour-Indizes der Quarks ($a = 1, \dots, 8$) (über a summieren)

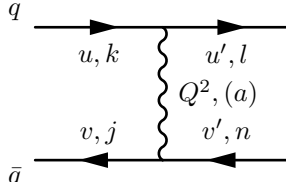
$$\mathcal{M} = i \frac{g_s^2}{Q^2} (\bar{u}' \gamma^0 u) \cdot (\bar{U} \gamma_0 U) \cdot \underbrace{\sum_a (T_a)_{lk} (T_a)_{nj}}_{\text{Colour-Faktor}}$$

$\Rightarrow V_{QCD}^{(qq)}$ aus $V_{QED}^{e^-e^-}$ durch $\alpha \rightarrow \alpha_s$ und zusätzlicher Colour-Faktor:

$$V^{(qq)} = \frac{\alpha_s}{r} \cdot [\text{Colour-Faktor}]$$

Der Colour-Faktor bestimmt sich aus der Anordnung der Quark-Colour in den 2-Teilchen-Zuständen.

- Quark-Antiquark-Streuung:



$$\mathcal{M} = \underbrace{-}_{\substack{\text{wie bei} \\ e^+e^-}} i \frac{g_s^2}{Q^2} (\bar{u}\gamma^0 u)(\bar{v}\gamma_0 v') \cdot \underbrace{\sum_a (T_a)_{lk} (T_a)_{jn}}_{\text{Colour-Faktor, } \neq (qq)}$$

$$\Rightarrow V_{QCD}^{(q\bar{q})} = \frac{\alpha_s}{r} \cdot [\text{Colour-Faktor}]$$

Auch dieser Colour-Faktor bestimmt sich aus der Anordnung der Colour in den 2-Teilchenzuständen, jetzt bestehend aus q und \bar{q} . Dazu bedarf es eines Exkurses in die Produkt-Darstellung der $SU(3)$.

Exkurs: 2-Teilchen-Zustände im Colour-Raum

qq und $q\bar{q}$ Zustände liegen im Produktraum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ wobei $\mathcal{H}_{1,2}$: Hilbert-Raum von Teilchen 1,2. Produkt-Zustände: $|\psi_1\rangle |\psi_2\rangle$ oder $|\psi_1\psi_2\rangle$ wobei $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$

$$|\psi_1\rangle = |\text{Spin, Bahn}\rangle_1 |\text{Colour}\rangle_1$$

$$|\psi_2\rangle = |\text{Spin, Bahn}\rangle_2 |\text{Colour}\rangle_2$$

wobei $|\text{Colour}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_{1,2,3} \equiv |R\rangle, |G\rangle, |B\rangle$

(neue Notation, bequem)

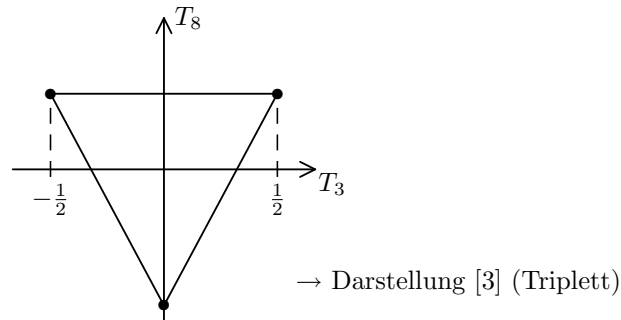
Produktbasis bei $|q\rangle |q\rangle$: $|R\rangle |R\rangle \equiv |RR\rangle, |RG\rangle, |RB\rangle, \dots$ (insg. 9 Basiszustände)

Die Colour-Basisvektoren $\chi_{1,2,3}$ bzw. $|R\rangle, |G\rangle, |B\rangle$ sind gemeinsame Eigenvektoren der Operatoren (Generatoren) T_3 und T_8 :

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$[T_3, T_8] = 0$$

Man kann sie daher durch ihre Eigenwerte kennzeichnen, in der Form: $|T_3, T_8\rangle$
 $|R\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\rangle$, $|G\rangle = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\rangle$, $|B\rangle = |0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$ und in der T_3 - T_8 -Ebene darstellen:



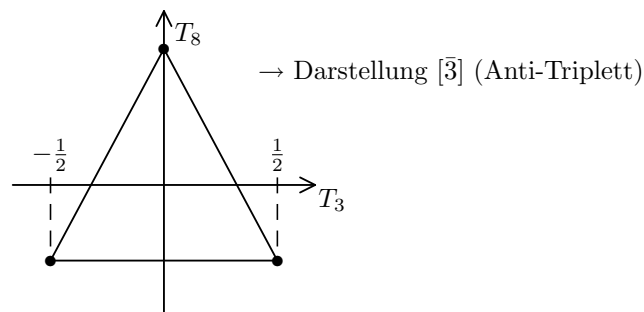
Anti-Quarks sind in Darstellung $[\bar{3}]$: $\bar{T}_a = -T_a^*$. Sie erfüllen die $SU(3)$ -Algebra, genau wie T_a

$$[\bar{T}_a, \bar{T}_b] = if_{abc}\bar{T}_c$$

daher eine Darstellung, die im Übrigen nicht äquivalent zu $[3]$ ist. Basisvektoren sind gemeinsame Eigenvektoren von

$$\bar{T}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & +1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\bar{R}\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\rangle, |\bar{G}\rangle = |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\rangle, |\bar{B}\rangle = |0, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$$



$q\bar{q}$ -Zustände sind Zustände auf dem Raum $[3] \otimes [\bar{3}]$. Produktzustände: $|R\bar{R}\rangle, |R\bar{G}\rangle, |R\bar{B}\rangle, \dots$ Colour-Raum von $q\bar{q}$ -Zuständen: $[3] \otimes [\bar{3}] \rightarrow$ ein 9-dim. Raum Dieser ist irreduzibel \rightarrow „ausreduzieren“: Zerlegen in direkte Summe aus irreduziblen Darstellungen (analog Spin \otimes Spin = \sum Gesamtspin) entspricht einer Basis-Transformation, so dass die $SU(3)$ -Darstellungsmatrizen block-diagonal werden.

Neue Basisvektoren:

- Linearkombination der Produktbasisvektoren
- Koeffizienten: Clebsch-Gordon-Koeffizienten der $SU(3)$

Bei $[3] \otimes [\bar{3}]$:

$$(9 \times 9) = \left(\begin{array}{c|c} 8 \times 8 & 0 \\ \hline 0 & 1 \times 1 \end{array} \right)$$

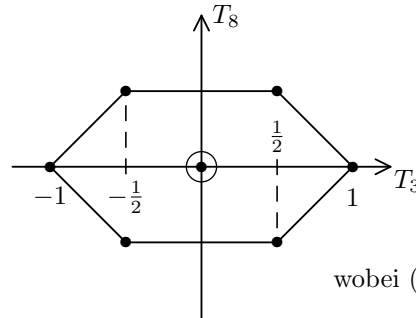
→ Oktett ⊕ Singlett. $[3] \otimes [\bar{3}] = \underbrace{[8]}_{\text{Oktett}} \oplus \underbrace{[1]}_{\text{Singlett}}$

Der **Singlett-Zustand** ist die folgende Linearkombination der Produktbasisvektoren:

$$|\text{Singlett}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle + |B\bar{B}\rangle)$$

Quantenzahlen: $T_3 = 0, T_8 = 0$, colour-neutral.

Die **Oktett-Basisvektoren** sind 8 auf $|\text{Singlett}\rangle$ orthogonale Linearkombinationen (auch untereinander orthogonal), werden hier nicht angegeben, enthalten z. B. $|R\bar{G}\rangle, |R\bar{B}\rangle, |G\bar{R}\rangle, \dots$ und lassen sich bzgl. T_3 und T_8 wie folgt zeigen.



wobei (0,0) doppelt besetzt ist

Quark-Quark-Zustände (qq) sind Zustände auf dem Produktraum $[3] \otimes [3]$ ebenfalls 9-dim. Produktzustände: $|RR\rangle, |RG\rangle, \dots$ (9 Basisvektoren). Ausreduzieren (→ geeignete Basis) ergibt

$$[3] \otimes [3] = [6] \oplus [\bar{3}]$$

Das Sextett $[6]$ hat ein abstoßendes Potential, das Anti-Triplett $[\bar{3}]$ führt auf

$$V(r) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha_s}{r} \quad (\text{anziehend})$$

Jedoch wurden keinerlei (qq) Zustände (Di-Quarks) gefunden. (Werden wegen der Energie des Gluon-Feldes $\rightarrow \infty$ auch nicht erwartet).

Jedoch wird das wichtig für 3-Quark-Zustände → siehe später

Nun zurück zum Potential.

$q\bar{q}$ Singlett

$k = j$ und $l = n$ und summieren → Colour-Faktor (siehe Seite 50)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_k \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \end{array} \right\} \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_l$$

$$\begin{aligned}
 [\text{Colour-Faktor}]_{q\bar{q}\text{-Singlett}} &= \sum_a \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \sum_{k,l} (T_a)_{lk} (T_a)_{kl} \\
 &= \frac{1}{3} \sum_a \text{Tr}(T_a T_a) = \frac{1}{3} \sum_a \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Daher anziehendes Potential:

$$V_{QCD}^{(q\bar{q})} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$$

erlaubt Bindungszustände, analog Positronium: **Quarkonium**

$q\bar{q}$ Oktett

(ohne Ausführung) Colour-Faktor = $-\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow V_{QCD}^{(q\bar{q})} = +\frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha_s}{r} \quad (\text{abstoßend})$$

keine Bindung möglich.

Fazit:

Bindungszustände von $q\bar{q}$ -Zuständen nur als Colour-Singlett.

($q\bar{q}$)-Bindungszustände sind colour-neutral (Colour-Ladung wird kompensiert).

\Rightarrow Mesonen als $q\bar{q}$ -Zustände tragen keine Colour.

Ergänzung:

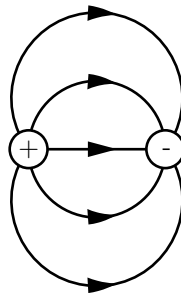
Das aus 1-Gluon-Austausch gewonnene Potential ist unvollständig, da für große r die starke WW stark wird. Daher (phänomenologisch, nicht rigoros, aber motiviert durch verschiedene Approximationsmethoden, z. B. Gitter)

$$V_{QCD}^{(q\bar{q})} = -\frac{4}{3} \frac{ds}{r} + kr \quad k > 0 \text{ (String-Tension)}$$

$q\bar{q}$ sind „eingeschlossen“: *Quark-Confinement*

Grund für den linearen Term: Selbst-WW der Gluonen.

Feldstärken zwischen q und \bar{q} :



e.m. Feld



QCD: string-artige Konzentration der Feldenergie, wächst an mit Abstand \Rightarrow keine freien Quarks

3-Quark-Zustände (qqq)

sind Zustände auf dem Produktraum

$$\begin{aligned}
 & [3] \otimes [3] \otimes [3] \\
 = & ([6] \oplus [\bar{3}]) \otimes [3] \\
 = & ([6] \otimes [3] \oplus [\bar{3}] \otimes [3]) \\
 & \underbrace{[10] \oplus [8] \oplus [8]}_{\text{jeweils abstoßendes Potential}} \oplus \underbrace{[\bar{3}] \otimes [3]}_{\text{anziehendes Potential, Colour-Singlett}} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{[1]}
 \end{aligned}$$

(qqq)-Bindungszustände sind daher nur möglich, als Colour-Singlett: **Baryonen**
 \Rightarrow Baryonen sind colour-neutral.

$$|qqq\rangle_{\text{Singlett}} = |\text{vollständig antisymmetrisch}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |R\rangle_1 & |G\rangle_1 & |B\rangle_1 \\ |R\rangle_2 & |G\rangle_2 & |B\rangle_2 \\ |R\rangle_3 & |G\rangle_3 & |B\rangle_3 \end{vmatrix}$$

Für Zustände aus gleichen Flavour-Quarks, wie z. B. (sss) ist zu beachten, dass die Spin- und Bahn-Anteile symmetrisch sind, so dass der Gesamtzustand gemäß Pauli-Prinzip antisymmetrisch ist.

Beispiel:

$$|\Omega^-\rangle = |sss\rangle \text{ mit Spin } \frac{1}{2} = |\text{Bahn}\rangle |\text{Spin}\rangle |\text{Colour}\rangle$$

$$= \underbrace{|L=0\rangle}_{\text{symm.}} \underbrace{|s=\frac{3}{2}\rangle}_{\text{symm:}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle} \underbrace{|\text{Singlett}\rangle}_{\text{anti-symm}}$$

ohne Colour wäre der Zustand symmetrisch!

Wichtiger Hinweis auf Colour im Quarkmodell, vor der QCD.

Fazit:

Baryonen = (qqq)-Bindungszustände

Mesonen = ($q\bar{q}$)-Bindungszustände

jeweils als Colour-Singletts

2.6.3 Quarkonia

In Analogie zum Positronium: Bindungszustände aus $q\bar{q}$ im Potential

$$V_{QCD}^{(q\bar{q})} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr$$

Beachte:

Der Anteil $\sim \frac{1}{r}$ (analog zu Colomb-Potential) wurde perturbativ aus dem 1-Gluon-Austausch gewonnen. Daher ist diese Form nur sinnvoll, wenn die Massenskala des Quarks $> \Lambda_{QCD}$ ist, so dass $\alpha_s = \alpha_s(m_q^2)$ gesetzt werden kann.

$c\bar{c}$: Charmonium, $m_c = (1,5 - 1,8) \text{ GeV}$

$b\bar{b}$: Bottomonium, $m_b = (4,7 - 5) \text{ GeV}$

beide $m_{c,m} \gg \Lambda_{QCD}$

Daher ist

$$\left. \begin{aligned} V^{(b\bar{b})} &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(m_b)}{r} + kr \\ V^{(c\bar{c})} &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(m_c)}{r} + kr \end{aligned} \right\} \text{jeweils eine sinnvolle Approximation.}$$

Anmerkungen:

- 1) Für die leichten Quarks u, d, s ist wegen $m_q \lesssim \Lambda_{QCD}$ ein solches Potential nicht geeignet. Dennoch gibt es die entsprechenden Zustände, allerdings nicht mit diesem einfachen Potential, das dem 1-Gluon-Austausch entspricht.
- 2) Für die tief-liegenden Zustände im Quarkonium ist die Analogie zum Positronium deutlicher als für die höher-angeregten (merken weniger vom $+kr$ -Term)
- 3) Ab einer Schwelle E_{th} sind Zustände mit $E > E_{th}$ nicht stabil, zerfallen z. B. gemäß

$$|b\bar{b}\rangle \rightarrow \underbrace{|b\bar{u}\rangle}_{|B^-\rangle} + \underbrace{|\bar{b}u\rangle}_{|B^+\rangle} \quad |B^\pm\rangle : \text{B-Mesonen}$$

dies ist möglich, wenn $m_{(b\bar{b})} > m_{B^-} + m_{B^+}$

In der üblichen Terminologie aus der Spektroskopie (S für $L = 0$, P für $L = 1$, usw.) hat man die Spektren:

$c\bar{c}$			$b\bar{b}$		
J/ψ	1^3S_1	1974 BNL und SLAC 3,1 GeV	Υ	1^3S_1	1978 Fermilab 9,5 GeV
ψ'	2^3S_1	3,7 GeV	Υ'	2^3S_1	10 GeV
ψ''	3^3S_1		Υ''	3^3S_1	oberhalb der Schwelle

Weitere Zustände mit $S = 1$ (Vektormesonen) aus leichten Quarks (u, d, s):

$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \quad m_\rho = 770 \text{ MeV}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \quad m_\omega = 782 \text{ MeV}$$

$$\phi = s\bar{s} \quad m_\phi = 1019 \text{ MeV}$$

$$J/\psi = c\bar{c} \quad m_\psi = 3,1 \text{ GeV}$$

$$\Upsilon = b\bar{b} \quad m_\Upsilon = 9,5 \text{ GeV}$$

Zustände mit $S = 0$ (pseudoskalar⁴ Mesonen):

$$\Pi^+ = -u\bar{d}$$

$$\Pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

$$\Pi^- = d\bar{u}$$

$$K^+ = u\bar{s}$$

$$K^0 = d\bar{s}, \bar{K}^0 = -s\bar{d}$$

$$K^- = s\bar{u}$$

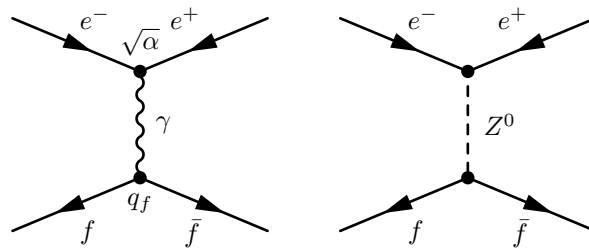
⁴„pseudo-skalar“, wegen Parität $\mathcal{P} = -(-1)^L = -1$, da $L = 0$. „-“-Zeichen, da q und \bar{q} entgegengesetzte Parität haben (als Dirac-Teilchen)

Kapitel 3

e^+e^- - Colliderphysik

3.1 Quarkflavours, Farben, Gluonen, $W^\pm Z$

e^-e^+ - Vernichtung:



$f\bar{f}$: Quark-Antiquarkpaar (=Meson), Lepton-Antileptonpaar.
 f für Fermion (Spin 1/2).

Quantenzahlen von $f\bar{f}$:

$Q_e = 0$ (elektrische Ladung)

$J = 1$ (Gesamtspin)

Mesonen mit $J = 1$: „Vektormesonen“.

Elektron-Positron-Collider

Collider: $\vec{p}_{e^-} = -\vec{p}_{e^+}$ ($\vec{p}_{ges} = 0$)

Laborsystem \equiv Schwerpunktsystem

Teilchenerzeugung¹; Kinematik:

Entscheidend ist die invariante Masse \sqrt{s} mit $s = (p_1 + p_2)^2$ $p_{1,2}$: 4er-Impulsektor

Collider:

$$p_1 = (E, \vec{p}c)$$

$$p_2 = (E, -\vec{p}c)$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = 2E$$

Vergleiche e^+ auf ruhendes Target:

$$p_1 = (E, \vec{p}c)$$

¹Positronenerzeugung: e^- auf Target 1 \rightarrow Bremsstrahlung γ WW γ mit Target 2 (hohes Z) \rightarrow Paarbildung e^-e^+ . e^+ -Selektion und Beschleunigung

$$\begin{aligned}
 p_2 &= (mc^2, 0) \\
 \Rightarrow s &= (E + mc^2)^2 - \vec{p}^2 c^2 \\
 s &= E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4 - p^2c^2 \\
 s &= 2Emc^2 + 2m^2c^4
 \end{aligned}$$

also $\sqrt{s} \sim \sqrt{E}$ ($E \gg mc^2$) \Rightarrow Schwerpunktsenergie:

Speicherring: $\sim E$

ruhendes Target: $\sim \sqrt{E}$

3.1.1 e^+e^- -WW: Leptonische Kanäle

$$e^+e^- \longrightarrow e^+e^- \quad (\text{„Bhabha“-Streuung})$$

$$e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$$

Für $\sqrt{s} > 210 \text{ MeV} \rightarrow M_{\mu^\pm} = 105 \text{ MeV}/c^2$

$$e^+e^- \longrightarrow \tau^+\tau^-$$

Für $\sqrt{s} > 2568 \text{ MeV} \rightarrow M_{\tau^\pm} = 1784 \text{ MeV}/c^2$

Leptonenuniversalität: e, μ, τ unterscheiden sich nicht in ihren Reaktionen.

Leptonzerfall:

$$\tau_e = \infty \quad (\tau_e > 1 \cdot 10^{24} \text{ a})$$

$$\tau_\mu \simeq 22 \text{ } \mu\text{sec}$$

$$\tau_\tau \simeq 3 \cdot 10^{-13} \text{ sec}$$

$$\mu^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$$

$$\tau^- \longrightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau \quad ; \quad \longrightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau \quad + \text{hadronische Kanäle}$$

μ^\pm sind leicht nachzuweisen:

- i) große Reichweite
- ii) Zerfall \rightarrow verzögerte Koinzidenz

$\Rightarrow e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ wird oft als Referenzsignal benutzt. Entdeckung des τ -Leptons (1975, SLAC):

$$\begin{aligned}
 e^+e^- &\longrightarrow \underbrace{\tau^+} \quad \underbrace{\tau^-} \\
 &\longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\tau \quad \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau
 \end{aligned}$$

mit $E = E_\mu + E_e \ll \sqrt{s}$ (die Restenergie wird von den ν 's weggetragen).
 $m_\tau = 1777 \text{ MeV}/c^2$. Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (\hbar c)^2 (1 + \cos^2 \theta)$$

- elektromagnetische WW: $\sigma \sim |e \cdot e|^2 = \alpha^2$
- $\hbar c \simeq 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$

- $1 + \cos^2 \theta$: Parität ist erhalten (analog zur Mottstreuung)
- $\sigma \sim s^{-1}$ wegen $\frac{1}{q^4} = s^{-2}$ und Phasenraum $\sim s$

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} (\hbar c)^2$$

bzw.

$$\sigma_{tot} = 21,7 \frac{n \text{ barn}}{(E^2/\text{GeV}^2)}$$

σ_{tot} für punktförmige Teilchen \Rightarrow Formfaktoren $F_{e,\mu,\tau} = 1$, $r_e < 1 \cdot 10^{-18} \text{ m}$.

3.1.2 e^+e^- -WW: Hadronische Kanäle

Resonanzen: Anregung erlaubter Quantenzustände (= Teilchen).

Ansatz: Wellenfunktion $\psi(t) = \psi(0)e^{-iEt/\hbar}$

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 = \text{const}$$

Aber: Teilchen in Resonanzen sind instabil.²

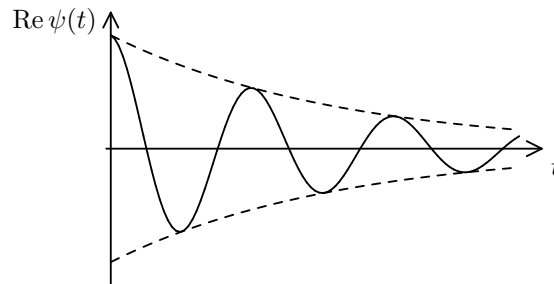
Ansatz: $\psi(t) = \psi(0)e^{-iE_0t/\hbar} \cdot e^{-i\Gamma t/2\hbar}$

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 \cdot e^{-\Gamma t/\hbar}$$

Übereinstimmung mit Zerfallsgesetz, wenn gilt:

$$\Gamma \cdot \tau = \hbar$$

mit $\tau :=$ mittlere Lebensdauer (des Zustands/Teilchens)



Energiespektrum des Teilchens?

$$\psi(t) \longrightarrow \psi(E) \quad (\text{Fouriertransformation})$$

Allgemein:

$$f(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$g(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{+i\omega t}$$

²Zumindest muss die Möglichkeit des Zerfalls im Ansatz beinhaltet sein!

Hier:³

$$g(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \psi(0) \int_0^\infty dt e^{i(\omega - E_0/\hbar)t} \cdot e^{-i\Gamma t/2\hbar}$$

$$g(\omega) = \frac{\psi(0)}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i\hbar}{(\hbar\omega - E_0) + i\Gamma/2}$$

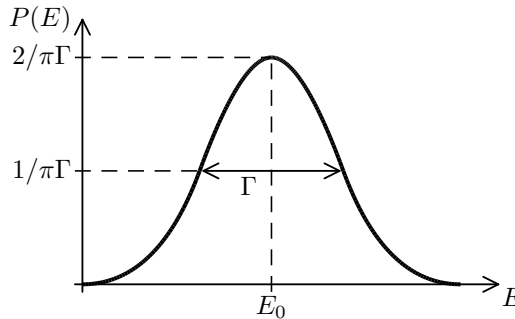
$g(\omega)$:= Amplitude, Frequenz ω zu finden. $E = \hbar\omega \rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsdichte, die Energie E zu finden:

$$P(E) \sim g^*(\omega)g(\omega) = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{|\psi(0)|^2}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

mit $\int_0^\infty P(E) dE = 1$

$$P(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad \text{Lorentz- oder Breit-Wignerkurve}$$

- Energieverteilung (keine scharfe Energie)
- Maximum bei $E = E_0$ (Resonanzenergie)
- $P(E_0 \pm \Gamma/2) = \frac{1}{2}P(E_0)$



Beobachtete Resonanzen bei e^+e^- -WW: $[\sqrt{s}] =$

- (770 - 780) MeV
- 1019 MeV
- (3,1 - 3,7) GeV
- 10 GeV
- 91 GeV

³Für $\Gamma = 0$ ($\tau = \infty$) wird das Integral zur Deltafunktion und $g(\omega) = 0$ nur für $\omega = E_0/\hbar$ ist $g(\omega) = 1$. D.h. $E = E_0$ (scharfer Energieerwartungswert)

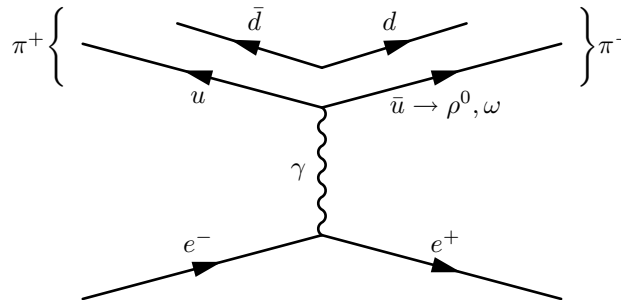
770 – 780 MeV: ρ^0 -, ω -Resonanz

$$e^+e^- \rightarrow \rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^- \quad M(\rho) = 770 \text{ MeV}$$

$$e^+e^- \rightarrow \omega^0 \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^- \quad M(\omega) = 782 \text{ MeV}$$

- $\Gamma_\rho = 154 \text{ MeV}$
- $\Gamma_\omega = 9,9 \text{ MeV}$
- $\tau_\rho \simeq 4 \cdot 10^{-24} \text{ sec}$
- $\tau_\omega \simeq 7 \cdot 10^{-23} \text{ sec}$

(Zeitskala: starke WW). Zugrundeliegender Prozess: Erzeugung von $u\bar{u}$ und $d\bar{d}$ -Paaren. Z.B:



Hadronen (= stark wechselwirkende Teilchen) aus Quark-Antiquarkpaaren: **Mesonen.**

$$\begin{aligned} \pi^+ &= u\bar{d} \text{ (Valenzquarks)} & \text{Spin - 0} \\ \pi^- &= \bar{u}d & \text{Spin - 0} \\ \pi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) & \text{Spin - 0} \\ \rho^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) & \text{Spin - 1} \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) & \text{Spin - 1} \end{aligned}$$

Pionentriplett: $\pi^+ \pi^0 \pi^-$

Spin: $J = 0$; „Isospin“: $I = 1$.

Rhotriplett: $\rho^+ \rho^0 \rho^-$

Spin: $J = 1$; „Isospin“: $I = 1$. $\rho^+ = u\bar{d}$; $\rho^- = \bar{u}d$ (Spins der Quarks: parallel)

ω -Singulett:

Spin: $J = 0$; „Isospin“: $I = 0$.

ϕ -Resonanz:

$$\sqrt{s} = 1019 \text{ MeV} = m(\phi)$$

$$\Gamma = 4,4 \text{ MeV} \rightarrow \text{lange Lebensdauer!}$$

Zerfallskanäle (85%):

$$\phi \rightarrow K^+ + K^-; \quad m_{K^\pm} = 494 \text{ MeV}/c^2$$

$$\phi \rightarrow K^0 + \bar{K}^0; \quad m_{K^0} = 499 \text{ MeV}/c^2$$

Kaonen K^\pm, K^0 : „seltsame“ Teilchen. ($\tau_{K^\pm} \simeq 13 \text{ nsec}$; $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ schwache WW)

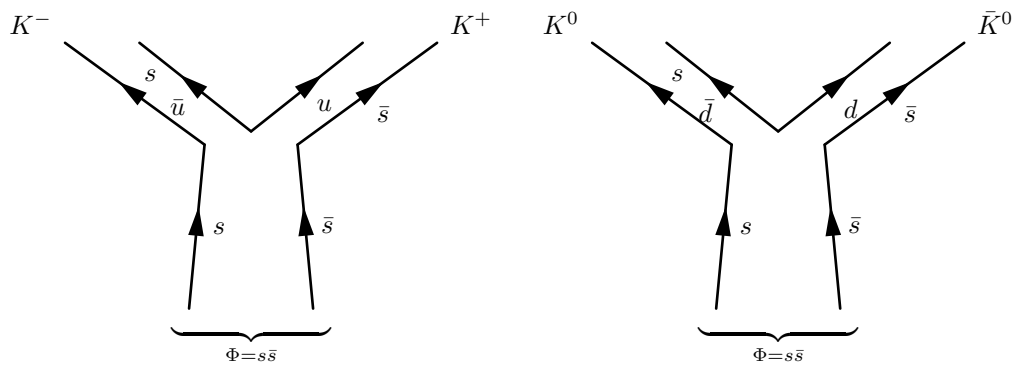
Erzeugung: via starke WW

Zerfall: via schwache WW; aber auch: $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$.

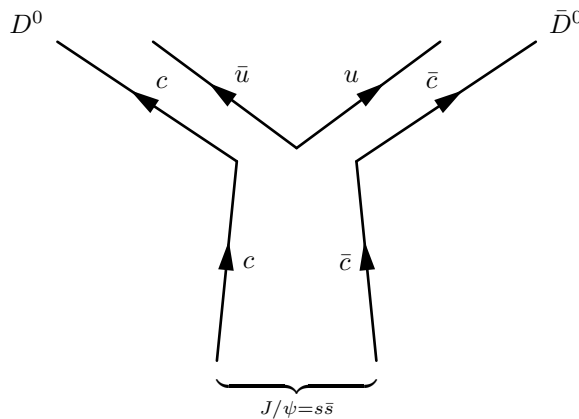
Einführung von s-Quarks (s=„strange“ Quark). $K^+ = u\bar{s}$, $K^0 = d\bar{s}$, $K^- = \bar{u}s$, $\bar{K}^0 = \bar{d}s$. elektrische Ladung s-Quark: $Q = -\frac{1}{3}$. Quantenzahl „Strangeness“ S: Zahl der \bar{s} -Antiquarks minus s-Quarks: (Spin $K : J = 0$).

Elektromagnetische + starke WW: S bleibt erhalten.

Schwache WW: S kann geändert werden.

 **J/ψ und Y -Resonanzen**

1974: $\sqrt{s} = 3097 \text{ MeV}$ $\Gamma = 88 \text{ keV}$ (!) (J/ψ -Resonanz). Entdeckung des c-Quarks.



→ energetisch verboten, weil: $m(D^0 = c\bar{u}) = m(\bar{D}^0 = \bar{c}u) = 1865 \text{ MeV}/c^2$.
 Auch $J/\psi \rightarrow \underbrace{D^+}_{D^+=c\bar{d}} + \underbrace{D^-}_{D^-=\bar{c}d}$ verboten. $m(D^\pm) = 1869 \text{ MeV}/c^2$. El. Ladung e:

$Q = +\frac{2}{3}$ (charm-Quark). Zerfall in Pionen möglich, aber nur in WW höherer Ordnung. → kleiner Wert von Γ .

Entdeckung b-Quark (Y-Resonanz):

$$\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}; \Gamma = 52 \text{ keV}, Y = b\bar{b}, Q_b = -\frac{1}{3}$$

$$r \not\rightarrow B^+(u\bar{b}) \quad B^-(\bar{u}b)$$

$$r \not\rightarrow B^0(d\bar{b}) \quad \bar{B}^0(\bar{d}b)$$

weil $m(B^0) = 5279 \text{ MeV}/c^2$, $m(B^\pm) = 5278 \text{ MeV}/c^2$.

Entdeckung t-Quark 1995 (Tevatron) mit $m(t) = (180 \pm 12) \text{ GeV}/c^2$

3.1.3 Zusammenfassung Quarks

Q/e	Massenskala		
$+\frac{2}{3}$	u	c	(t)
$-\frac{1}{3}$	d	s	b

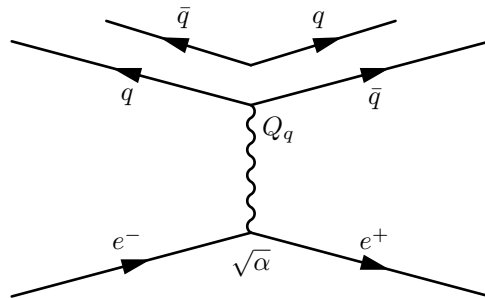
1995: Nachweis des t „Top“-Quarks am Tevatron (FNAL) in $p\bar{p}$ -Kollisionen.
 Spin des Quarks $J = 1/2$. Weitere Quantenzahlen (Flavour):

S	s-Quark	-1
C	c-Quark	+1
B	b-Quark	-1
T	t-Quark	+1

Konvention: Flavourquantenzahlen haben das gleiche Vorzeichen wie die elektrische Ladung des Quarks. Antiquarks: Quantenzahl = -Quantenzahl (Quark).

3.2 Nichtresonante Erzeugung von Hadronen

Erzeugung von Quark-Antiquark-Paaren außerhalb von Resonanzen



$$\sigma \sim \alpha \cdot Q_q^2$$

Abhängig von \sqrt{s} können $q\bar{q}$ -Paare bis $b\bar{b}$ gebildet werden.

$$\begin{aligned}\sqrt{s} < 3 \text{ GeV} &: & u, d, s \\ \sqrt{s} < 10 \text{ GeV} &: & u, d, s, c \\ \sqrt{s} < 60 \text{ GeV} &: & u, d, s, c, b\end{aligned}$$

Vergleich $\sigma(\text{Hadronen})$ mit $\sigma(\mu^+\mu^-)$:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

$$R(\sqrt{s} \lesssim 3 \text{ GeV}) = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^2}_{\text{„u“}} + \underbrace{\left(\frac{-1}{3}\right)^2}_{\text{„d“}} + \underbrace{\left(\frac{-1}{3}\right)^2}_{\text{„s“}} = \frac{2}{3}$$

$$R(\sqrt{s} \lesssim 10 \text{ GeV}) = \frac{2}{3} + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^2}_{\text{„c“}} = \frac{10}{9}$$

$$R(\sqrt{s} \lesssim 60 \text{ GeV}) = \frac{10}{9} + \underbrace{\left(\frac{-1}{3}\right)^2}_{\text{„b“}} = \frac{11}{9}$$

Experimenteller Befund: R ist um einen Faktor 3 größer! (für alle Energien)
 \Rightarrow Jedes $q\bar{q}$ -Paar kann in 3 Zuständen der „starken Farbladung“ auftreten: $R\bar{R}$, $G\bar{G}$, $B\bar{B}$. Weiterer Hinweis auf 3 zusätzliche Freiheitsgrade in $p\pi^+$ -Resonanzen.

$$p\pi^+ \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow p\pi^+ (\text{bei } 1236 \text{ MeV})$$

Im Quarkbild:

$$uud + u\bar{d} \rightarrow uuu$$

Quantenzahlen Δ^{++} :

$$Q = +2; J = \frac{3}{2} \text{ (aus Winkelverteilung)} \quad \Delta^{++} = u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow$$

Vollkommen *symmetrisch* bzgl. dem Austausch zweier Quarks. Verletzung des Pauliprinzips wird vermieden durch 3 Farbfreiheitsgrade. Farben: „starken Ladungen“ der Quarks.

Postulat: Baryonen (Hadronen mit 3 q) und Mesonen (Hadronen mit $q\bar{q}$) sind Farbneutral.

$$\text{Z.B.: } \Delta^{++} = u_R u_G u_B, \quad \pi^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_R \bar{d}_R + u_G \bar{d}_G + u_B \bar{d}_B)$$

$$R + G + B = 0$$

$$R + \bar{R} = 0$$

$$G + \bar{G} = 0$$

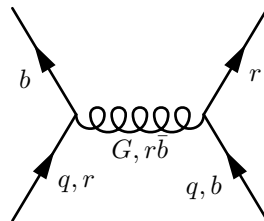
etc.

Antiquarks tragen „Antifarbe“

Kapitel 4

Gluonen

Austauschbosonen der starken WW. Z.B.:



Gluonen tragen Farben. Sie unterliegen selbst der starken WW. Starke WW ist invariant gegenüber einer Vertauschung der Farben. Gruppentheorie: Zuordnung der Quarks der speziell unitären Gruppe $SU(3)$. → Es existieren 8 linear unabhängige Kombinationen von Farb-Antifarbzuständen der Gluonen.

QED: 2 Ladungen (+,-); 1 Boson (γ) (neutral)
QCD: 6 Ladungen; 8 Bosonen (geladen)

4.1 QCD-Potential bei kleinen Abständen

1984: CERN $p\bar{p}$ -Collider. Analyse von 2-Jet Ereignissen. Für große q^2 -Werte (=kleine Abstände):

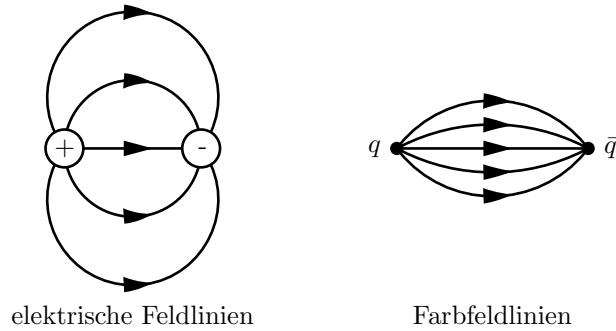
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left(\frac{9}{8}\right) \frac{\alpha_s^2}{4p_0^2 \sin^4(\theta/2)}$$

analog zum Rutherfordgesetz!

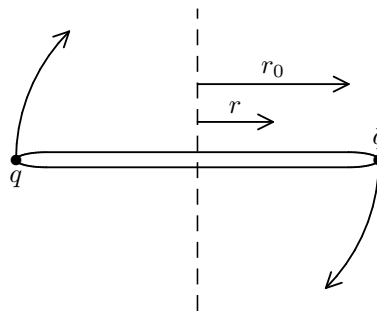
Experimentell: $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \sin^{-n}(\theta/2)$ mit $n = 4, 16 \pm 0, 20$. ⇒ bei kleinen Abständen r : $QCD\text{-Potential} \sim \frac{1}{r}$. Abweichungen bei großen Streuwinkeln durch relativistische Spineffekte) Aus $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (und auch aus den Ergebnissen der tiefinelastischen Lepton-Nukleonstreuung): $\alpha_s \simeq 0, 20$

4.2 QCD-Potential bei großen Abständen

Lineare Relation zwischen Spin und Masse² hadronischer Resonanzen



Starke Selbstwechselwirkung der Gluonen: **Stringmodell**



Definition: $k :=$ Energiedichte pro Einheitslänge.

Annahme: $k = \text{konst}$ ($r \leq r_0$). \rightarrow Potential $V(r) = kr$.

Gesamtmasse (=Energie) des Systems:

$$E = Mc^2 = 2 \int_0^{r_0} dr \gamma k \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Wenn $v(r = r_0) \simeq c$ gilt $v(r) = \frac{r}{r_0}c$ und $E = Mc^2 = kr_0\pi$

Gesamtdrehimpuls (=Spin) des Systems:

$$\hbar J = 2 \int_0^{r_0} dm r v = 2 \int_0^{r_0} r v(r) \cdot \underbrace{\gamma \cdot \frac{kd r}{c^2}}_{dm}$$

$$J = \frac{kr_0^2\pi}{2\hbar c} \Rightarrow J = \text{const} \cdot M^2 + \text{const}$$

Allgemeiner Ansatz: $V(r) = kr^n$ ergibt: $J \propto M^{(1+1/n)}$. Experimenteller Befund: Bester Fit für $n = 1$.

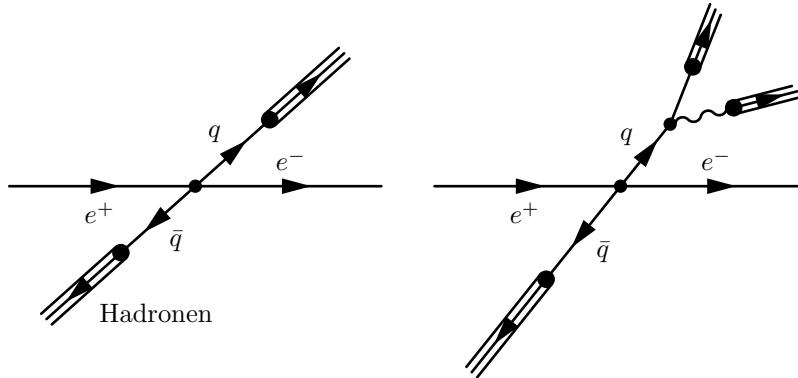
Große Abstände: Potential $\sim r$

Wert für k : $k \simeq 1$ GeV/fm. e^+e^- -Vernichtung bei sehr hohen Energien ($E_e \gtrsim 30$ GeV): Normaler Prozess: Fragmentation des $q\bar{q}$ -Paares in Hadronen. $E_e \gtrsim 30$ GeV \rightarrow typisch 10 Hadronen (meistens Pionen).

Transversalimpuls $p_T \simeq \frac{\hbar}{R_0} \leq 0,5$ GeV.

Longitudinalimpuls $p_L \simeq 6$ GeV. \Rightarrow

- i) Bündelung der Hadronen in 2 „Jets“.
- ii) Flugrichtung, wie die der primären Quarks.



3-Jet: Ereignisse höherer Ordnung in α_s
 Verhältnis 3-Jet/2-Jet - Ereignisrate \rightarrow Messung von α_s :

$$\alpha_s = 0,16 \pm 0,03 \quad (\sqrt{s} = 46 \text{ GeV})$$

Winkelverteilung der 3-Jet-Ereignisse untereinander. \rightarrow Messung Gluonenspin.

$$J_G = 1$$

Gluonen sind *Vektorbosonen* wie die Austauschquanten der elektromagnetischen und der schwachen WW.

4.3 Quarkonia

Vergleich zum Positronium (e^+e^-): Coulombpotential $V_{em} = -\frac{\alpha}{r}$ und

$$E_n = -\frac{\alpha^2 mc^2}{4n^2} \quad \text{mit}$$

- $m = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ und
- n : Hauptquantenzahl ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Spin-Bahn bzw. Spin-Spin-WW erzeugt Triplett 3S_1 und Singlett 1S_0 Zustände
 \Rightarrow Feinstrukturaufspaltung mit

$$\Delta E \sim \frac{\alpha^4 mc^2}{n^3}$$

$$\text{QCD: } V_{QCD} = \underbrace{-\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}}_{\Delta E(2S-1S) : \sim m \cdot \alpha^2} + \underbrace{kr}_{\sim m^{-1/3}}$$

$$\Delta E(2S-1P) : \sim m \cdot \alpha^4$$

System	Masse/MeV	$\Delta E(\sim \alpha^2 m)$	$\Delta E(\sim \alpha^4 m)$
e^+e^-	0,511	5,1 eV ($\alpha = \frac{1}{137}$)	$3,6 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$
$\psi = c\bar{c}$	1870	589 MeV ($\alpha \simeq 0,3$)	130 MeV
$Y = b\bar{b}$	5280	565 MeV ($\alpha \simeq 0,3$)	110 MeV

Kapitel 5

Schwache Wechselwirkung

Alle Hadronen und Leptonen nehmen an der schwachen Wechselwirkung teil. Leptonen unterliegen nur der schwachen und (bei Ladung) der elektromagnetischen Wechselwirkung.

Q	$L_e = 1$	$L_\mu = 1$	$L_\tau = 1$
0	ν_e	ν_μ	ν_τ
-1	e^-	μ^-	τ^-

mit $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$

$m_\mu = 105 \text{ MeV}/c^2$ und

$m_\tau = 1777 \text{ MeV}/c^2$

Leptonzahlerhaltung: Individuelle \mathcal{L} -Zahl L_e, L_μ, L_τ

$$L_\mu: \quad \begin{array}{l} \pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \\ 0 = -1 + 1 \end{array} \quad \text{erlaubt}$$

$$L_\mu: \quad \begin{array}{l} \nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p \\ +1 + 0 = +1 + 0 \end{array} \quad \text{erlaubt}$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma \quad \text{verboten}$$

Exp.: $R(\mu \rightarrow e\gamma) < 1,2 \cdot 10^{-11} \cdot R(\mu \rightarrow e\nu\nu)$.

Klassifizierung der schwachen WW:

Leptonisch: $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ (elastische ν -Streuung)
 $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$

Semileptonisch: $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$
 $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$
 $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$

Nichtleptonisch: $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- p$
 $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ oder $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^+$
 hier: $\Delta S = 1$ (auch bei $K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$) und verboten in elektromagnetischer und starker WW.

Merkmal: Lange Lebensdauern ($\tau \gg 1 \cdot 10^{-19}$ s) und kleine Wirkungsquerschnitte ($\sigma \ll 1 \cdot 10^{-38}$ cm²) bei Energien $\lesssim 1 \cdot 10^2$ GeV.

Bsp.: $p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$

Fusion von Wasserstoff zu Deuterium in der Sonne: Reaktionsrate ($\rho \simeq 1 \cdot 10^2$ g/cm³; $kT \simeq$ keV) $\simeq 1 \cdot 10^{-10}$ a

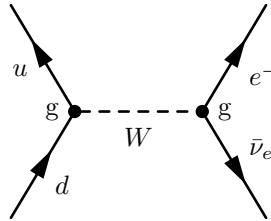
5.1 Betazerfall von Kernen: Fermitheorie

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

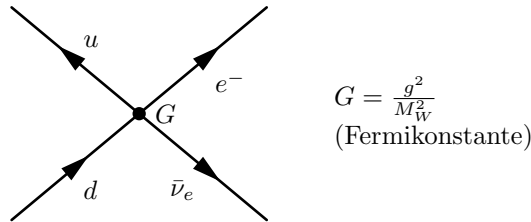
Im Quarkbild:

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

über Austausch eines W-Bosons:



Wegen $M_W \simeq 80$ GeV/ c^2 ist $q^2 \ll M_W^2 \rightarrow$ effektive Vierfermionkopplung.



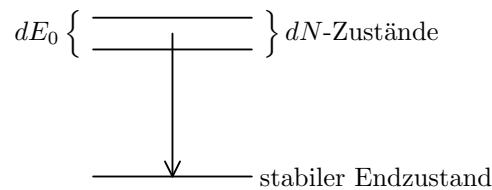
Übergangswahrscheinlichkeit nach Fermi:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} G^2 |\mathcal{M}|^2 \frac{dN}{dE_0}$$

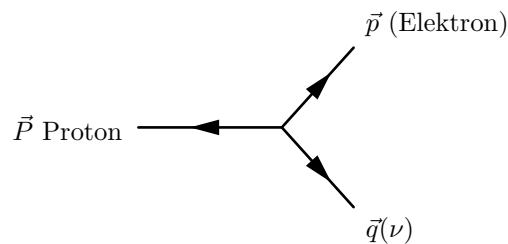
mit

- E_0 : Energie des Endzustandes
- $\frac{dN}{dE_0}$: Endzustandsdichte („Phasenraum“)
- $|\mathcal{M}|^2$: Quadrat des Matrixelements

$|\mathcal{M}|^2$ hat Größenordnung 1 für erlaubte Kernübergänge.



Impulsverteilung:



Betazerfälle

Gesamtspin von $e^- \bar{\nu}_e$: \emptyset „Fermi“-Übergang

Gesamtspin von $e^- \bar{\nu}_e$: 1 „Gamov-Teller“

$$W_{GT} \simeq 3 \cdot W_F \quad (\text{Spinmultiplizität})$$

$$\frac{dN}{dE_0} = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} = \text{Impuls Elektron} \\ \vec{q} = \text{Impuls Neutrino} \\ \vec{p} = \text{Impuls Proton} \end{array} \right\} n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Wegen $m_\nu \ll m_e \ll m_p$ ist ($E_0 \simeq \text{MeV}$). $E_p = p^2/2m_p \simeq \text{keV}$ und vernachlässigbar. Für $m_\nu = 0$ gilt $qc = E_0 - E$.

Zahl der Phasenraumzustände $[p, p + dp]$:

$$\frac{V d\Omega}{h^3} p^2 dp$$

Im Einheitsvolumen ($V = 1$):

$$\frac{4\pi p^2}{h^3} dp$$

Für das Neutrino:

$$\frac{4\pi q^2}{h^3} dq$$

Proton: $\vec{p} = -(\vec{p} + \vec{q})$

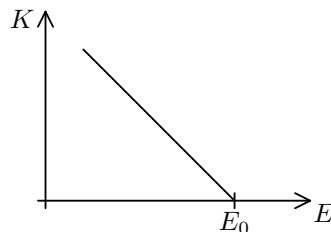
$$\Rightarrow d^2N = \frac{16\pi^2}{h^6 c^3} p^2 q^2 dp dq$$

Mit $q = (E_0 - E)/c$ und $dq = dE_0/c$ gilt

$$\frac{d^2N}{dE_0} = \frac{16\pi^2}{h^6 c^3} p^2 (E_0 - E)^2 dp$$

\Rightarrow Elektronenspektrum $N(p) dp \sim p^2 (E_0 - E)^2 dp$

Kurie-Diagramm: $K = \sqrt{N(p)}/p^2 \sim E_0 - E$

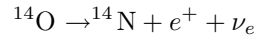


Wechselwirkung Elektron im Coulombfeld des Kerns: Fermifunktion $F(Z, E)$

→ e^- -Spektrum zu kleineren Energien

→ e^+ -Spektrum zu höheren Energien

Gesamtzerfallsrate $N \sim \int_0^{E_0} N(p) dp \sim E_0^5 \Rightarrow$ Bestimmung von G



($J^p = O^+ \rightarrow J^p = O^+$ mit $|\mathcal{M}_{fi}|^2 = 1$)

$$G = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

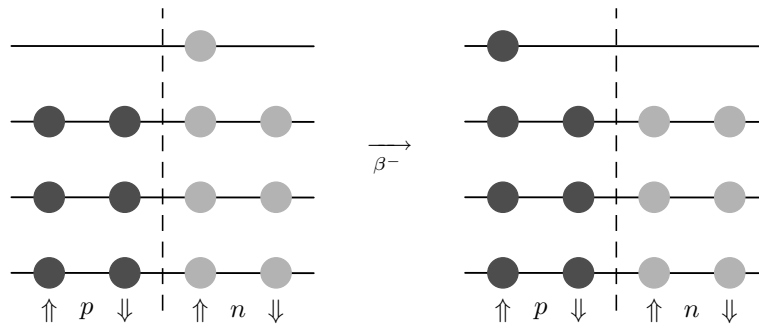
Für $m_\nu > 0$ gilt

$$N(p) dp F(Z, E) \sim p^2 (E_0 - E)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_0 - E}\right)^2} dp$$

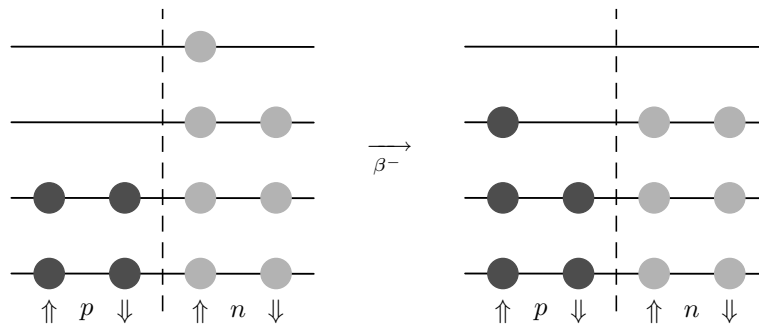
„KATRIN“: Ziel ist $m_\nu \simeq 0.2 \text{ eV}/c^2$.

Erlaubte und verbotene Übergänge

$|\mathcal{M}_{if}|^2$ maximal bei Spiegelkernen → „übererlaubte“ Übergänge:



„Erlaubte Übergänge“:



Auswahlregeln:

Drehimpuls der Leptonen $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ mit $s = 0, 1$.

Kernspins: $\vec{I}_i = \vec{I}_f + \vec{j}$

Bei vorgegebenen \vec{I}_i, \vec{I}_f kann j sein:

$$|I_i - I_f| \leq j \leq I_i + I_f$$

Für vorgegebenes j :

$$|\Delta I| \leq j$$

Fermi-Übergänge ($S = 0$): $|\Delta I| < l$

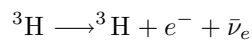
Fermi-Übergänge ($S = 1$): $|\Delta I| < l + 1$

Erlaubte Übergänge: $l = 0$ wegen punktförmiger Wechselwirkung bei nuklearen Energien ($\simeq \text{MeV} \ll M_w c^2$).

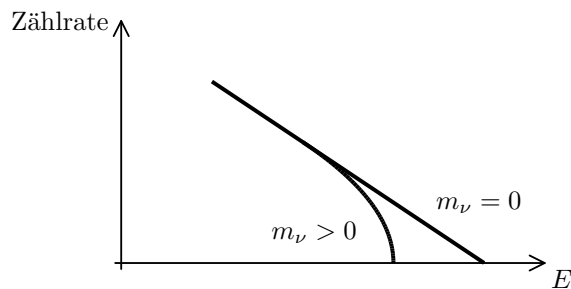
Verbotene Übergänge: $l \neq 0$ und $\Delta I \geq 1$.

Ist das Neutrino massiv?

Experimenteller Test $\bar{\nu}_e$: „Endpunktmessungen“ e^- -Spektrum



$Q = 18.3 \text{ keV}$



Experimentelle Resultate (1996):

$m_\nu < 4.35 \text{ eV}$ (Triotsk, Rußland)

$m_\nu < 7.2 \text{ eV}$ (Mainz)

Nachweis des Neutrinos (Reines, Cowan 1956)

Wirkungsquerschnitt

$$\text{allgemein } \underbrace{a + b}_i \rightarrow \underbrace{c + d}_f$$

Fluß $\phi = n_a \cdot v_i$

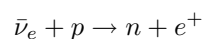
Übergangsrate $W = \sigma \phi = \sigma \cdot n_a \cdot v_i$

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{H}_{if}|^2 \frac{dn}{dE_0}$$

$$\Rightarrow \sigma = |\mathcal{H}_{if}|^2 \frac{p_f^2 dp_f}{v_i dE_0} g_f$$

mit p_f = Impuls des Endzustands und g_f = Anzahl der möglichen Spinzustände.

$\frac{dp_f}{dE_0} = \frac{1}{v_f}$ mit v_f = relative Geschwindigkeit von c und d .



„inverser β -Zerfall“

$$\Rightarrow \sigma = \frac{G^2}{\pi} \frac{p^2}{v_i v_f} (|\mathcal{M}_F|^2 + |\mathcal{M}_{GT}|^2)$$

$v_i = v_f \simeq c$ und $p \simeq (E_\nu - q)/c$ mit $Q =$ Schwellenenergie.

$$Q = (m_n + m_{e^+} - m_p)c^2 = 1,8 \text{ MeV} \quad |\mathcal{M}_F|^2 + |\mathcal{M}_{GT}|^2 \simeq 4$$

Numerisch: $\sigma(\bar{\nu}_e p \rightarrow n e^+) = 9.6 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2 \cdot (E_\nu - Q)^2$, Genauigkeit $\simeq 2 \cdot 10^{-3}$!
(Grund: σ korreliert mit τ_n)

Paritätsoperationen, Ladungskonjugation, Zeitumkehr P, C, T

Parität: $P: \vec{x} \xrightarrow{P} -\vec{x}$

Polare Vektoren (z.B. Impuls): $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$

Axiale Vektoren (z.B. Drehimpuls): $\vec{J} \rightarrow \vec{J}$

Ist $\psi(\vec{r})$ Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems:

$$\left. \begin{array}{l} P\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}) \\ P^2\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \end{array} \right\} P^2 = \mathbb{1} \text{ } P \text{ ist unitär}$$

Gilt $[H, P] = 0$ ist P eine Erhaltungsgröße ($H =$ Hamiltonoperator). Eigenwerte von P : ± 1

z.B.: Wellenfunktion des H-Atoms

$$P\psi(r, \theta, \phi) = (-1)^l \psi(r, \theta, \phi)$$

($l =$ Bahndrehimpuls-Quantenzahl $= 0, 1, 2, \dots$)

Auswahlregel für Dipolübergänge: Paritätsänderung! \rightarrow Eigenparität des Photons (Dipolstrahlung) $P_j = -1$

Bestimmung von Eigenparitäten

z.B. π^- : Pioneneinfang in ${}^2\text{H}$: $\pi^- + {}^2\text{H} \rightarrow n + n$

Grundzustand ${}^2\text{H}$: $l = 0$, Einfang π^- aus der s -Schale

$$\rightarrow P_{\pi^-} \cdot P_p \cdot \underbrace{P_n}_{1} (-1)^0 = P_n P_n (-1)^{l^*}$$

Gesamtdrehimpuls ${}^2\text{H}$: $J = 1 \rightarrow l^* = 1$, d.h. Parität (Anfangszustand) $= -1$.

Mit $P_p = P_n = +1$ (Konvention) gilt $P_{\pi^-} = -1$.

„ τ - θ “-Paradoxon (1956)

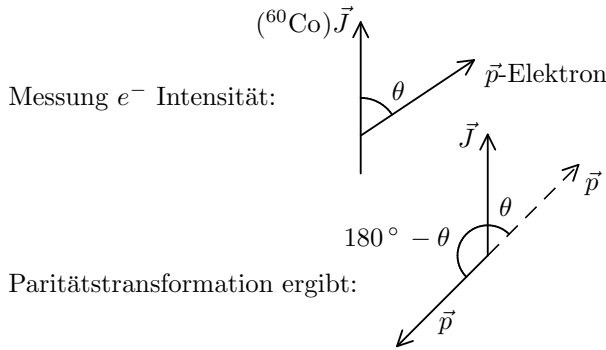
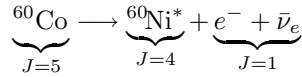
$$K^+ \rightarrow \begin{array}{c} 2\pi \\ \text{(pos. Par.)} \end{array}, K^+ \rightarrow \begin{array}{c} 3\pi \\ \text{(neg. Par.)} \end{array}$$

Existieren 2 Teilchen („ τ “ und „ θ “), die in allen Quantenzahlen identisch sind (aber in verschiedene Kanäle zerfallen), oder ist die Parität in der schwachen Wechselwirkung verletzt?

(Lee, Yang 1957)

Wu-Experiment (1957)

Tiefemperaturexperiment: β -Zerfall von ^{60}Co bei $T \simeq 10$ mK in einem Magnetfeld.



Paritätserhaltung bedeutete $I(\theta) = I(180^\circ - \theta)$ (keine Vorwärts-Rückwärtsasymmetrie) aber das experimentelle Resultat ist $I(\theta) = 1 - \frac{v}{c} \cos \theta$ mit $v = e^-$ -Geschwindigkeit.

Die e^- bevorzugen Emission gegen Spinrichtung von ^{60}Co (bzw. gegen eigene Spinrichtung!).

→ Experimenteller Beweis für die Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung. Formal:

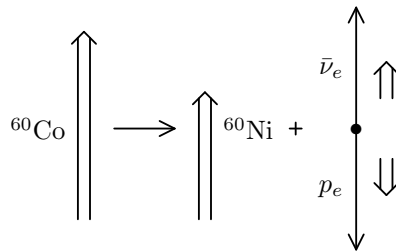
$$I(\theta) = 1 - \frac{v}{c} \cos \theta = 1 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E/c}$$

mit $\vec{\sigma} :=$ Einheitsvektor in Spinrichtung und $\vec{p} :=$ Impulsvektor in Spinrichtung. $\vec{\sigma}\vec{p}$ ist ein „Pseudoskalar“.

$$P(\vec{\sigma}\vec{p}) = -\vec{\sigma}\vec{p}$$

Die Paritätserhaltung verlangte, daß Erwartungswerte von Pseudoskalaren verschwinden.

Elektronen von ^{60}Co sind teilweise polarisiert.



Schwache Wechselwirkung bevorzugt linkshändige e^- , und rechtshändige $\bar{\nu}_e$. Polarisationsgrad (= Helizität) der e^- (Vergleiche $I(0)$ und $I(180^\circ)$):

$$I(0) = 1 - \frac{v}{c} \quad I(180^\circ) = 1 + \frac{v}{c}$$

$$H = \frac{I(0) - I(180^\circ)}{I(0) + I(180^\circ)} = \frac{-2\frac{v}{c}}{2} = -\frac{v}{c}$$

Für Teilchen (e^- , μ^- , τ^- , ν_e , ν_μ , ν_τ):

$$H = -\frac{v}{c}$$

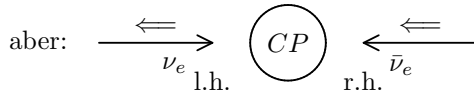
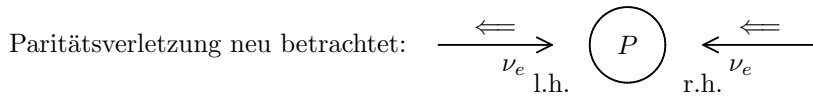
Für Antiteilchen:

$$H = +\frac{v}{c}$$

Für masselose Neutrinos:

$$H = -1 \quad (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$$

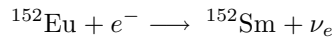
$$H = +1 \quad (\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau)$$



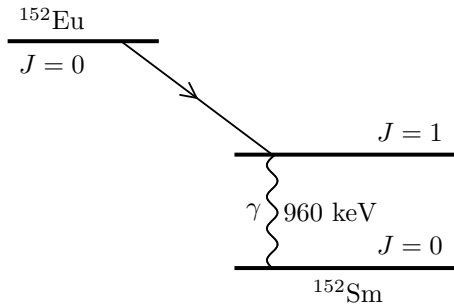
Ist die schwache Wechselwirkung invariant gegenüber CP -Transformation?
 $c :=$ „Ladungskonjugation“, z.B. $c|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle$, $c|e^-\rangle = |e^+\rangle$

Messung der Neutrinohelizität

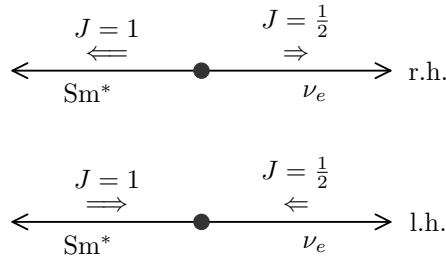
Quelle:



e^- -Einfang aus der K -Schale)



Drehimpulserhaltung: Das rückgestoßene $^{152}\text{Sm}^*$ hat die gleiche Polarisation wie das ν_e .



Gammaemission und Absorption

In „Vorwärtsrichtung“: γ hat die gleiche Polarisation wie ν_e . Resonanzabsorption:



nur möglich für die in Vorwärtsrichtung emittierten Photonen (Rückstoßenergie!).

→ Messung der Polarisation der Photonen, die resonant absorbiert werden. Ergebnis:

$$H(\nu_e) = -1$$

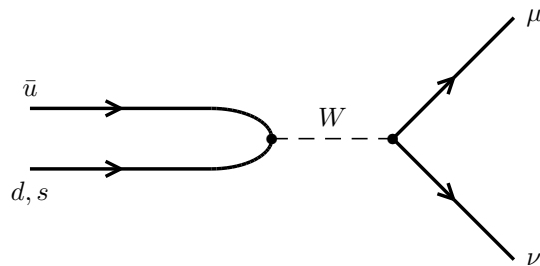
5.2 Schwache Zerfälle seltsamer Teilchen: Cabibbo-Theorie

z. B. $K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ oder $\Lambda^0 \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ sind gegenüber ähnlichen Zerfällen ohne s -Quark Beteiligung unterdrückt.

Quarkbild

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad \bar{u}d \rightarrow \bar{\mu}\bar{\nu} \quad (\Delta s = 0)$$

$$K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad \bar{u}s \rightarrow \bar{\mu}\bar{\nu} \quad (\Delta s = 1)$$



und $R(\pi^-/K^- \text{-Zerfall}) \simeq 19$ (Phasenraumbereinigt) $\Delta S = 1$ Übergänge sind unterdrückt.

Cabibbo (1963): Die an der schwachen WW teilnehmenden d' , s' -Quarks sind gegenüber den Eigenzuständen d , s um einen Winkel gedreht:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

Kopplung für $\Delta S = 0$ semileptonisch: $G \cos \theta_c$ und für $\Delta S = 1$: $G \sin \theta_c$

	ΔS	Rate
$\pi \rightarrow \mu\nu$	0	$G^2 \cos^2 \theta_c$
$K \rightarrow \mu\nu$	1	$G^2 \sin^2 \theta_c$
$p \rightarrow n e^+ \bar{\nu}_e$	0	$G^2 \cos^2 \theta_c$
$K^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e$	1	$G^2 \sin^2 \theta_c$
$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$	0	G^2

Bester experimenteller Wert: $\theta_c \simeq 13^\circ \Rightarrow \cos^2 \theta_c \simeq 0,95, \sin^2 \theta_c \simeq 0,05$.

5.3 Schwache Mischungsverhältnis mit 6 Quarks

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

\mathcal{U}_{CKM} := unitäre „Mischungsmatrix“ *CKM*: „Cabibbo-Kobayashi-Maskawa“. Bedeutung der Matrixelemente $U_{qq'}$. $|U_{qq'}|^2$ = Übergangswahrscheinlichkeit $q \leftrightarrow q'$ bei schwachen Prozessen. Zahl der freien Parameter von \mathcal{U}_{CKM} : 3 (reelle) Mischungswinkel, 1 (imaginäre) Phase.

$$\mathcal{U}_{ud} \simeq 0,975 \pm 0,001$$

$$\mathcal{U}_{cs} \simeq 0,974 \pm 0,001$$

$$\mathcal{U}_{tb} \simeq 0,999 \pm 0,001$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} u \\ \updownarrow \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \updownarrow \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ \updownarrow \\ b \end{pmatrix} \quad \text{nicht unterdrückt}$$

\mathcal{U}_{CKM} nahezu diagonal.

$$\mathcal{U}_{us} \simeq 0,220 \pm 0,004 (\text{Cabibbo})$$

$$\mathcal{U}_{cb} \simeq 0,040 \pm 0,008$$

$$\mathcal{U}_{cd} \simeq 0,220 \pm 0,004$$

$$\mathcal{U}_{ts} \simeq 0,040 \pm 0,008$$

Übergänge zwischen „benachbarten“ Familien unterdrückt

$$U_{ub} \simeq 0,003 \pm 0,002$$

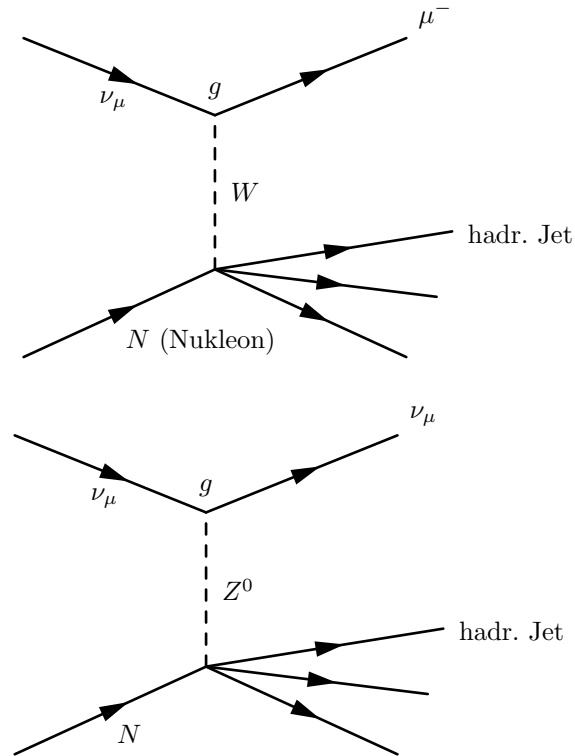
$$U_{td} \simeq 0,004 \text{ bis } 0,015$$

Übergänge Familie 1 \leftrightarrow 3 *stark* unterdrückt. Bemerkung:

- i) Hier handelt es sich *immer* um geladene schwache WW (i.e. W^\pm Austausch)
- ii) Imaginäre Phase $\neq 0 \Rightarrow$ CP-Verletzung
- iii) Unitarität, z. B. $|\mathcal{U}_{ud}|^2 + |\mathcal{U}_{us}|^2 + |\mathcal{U}_{ub}|^2 = 1$. Experimentelle Überprüfung ist ein wichtiger Test des Standardmodells.

5.4 Neutrale Ströme

Entdeckung 1973 (Hasert et al.); ν_μ -Wechselwirkungen



$$R(Z^0)/R(W^\pm) \simeq 0,25$$

$\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu + \text{Hadronen}$ ist ähnlich zu $e^- N \rightarrow e^- + \text{Hadronen}$ (hier elektromagnetische WW mit γ -Austausch).

Elektroschwache Theorie:

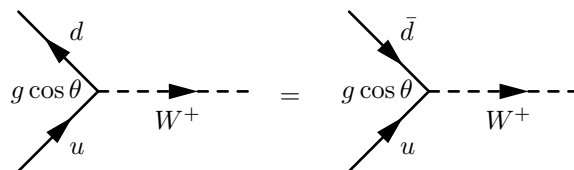
Verknüpfung der W^\pm, Z^0 -Kopplung g mit der γ -Kopplung an geladene Leptonen und Quarks. In etwa $e \simeq g$ Da $G = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{g^2}{q^2 + M_W^2} = \frac{g^2}{M_W^2}$

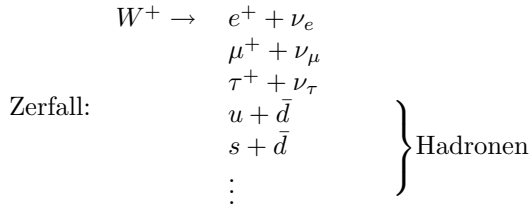
$$\Rightarrow M_W \simeq \frac{e}{\sqrt{G}} \simeq 1 \cdot 10^2 \text{ GeV}$$

und ebenso M_Z

5.5 Nachweis W^\pm, Z^0

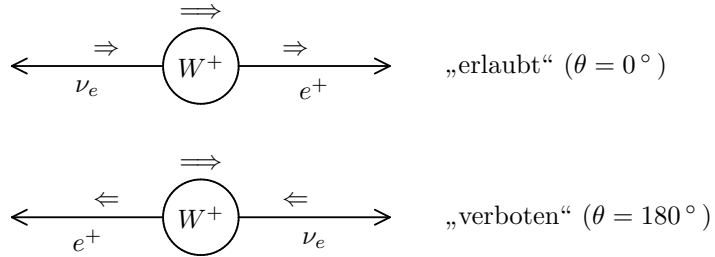
$p\bar{p}$ -Collider mit $E_{p,\bar{p}} > 1 \cdot 10^2 \text{ GeV}$. W-Erzeugung: $u + \bar{d} \rightarrow W^+, \bar{u} + d \rightarrow W^-$.
Z. B.:





Z^0 -Erzeugung: $u + \bar{u} \rightarrow Z^0, d + \bar{d} \rightarrow Z^0$

Z^0 -Zerfall: $Z^0 \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-$ Hadronen (aus $q\bar{q}$). Zerfall:



$\Rightarrow W^+ \rightarrow e^+\nu_e$ erfolgt mit einer Winkelverteilung $\sim (1 + \cos\theta)^2$.

Experimentelle Resultate:

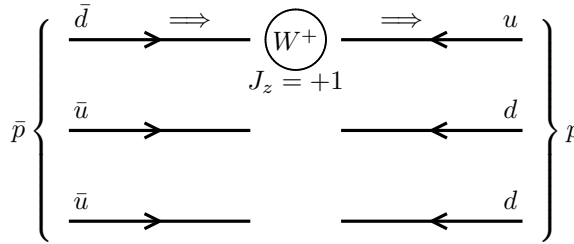
$$M_{W^\pm} = (80, 33 \pm 0, 15) \frac{\text{GeV}}{c^2}$$

$$M_{Z^0} = (91, 187 \pm 0, 007) \frac{\text{GeV}}{c^2}$$

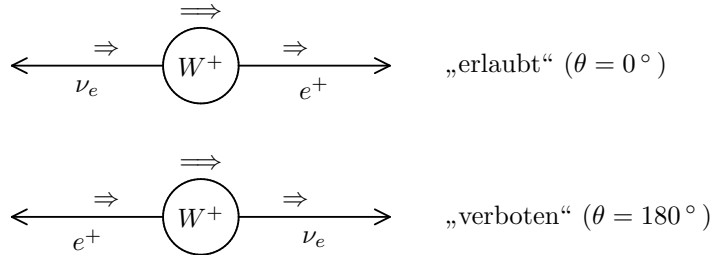
Experimentelle Signatur: Rein leptonische Signale (z. B. e^+, ν_e).

Rate gegenüber $p\bar{p}$ -Hadronen (durch starke WW) um $\sim 1 \cdot 10^9$ unterdrückt!

W^\pm : Ein gelad. Lepton mit großem „Transversalimpuls“



die W -Bosonen sind polarisiert (P-Verletzung!)



Kinematik $\rightarrow m_W = 80,2 \text{ GeV}$. Nachweis Z^0 in e^+e^- -Collidern:

$$e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow f\bar{f}$$

f : (Fermi-)Elementarteilchen. Zerfallsbreite: $\Gamma_Z = \frac{1}{\tau_Z} = \sum_f \Gamma_f$

i) Hadronen:

$$\Gamma_h = \Gamma_u + \Gamma_d + \Gamma_s + \Gamma_c + \Gamma_b$$

$$(m_t \simeq 180 \text{ GeV} > m_z/2)$$

ii) geladene Leptonen:

$$\Gamma_l = \Gamma_e + \Gamma_\mu + \Gamma_\tau \simeq 3 \cdot \Gamma_e$$

$$(m_\tau \ll m_z/2)$$

iii) Neutrinos:

$$\Gamma_\nu = N_\nu \cdot \Gamma_\nu$$

mit N_ν : Anzahl der Neutrinofamilien

$$\Rightarrow N_\nu = \underbrace{\frac{1}{\Gamma_\nu}}_{\text{Theorie}} \cdot \underbrace{(\Gamma_Z - \Gamma_h - 3\Gamma_e)}_{\text{Experiment}}$$

$$\Rightarrow N_\nu = 2,991 \pm 0,016$$

$$m_z = 91,2 \text{ GeV}/c^2$$

Kapitel 6

Standardmodell

SM: Theorie der starken WW (QCD) & Theorie der elektroschwachen WW.
elektromagn. & schwach

QCD: Kap. 2, Eichtheorie mit der Symmetriegruppe $SU(3)$

elektroschwache Theorie: wird im Folgenden behandelt.

Eichtheorie, Symmetriegruppe $SU(2) \times U(1)$

$SU(2)$: Isospin, $U(1)$: Hyperladung ($U(1) \neq U(1)_{em}$)

Strategie: 1) Auffinden der Symmetriegruppe, globale Eichtransformationen, \mathcal{L}_0 invariant

2) globale \rightarrow lokale Eichinvarianz mit $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$, Eichfelder, WW und Dynamik der Eichfelder

3) Symmetriebrechung (neu!), nur für EW

6.1 Chirale Fermionen

Dirac-Matrizen γ^μ

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$, $\bar{\gamma}_5 = -\gamma_5$, $\gamma_5^2 = 1$
(wobei $\bar{\Gamma} \equiv \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$)

Dirac-Spinor: $\psi(x)$

links-chiraler (auch: linkshändiger) Spinor: $\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi$

rechts-chiraler (auch: rechtshändiger) Spinor: $\psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi$

$\left(\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$: Projektions-Operatoren auf R-L-Chiralität

Für $|\vec{p}| \gg m$ gilt: $\frac{1}{2}\gamma_5 u_{\pm}(p) = \pm \frac{1}{2}u_{\pm}(p)$ wobei $u_{\pm}(p)$ Helizitätseigenzustände zu $\pm \frac{1}{2}$ sind Helizität \simeq Chiralität für große Impulse

- $\bar{\psi}_L \gamma^{\mu} \psi_L = \overline{\frac{1-\gamma_5}{2} \psi} \gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} \psi = \bar{\psi} \underbrace{\frac{1-\gamma_5}{2} \gamma^{\mu}}_{\frac{1+\gamma_5}{2} \gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2}} \frac{1-\gamma_5}{2} \psi = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} \psi \equiv J_L^{\mu}$
- $\bar{\psi}_R \gamma^{\mu} \psi_R = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \frac{1+\gamma_5}{2} \psi \equiv J_R^{\mu}$
L-R chirale Ströme.
- $\bar{\psi}_L \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_L = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \frac{1-\gamma_5}{2} \partial_{\mu} \psi_L$
 $\bar{\psi}_R \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_R = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \frac{1+\gamma_5}{2} \partial_{\mu} \psi_R$
- $\bar{\psi}_L \psi_L = \bar{\psi}_R \psi_R = 0$, $\bar{\psi}_L \psi_R = \bar{\psi} \frac{1+\gamma_5}{2} \psi$, $\bar{\psi}_R \psi_L = \bar{\psi} \frac{1-\gamma_5}{2} \psi$
 $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi - m \bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_L i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_L + \bar{\psi}_R i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$
- Vektorstrom: $J_V^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi = J_L^{\mu} + J_R^{\mu}$
Axialvektorstrom: $J_A^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma_5 \psi = -J_L^{\mu} + J_R^{\mu}$

6.2 Symmetriegruppe der elektromagnetischen WW

Leptonen:	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu} \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau} \\ \tau \end{pmatrix}$
Hadronen:	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
Generation:	1.	2.	3.

Zustände des *Isospins*, mit $I_3 = \pm \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } I_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.2.1 Isospin

$\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$ Generatoren mit $[I_a, I_b] = i\epsilon_{abc} I_c$: Lie-Algebra der $SU(2)$.

I_a : Erzeugende (Generatoren) der $SU(2)$.

$SU(2)$: Gruppe der unitären 2×2 -Matrizen, mit $\det = +1$; gleiche Lie-Algebra wie Drehgruppe, gleiche irreduzible Darstellungen: $(2I+1)(2I+1)$ dimensional,

$$I = \underbrace{0}_{\text{Singlett}}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Dublett}}, \underbrace{1}_{\text{Triplet}}, \frac{3}{2}, \dots; \vec{I}^2 = I(I+1)\mathbf{1}$$

$I = \frac{1}{2} : \text{Fundamental-Darstellung}$

$$I = \frac{1}{2}: I_a = \frac{1}{2}\sigma_a, \vec{I} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, I_3 \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu \\ -e \end{pmatrix}$$

6.2.2 Hyperladung Y

definiert über die **Gell-Mann-Nishijima-Relation**:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

Q: elektrische Ladung

Dubletts sind *Eigenzustände* von Y:

$$Y \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = 2Q \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} - 2I_3 \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu \\ -e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$$

$$Y \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = 2Q \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} - 2I_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

Dubletts bilden auch Darstellungen einer $U(1) \equiv U(1)_Y$;

Generator: $Y = y\mathbb{1}$

$$[I_a, Y] = 0 \text{ zusammen mit } [I_a, I_b] = i\epsilon_{abc}I_c \text{ ist dies die Lie-Algebra der Gruppe } SU(2) \times U(1)$$

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}: I = \frac{1}{2}, y = -1; \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}: I = \frac{1}{2}, y = +\frac{1}{3}$$

6.2.3 $SU(2) \times U(1)$ Transformationen

(am Beispiel von $\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$)

globale Transformationen, Eichtransformationen

- infinitesimal:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \rightarrow (1 + i\delta\theta_a I_a + iS\delta\theta_y Y) \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \quad \delta\theta_a, \delta\theta_y \in \mathbb{R}$$

- endlich:

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \rightarrow e^{i\theta_a I_a} e^{i\theta_y Y} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$$

dabei:

$$e^{i\theta_y Y} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = e^{i\theta_y Y} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}, \quad y = -1$$

Phasentransformation $U(1) \equiv U(1)_Y e^{iI_a\theta_a}$: analog zu Drehungen bei Spin $\frac{1}{2}$

Anmerkung:

Lie-Gruppen G_1 mit $T_a^{(1)}$, G_2 mit $T_a^{(2)} \Rightarrow G_1 \times G_2$ hat die Lie-Algebra:

$$[T_a^{(1)}, T_b^{(1)}] = if_{abc}^{(1)} T_c^{(1)}, \quad [T_a^{(2)}, T_b^{(2)}] = if_{abc}^{(2)} T_c^{(2)}$$

$$[T_a^{(1)}, T_b^{(2)}] = 0 \quad \forall a, b$$

6.2.4 Chirale Struktur der Darstellungen

- *Doublets*: $\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$ etc. nur für *linkshändige* Felder, d.h. $\nu = \nu_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\nu$, $e_L = \frac{1-\gamma_5}{2}e$. (Bezeichnung: $\nu \equiv \nu(x)$, $e \equiv e(x)$ für Spinoren zu ν und e , ...)

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} : \quad \boxed{I = \frac{1}{2}} \quad \begin{array}{l} y = -1 \quad (\text{Leptonen}) \\ y = +\frac{1}{3} \quad (\text{Quarks}) \end{array}$$

- *Singletts* für *rechtshändige* Felder: e_R, u_R, d_R (vorerst kein ν_R)

$$\boxed{I = 0} \quad Y=2Q = \begin{cases} -2 \text{ für } e_R \\ +\frac{4}{3} \text{ für } u_R \\ -\frac{2}{3} \text{ für } d_R \end{cases}$$

L-R-Felder sind in verschiedenen Darstellungen

- $(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\gamma^\mu\partial_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ etc. sind invariant unter $\rightarrow e^{i\frac{\theta_a}{2}\sigma_a}e^{i\theta_y Y} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$, ($Y = -1$).
- $\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R$ etc. sind invariant unter $\rightarrow e^{i\theta_y Y} e_R$, ($y = -2$)
- $\bar{e}_L e_R, \bar{e}_R e_L$ sind *nicht* invariant $\Rightarrow m_e \bar{e}e = m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$ nicht invariant Eine eichinvariante Lagrange-Dichte \mathcal{L}_0 darf keine Massenterme enthalten (!) Daher vorerst: alle $m = 0$ (Leptonen und Quarks)
- *Lagrange-Dichte* für freie Felder, invariant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)i\gamma^\mu\partial_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_L i\gamma^\mu\partial_\mu e_R + \\ &+ (\bar{u}_L, \bar{d}_L)i\gamma^\mu\partial_\mu \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{d}_R i\gamma^\mu\partial_\mu d_R + \\ &\quad + \bar{u}_R i\gamma^\mu\partial_\mu u_R \equiv \\ &\equiv \bar{\nu}_L i\cancel{\partial}\nu_L + \bar{e}_L i\cancel{\partial}e + \bar{u}_L i\cancel{\partial}u + \bar{d}_R i\cancel{\partial}d \end{aligned}$$

Globale Eichtransformation:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} &\rightarrow e^{i\frac{\theta_a}{2}\sigma_a}e^{i\theta_y(-1)} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} &\rightarrow e^{i\frac{\theta_a}{2}\sigma_a}e^{i\theta_y(\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\ e_R &\rightarrow e^{i\theta_y(-2)}e_R \\ u_R &\rightarrow e^{i\theta_y(\frac{4}{3})}u_R \\ d_R &\rightarrow e^{i\theta_y(-\frac{2}{3})}d_R \\ \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L \\ \bar{e}_L \end{pmatrix} &\rightarrow (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)(e^{i\frac{\theta_a}{2}\sigma_a})^\dagger e^{i\theta_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u}_L \\ \bar{d}_L \end{pmatrix} &\rightarrow (\bar{u}_L, \bar{d}_L)(e^{i\frac{\theta_a}{2}\sigma_a})^\dagger e^{i\theta_y(-\frac{1}{3})} \\ \bar{e}_R &\rightarrow \bar{e}_R e^{i\theta_y(2)} \\ \bar{u}_R &\rightarrow \bar{u}_R e^{i\theta_y(-\frac{4}{3})} \\ \bar{d}_R &\rightarrow \bar{d}_R e^{i\theta_y(\frac{2}{3})} \end{aligned}$$

Daraus lässt sich unmittelbar die Invarianz der verschiedenen Terme in \mathcal{L}_0 ablesen.

6.3 Lokale Eichinvarianz, Wechselwirkungen

lokale Eichtransformation $\in SU(2) \times U(1)$: $\theta_a = \theta_a(x)$, $\theta_y = \theta_y(x)$ reelle Funktionen erfordert 4 *Eichfelder*:

$$\begin{aligned} I_a &\leftrightarrow W_\mu^a & SU(2) \\ Y &\leftrightarrow B_\mu & U(1) \end{aligned}$$

kovariante Ableitung:¹

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_2 I_a W_\mu^a + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu$$

mit g_1, g_2 : Kopplungskonstanten für $SU(2), U(1)$ (beachte: I_a, Y für jede Darstellung gesondert wählen)

Dubletts: $\mathcal{D}_\mu^{(L)} = \partial_\mu - ig_2 \frac{\sigma_a}{2} W_\mu^a + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu$

Singletts: $\mathcal{D}_\mu^{(R)} = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu$

Damit erhält man (1. Generation):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\rightarrow (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) i\gamma^\mu (\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\sigma_a W_\mu^a - i\frac{g_1}{2}B_\mu) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \\ &+ \bar{e}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_1 B_\mu) e_R + \\ &+ (\bar{u}_L, \bar{d}_L) i\gamma^\mu (\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\sigma_a W_\mu^a + i\frac{g_1}{6}B_\mu) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \\ &+ \bar{u}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu + i\frac{g_1}{2} \cdot \frac{4}{3} B_\mu) u_R + \\ &+ \bar{d}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu - i\frac{g_1}{2} \cdot \frac{2}{3} B_\mu) d_R = \\ &= \mathcal{L}_0 + \frac{g_2}{2} (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \gamma^\mu \sigma_a \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} W_\mu^a + \frac{g_1}{2} (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} B_\mu + \\ &+ g_1 \bar{e}_R \gamma^\mu e_R B_\mu + (\text{Quarks}) \equiv \\ &\equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \text{ (Fermion-Eichboson)} \end{aligned}$$

¹Vorzeichen und Faktor $\frac{1}{2}$ bei B_μ sind Konvention

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= \frac{g_2}{2}(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\gamma^\mu(\sigma_1 W_\mu^1 + \sigma_2 W_\mu^2) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} & (CC) \\
&+ \frac{g_2}{2}(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} W_\mu^3 + & \\
&+ \frac{g_1}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L)B_\mu + \frac{g_1}{2}(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L)B_\mu + & \\
&+ g_1(\bar{e}_R \gamma^\mu e_R)B_\mu & \left. \vphantom{\mathcal{L}_{int}} \right\} (NC)
\end{aligned}$$

CC: charged current (geladener Strom); NC: neutral current (neutraler Strom)

Schiebe-Operatoren: $I_1 \pm iI_2 = I_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$

$$I_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

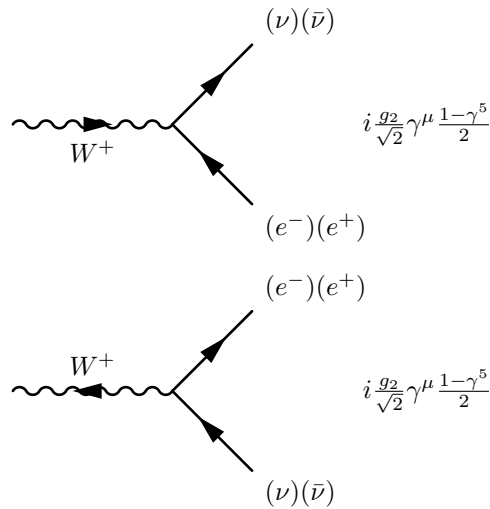
$$\begin{aligned}
\text{geladene Felder:} \quad W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)} \\
\Rightarrow \frac{1}{2}(\sigma_1 W_\mu^1 + \sigma_2 W_\mu^2) &= \frac{1}{\sqrt{2}(I_+ W_\mu^+ + I_- W_\mu^-)}
\end{aligned}$$

(i) (CC):

$$\begin{aligned}
(CC) &= \frac{g_2}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\gamma^\mu I_+ \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} W_\mu^+ + \frac{g_2}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\gamma^\mu I_- \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} W_\mu^- = \\
&= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\gamma^\mu \begin{pmatrix} e_L \\ 0 \end{pmatrix} W_\mu^+ + (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_L \end{pmatrix} W_\mu^- \right\} = \\
&= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^+ + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^- \right\} = \\
&= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} e \cdot W_\mu^+ + \bar{e} \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu \cdot W_\mu^- \right\}
\end{aligned}$$

beschreibt WW zwischen W^\pm und ν, e :

- Feynman-Graphen für Vertices:



(ii) (NC):

$$\begin{aligned}
(NC) &= \frac{g_2}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) W_\mu^3 - \frac{g_2}{2}(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^3 + \\
&+ \frac{g_1}{2}(\nu_L \gamma^\mu \nu_L) B_\mu + \frac{g_1}{2}(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) B_\mu + \\
&\quad + g_1(\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) B_\mu = \\
&= \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L)(g_2 W_\mu^3 + g_1 B_\mu) + \\
&= \frac{1}{2}(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L)(-g_2 W_\mu^3 + g_1 B_\mu) + \\
&+ (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) g_1 B_\mu
\end{aligned}$$

W_μ^3, B_μ sind neutrale Vektorbosonen, keines kann das Photon sein, da

- keine Kopplung an ν
- gleiche Kopplung für L und R

Ansatz: Linearkombination

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

invers:

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\theta_W : \text{elektroschwacher Mischungsverhältnis}}$$

A_μ : Photon (?) und Z_μ : Z-Boson sollen physikalische Felder sein, d.h. zugehörige Teilchen beschreiben.

Damit erhält man für die ν -WW:

$$\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) \{ (-s_W g_2 + c_W g_1) A_\mu + (g_2 c_W + g_1 s_W) Z_\mu \}$$

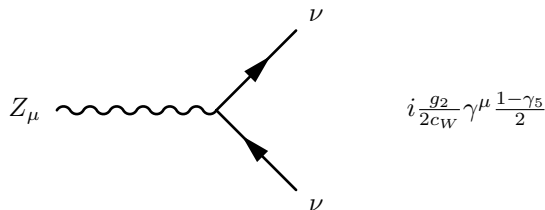
Wenn A_μ das Photonfeld sein soll, darf es nicht an ν koppeln, daher:

$$\boxed{s_W g_2 = c_W g_1} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \tan \theta_W = \frac{g_1}{g_2}; \quad g_2 c_W + g_1 s_W = g_2 c_W + \frac{s_W^2}{c_W} g_2 = \frac{g_2}{c_W} (c_W^2 + s_W^2) = \frac{g_2}{c_W}$$

$$\text{Also: } \frac{g_2}{2c_W} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) \cdot Z_\mu$$

Vertex:



Mit * erhält man:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & -g_2 W_\mu^3 + g_1 B_\mu = \\
& = 2s_W g_2 A_\mu + \left(\frac{s_W^2}{c_W} g_2 + c_W g_2\right) Z_\mu = \\
& = 2s_W g_2 A_\mu + \frac{g_2}{c_W} (2s_W^2 - 1) Z_\mu \\
\bullet \quad & g_1 B_\mu = s_W g_2 A_\mu + \frac{s_W^2}{c_W} g_2 Z_\mu
\end{aligned}$$

und damit für die e-WW:

$$\begin{aligned}
& (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) \cdot \left\{ s_W g_2 A_\mu + \frac{g_2}{2c_W} (2s_W^2 - 1) Z_\mu \right\} + \\
& + (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \cdot \left\{ s_W g_2 A_\mu + \frac{s_W^2}{c_W} g_2 Z_\mu \right\} = \\
& = (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \cdot A_\mu \cdot (s_W g_2) + \\
& + (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) \cdot Z_\mu \frac{g_2}{2c_W} (2s_W^2 - 1) + \\
& + (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \cdot Z_\mu \frac{g_2}{2c_W} \cdot 2s_W^2 = \\
& = e \cdot (\bar{e} \gamma^\mu e) A_\mu \quad \text{mit } e = g_2 s_W + \\
& + \frac{g_2}{2c_W} \left\{ (2s_W^2 - 1) (\bar{e} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e) + 2s_W^2 \bar{e} \gamma^\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} e \right\} Z_\mu = \\
& = e \cdot (\bar{e} \gamma^\mu e) A_\mu + \\
& + \frac{g_2}{4c_W} Z_\mu \left\{ (2s_W^2 - 1 + 2s_W^2) \bar{e} \gamma^\mu e - (2s_W^2 - 1 - 2s_W^2) \bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e \right\} \\
& = e (\bar{e} \gamma^\mu e) A_\mu + \\
& + \frac{g_2}{4c_W} \left\{ (4s_W^2 - 1) \bar{e} \gamma^\mu e + \bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e \right\} Z_\mu
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{NC}^{(A)} = e \cdot (\bar{e} \gamma^\mu e) A_\mu \quad \hat{=} QED$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NC}^{(Z)} &= \frac{g_2}{2c_W} \left\{ \left(-\frac{1}{2} + 2s_W^2\right) \bar{e} \gamma^\mu e - \left(-\frac{1}{2}\right) \bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e \right\} \equiv \\
&\equiv \frac{g_2}{2c_W} \left\{ \bar{e} \gamma^\mu (v_e - a_e \gamma_5) e \right\} \cdot Z_\mu
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
a_e &= -\frac{1}{2} = I_3^{(3)} \\
v_e &= -\frac{1}{2} + 2s_W^2 = I_3^e - 2Q_e s_W^2
\end{aligned}$$

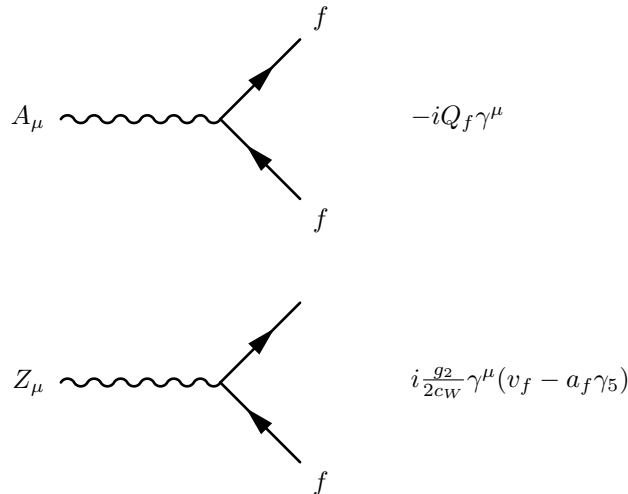
Dasselbe Spiel für die Quarks ergibt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{NC} &= -e \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f A_\mu \\
&+ \frac{g_2}{2c_W} \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) \psi_f \cdot Z_\mu
\end{aligned}$$

($f = \nu, e, u, d, \dots$)

$$\begin{cases} a_f = I_3^f \\ v_f = I_3^f - 2Q_f s_W^2 \end{cases}$$

Vertices für NC:



Beachte: g_1, g_2 sind universale Konstanten, äquivalent:

$$g_2 = \frac{e}{\sin \theta_W}, \quad \frac{g_2^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi \sin^2 \theta_W} \quad 2$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_W} = \frac{1}{31,5} = 0,032 \quad \alpha = \frac{1}{137}$$

Kopplung der schwachen WW > Kopplung der em WW

Eichfelder

$$W_\mu^a, B_\mu \leftrightarrow \underbrace{W_\mu^\pm, Z_\mu}_{\text{schw. WW}}, \quad \underbrace{A_\mu}_{\text{e.m. WW}}$$

eigene Dynamik, Konstruktion längs Richtlinien im Kap. 2.2

→ zunächst Feldstärken:

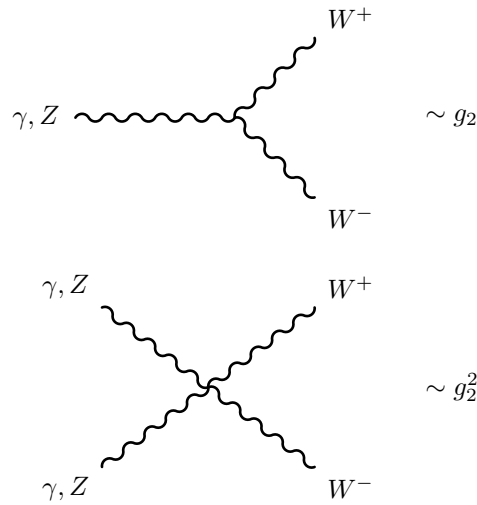
$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c$$

→ dann Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{W,B} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \underbrace{\frac{1}{4} \sum_a W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu}}_{\text{enthält trilineare und quadrilineare WW-Terme}}$$

²experimentell: $\sin^2 \theta_W \simeq 0,23$



außerdem zu beachten: Propagatoren aus den quadratischen Termen $(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2, (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)^2 \rightarrow$ Feldgleichungen \rightarrow Greensche Funktionen

Problem:

alle Eichfelder sind masselos

OK für Photon, jedoch

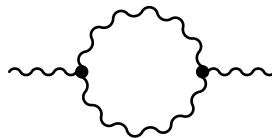
W^\pm, Z sind massiv:³ $M_W = 80$ GeV, $M_Z = 91$ GeV

nach den Fermion-Massen ist dies ein weiteres Massenproblem. \Rightarrow Addieren von Massentermen möglich:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{M_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}$$

führt jedoch zu schwerwiegenden Problemen:

- WQ divergiert für $W - W$ ($Z - Z$)-Streuung bei hohen Energien, im Widerspruch zur Unitarität der S-Matrix
- Theorie nicht mehr renormierbar, unkontrollierbare Divergenzen in höheren Ordnungen.



Propagatoren $\sim \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{h_\mu h_\nu}{M^2}}{h^2 - M^2}$
 zusätzliche Potenzen $\sim \frac{h_\mu h_\nu}{M^2}$

³weiteres Argument: $M_W = 0, M_Z = 0 \Rightarrow$ Reichweite der schwachen WW = ∞ , analog zum em. Feld

Ausweg: Higgs-Mechanismus

Einführung von Massentermen unter Beibehaltung der Eichinvarianz durch die *spontane Brechung* der elektroschwachen Symmetrie:

- (i) Symmetrie von \mathcal{L} erhalten
- (ii) Symmetrie des Grundzustands gebrochen

Beispiele aus anderen Gebieten:

- Ferromagnetismus (Drehsymmetrie)
- Supraleitung ($U(1)$ -Symmetrie)

Higgs-Mechanismus ist entlehnt aus der Festkörperphysik, Analogon zur Supraleitung.⁴

6.4 Symmetriebrechung, Higgs-Mechanismus

Zunächst ein Beispiel mit $U(1)$ -Symmetrie. Betrachte komplexes Skalarfeld $\phi(x)$ mit einer Selbst-Kopplung.

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - V(\phi) = |\partial_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H}$ Hamilton-Dichte (=Energiedichte)

$$\mathcal{H} = \underbrace{|\partial_0 \phi|^2 + |\nabla \phi|^2}_{\geq 0} + V(\phi)$$

Minimum von \mathcal{H} = Minimum von V für $\phi = \phi_0 = \textit{konst.}$

$$\phi_0 = v : \quad \text{Grundzustand, Vakuum}$$

$V = V(|\phi|)$: \mathcal{L} symmetrisch unter $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi$, kontinuierlich $U(1)$.

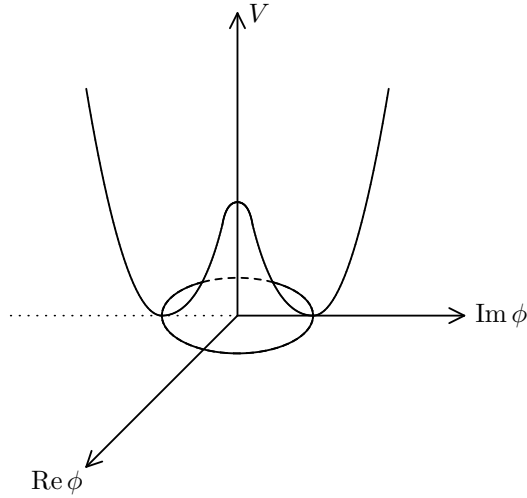
$$v = 0 : \quad \phi_0 = v = 0 \quad \text{symmetrisch unter } U(1)$$

$$v \neq 0 : \quad \phi'_0 = e^{i\alpha} v \neq \phi_0 \quad \text{nicht symmetrisch}$$

jedoch: $V(\phi_0) = V(\phi'_0) \Rightarrow$ entartetes Vakuum

spontane Brechung der Symmetrie

⁴Anderson, Brout, Englert, Kibble, Higgs angewandt auf schwache WW: Weinberg, Salam (1967)



$$\phi(x) = \eta(x)e^{e\theta(x)}$$

$$V(\phi) = V(\eta)$$

Minimum bei $|\phi| = v$: $V'(v) = 0$, $V''(v) > 0$. Entwickeln um v : $\eta(x) = v + \frac{1}{\sqrt{2}}H(x)$

$$V(\eta) = \underbrace{V(v)}_{\text{const, irrelevant}} + \frac{1}{2}V''(v) \cdot \frac{1}{2}H^2 + \dots$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - \frac{1}{2}H^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}V''(v)}_{=M_H^2 > 0} + v^2(\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) + \text{WW-Terme}$$

H -Feld massiv,

θ -Feld masselos, „Goldstone-Feld“

spontan gebrochene Symmetrie $\Rightarrow \exists$ masseloses Goldstone-Feld

Spezialfall des Goldstone-Theorems

kontinuierliche Symmetrie, Generatoren T_1, \dots, T_N

$$T_a \phi_0 \neq 0 \quad \text{für } a = 1, \dots, k \quad \text{gebrochene Symmetrie}$$

$$T_a \phi_0 = 0 \quad \text{für } a=k+1, \dots, N \quad \text{ungebrochen}$$

\Rightarrow es gibt k masselose Goldstone-Felder. In Kombination mit Eichtheorie:

$U(1)$ -Eichtheorie

$A_\mu(x)$ Eichfeld, $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{eichinvariant}$$

wie zuvor: Minimum von V bei $\phi_0 = v, v \neq 0$ \mathcal{L} symmetrisch unter

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{e\alpha(x)\phi(x)}$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x)$$

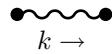
$\phi(x) = \eta(x)e^{i\theta(x)}, \eta = v + \frac{H}{\sqrt{2}}$. Wähle $\alpha(x) = -\theta(x)$: $\phi'(x) = \eta(x), A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta(x)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\phi, A_\mu) = \mathcal{L}(\phi', A'_\mu) = |(\partial_\mu - igA'_\mu)(v + \frac{H}{\sqrt{2}})|^2 - V(\eta) - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}$$

- Das masselose θ -Feld ist verschwunden, θ -Feld ist unphysikalisch, da eich-abhängig. Ordnen nach Potenzen ergibt:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + v^2 g^2 A'_\mu A'^\mu}_{\text{massives } A\text{-Feld, } v^2 g^2 = \frac{M_A^2}{2}, M_A \sim vg} + \underbrace{\frac{1}{2} [(\partial_\mu H)^2 - M_H^2]}_{\text{neutrales Skalarfeld, massiv}} + \dots$$

Propagator:



$$\frac{i}{h^2 - M_A^2} \underbrace{\left(-g_{\mu\nu} + \frac{h_\mu h_\nu}{M_A^2} \right)}_{\Sigma(3 \text{ phys. Polarisationen})}$$

- A-Feld ist massiv, hat 3 Polarisationszustände (2 transversale und 1 longitudinalen)

	ϕ	A_μ
Symmetrie manifest	H, θ	2 transversale Polarisationen
physikalischer Inhalt manifest (unitäre Eichung)	H	3 Polarisationen (1 longitudinale)

θ -Feld \rightarrow longitudinaler Polarisationszustand des A_μ -Feldes Beachte: \mathcal{L} ist immer noch eichinvariant. Die Brechnung der Symmetrie, die zur A-Masse führt, ist genügend „glatt“, zerstört nicht die Renormierbarkeit. Für höhere Ordnungen: wähle Eichung so, dass Propagator



$$-i \frac{g_{\mu\nu}}{h^2 - M_A^2}$$

Verhalten für $h^2 \rightarrow \infty$ wie in der masselosen Theorie. Pries: unphysikalische Zustände in inneren Linien.

Anwendung auf $SU(2) \times U(1)$

$\underbrace{W^+, W^-, Z}_{\text{massiv}}, \underbrace{A}_{\text{masselos}}$ erfordert 3 longitudinale Polarisationszustände $\hat{=}$ 3 unphysikalische Skalarfelder. Daher minimale Möglichkeit: skalares Dublet:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 4 \text{ reelle Felder} \\ 3 \text{ unphysikalische} + 1 \text{ physikalisches} \end{matrix}$$

Darstellung zu $I = \frac{1}{2}$ und $Y = +1$.

$$Q = \frac{1}{2}\mathbf{1} + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi^+ \text{ Ladung } 1, \phi^0 \text{ neutral}$$

$U(1)_{em}$ -Symmetrie soll ungebrochen bleiben, da Photon masselos. Daher muss für das Vakuum gelten ($v \neq 0$):

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad Q\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $e^{i\alpha Q}\Phi_0 = \Phi_0$ invariant.

$$SU(2) \times U(1) \text{ Symmetrie spontan gebrochen durch } \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

eichinvariante Lagrange-Dichte für Φ -Feld:

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 \frac{\sigma_a}{2} W_\mu^a + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \quad \text{mit } Y = 1$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad \lambda > 0, \mu^2 > 0$$

- hat Minimum bei $v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} \neq 0$
- ist renormierbar (ϕ^4 -Wechselwirkung)
- minimale Möglichkeit (bekannt aus der Kernphysik als „ σ -Modell“)

ansonsten ist der Ansatz „ad-hoc“.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} + i\chi \end{pmatrix} = \underbrace{U(\phi_1, \phi_2, \chi)}_{\substack{\in SU(2) \times U(1), \text{ Eichtransformation} \\ \text{mit } \phi_1(x), \phi_2(x), \chi(x) \text{ als Parameter,} \\ \text{daher unphysikalisch}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

\Rightarrow durch geeignete Eichtransformation erreicht man die Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix}$$

Diese Eichung heißt *unitäre Eichung*.

$H(x)$: physikalisches Feld, reell (=neutral). Jetzt weiter in der unitären Eichung. Auswertung des kinetischen Terms von \mathcal{L}_Φ für $H = 0$:

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)|_{H=0} &= \\ &= \underbrace{\left(\frac{g_2}{2}v\right)^2}_{M_W^2} W_\mu^+ W^{-\mu} + \end{aligned}$$

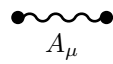
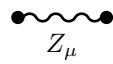
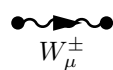
$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} (B_\mu, W_\mu^3) \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix} = \\
 & = \frac{1}{2} (A_\mu, Z_\mu) \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_1^2 + g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \\
 & = \frac{1}{2} \underbrace{(g_1^2 + g_2^2)}_{=M_Z^2} \frac{v^2}{4} (Z_\mu Z^\mu)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{M_W^2}{M_Z^2} = \frac{g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_W} = \cos^2 \theta_W}$$

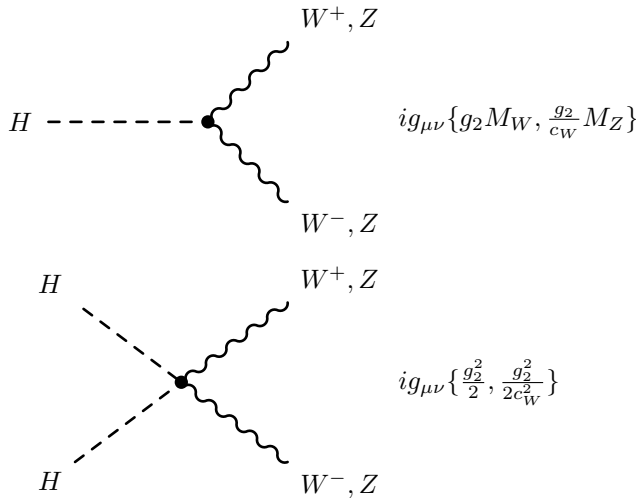
θ_W durch W/Z -Massenverhältnis bestimmt.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{W,B} + \mathcal{L}_\Phi = & \\
 = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \\
 & -\frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \frac{M_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu - \\
 & -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu}) + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \\
 & + (\text{WW-Terme})
 \end{aligned}$$

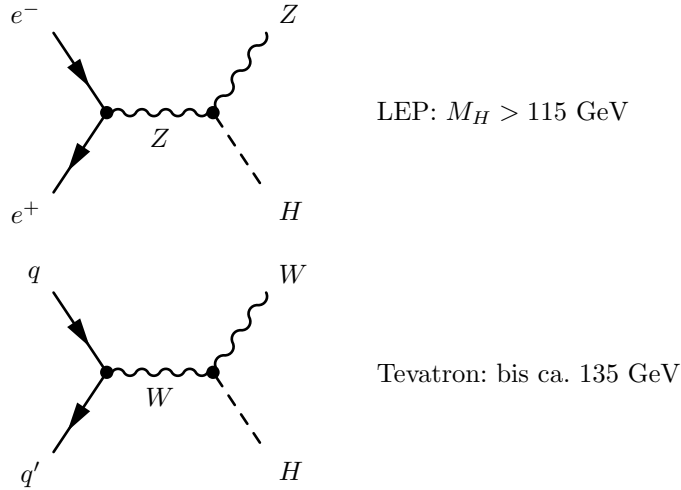
ergibt die Propagatoren

	A_μ	$i \frac{-g_{\mu\nu}}{h^2 + i\epsilon}$ wie (QED)
	Z_μ	$i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{h_\mu h_\nu}{M_Z^2}}{h^2 - M_Z^2 + i\epsilon}$
	W_μ^\pm	$i \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{h_\mu h_\nu}{M_W^2}}{h^2 - M_W^2 + i\epsilon}$

aus $|D_\mu \Phi|^2$ folgt die $H - W, Z$ -WW:



$\left. \begin{matrix} H ZZ \\ H WW \end{matrix} \right\}$ Kopplung wichtig für die experimentelle Suche:



6.5 Fermionmassen und -Mischung

noch offen: wie kommen die Fermionmassen ins Spiel?
 ($m_f = 0$ wegen Eichinvarianz)

Strategie: Yukawa-Wechselwirkung

= WW zwischen Fermionen und Skalar (ursprünglich für Photon/Neutron mit Pion).

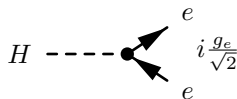
Skalar=Higgs, $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}$ mit unitärer Eichung

6.5.1 Eine Generation

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = g_e \left[(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \Phi e_R + \bar{e}_R \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right]$$

g_e : neue Kopplungskonstante, eichinvariant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= \frac{g_e}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (0, v + H) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{g_e}{\sqrt{2}} \underbrace{(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)}_{=\bar{e}e} (v + H) = \\ &= \underbrace{\frac{g_e v}{\sqrt{2}}}_{m_e} \bar{e}e + \underbrace{\frac{g_e}{\sqrt{2}} \bar{e}e H} \end{aligned}$$



liefert fehlenden Massenterm + zusätzliche H-Fermion-WW

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}} \quad g_e = \frac{m_e}{v} \sqrt{2}$$

mit $M_W = \frac{1}{2}g_2v$, $v = \frac{2M_W}{g_2}$:

$$g_e = \sqrt{2}m_e \cdot \frac{g_2}{2M_W} = g_2 \frac{m_e}{\sqrt{2}M_W} \ll g_2$$

- Für μ, τ völlig analog: $m_\mu = g_\mu \frac{v}{\sqrt{2}}$, $m_\tau = g_\tau \frac{v}{\sqrt{2}}$
- Für d-Quarks: $g_d [(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\Phi + h.c.] \rightarrow m_d = \frac{g_d v}{\sqrt{2}}$
- Für u-Quarks: Φ^c statt Φ .

c-konjugiertes Feld: $\Phi^c = -i\sigma_2\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi^{0*} \\ \phi^- \end{pmatrix}$,

$\phi^- = (\phi^\dagger)^\dagger$ in der unitären Eichung: $\phi^c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix}$

$-g_u [(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\Phi^c u_R + h.c.] = \frac{g_u v}{\sqrt{2}}(\bar{u}u)$, $m_u = \frac{g_u v}{\sqrt{2}}$

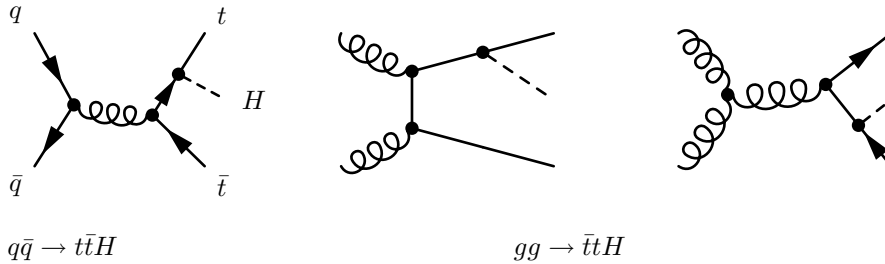
Mit den richtigen Vorzeichen ($-m_f\bar{\psi}\psi$ in \mathcal{L}):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & +g_u [(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\Phi^c u_R + h.c.] - \\ & -g_d [(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\Phi d_R + h.c.] - \\ & -g_l [(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\Phi e_R + h.c.] \end{aligned}$$

allgemein:

$$g_f = \sqrt{2} \frac{m_f}{v}$$

alle leichten Fermionen mit $m_f \ll M_W$ haben sehr kleine Yukawa-Kopplungen. Ausnahme: Top-Quark, $g_t = \sqrt{2} \frac{m_t}{v} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \frac{m_t}{M_W}$ kann direkt bestimmt werden am LHC bei der $t\bar{t}$ -Erzeugung



6.5.2 Mehrere Generationen

Leptonen: Mit $\nu = 0$ keine neuen Phänomene, 2. und 3. Generation wie 1. Generation (Leptonzahl-Erhaltung)

Quarks: Yukawa-WW zwischen verschiedenen Generationen möglich \Rightarrow neue Phänomene: Mischung und CP-Verletzung

WW-Terme mit Yukawa-Kopplungen g_{ij}^u und g_{ij}^d ($i,j=1, \dots, 3$ bezeichnet Generationen), i. A. komplex.

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i,j} g_{ij}^d (\bar{u}_L^i, \bar{d}_L^i) \Phi d_R^j + h.c. =$$

$$= - \sum_{i,j} \underbrace{\left(\frac{v}{\sqrt{2}} g_{ij}^d \right)}_{(m_{ij}^d \equiv M_d)} \bar{d}_L^i d_R^j + h.c. =$$

$$= - \bar{D}_L M_d D_R + h.c.$$

$$D_L = \begin{pmatrix} d_L^1 \\ d_L^2 \\ d_L^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad D_R = \begin{pmatrix} d_R^1 \\ d_R^2 \\ d_R^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix}$$

Entsprechend für u-Quarks, mit $\Phi^c = \frac{(-1)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{i,j} g_{ij}^u (\bar{u}_L^i, \bar{d}_L^j) \Phi^c u_R^j + h.c.$$

ergibt Massenterm $-\bar{U}_L M_u U_R + h.c.$, $M_u = \left(\frac{v}{\sqrt{2}} g_{ij}^u \right)$.

$$U_L = \begin{pmatrix} u_L^1 \\ u_L^2 \\ u_L^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} \quad U_R = \begin{pmatrix} u_R^1 \\ u_R^2 \\ u_R^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix}$$

also: $\mathcal{L}_{\text{Massen}}^{\text{Quarks}} = -\bar{D}_L M_d D_R - \bar{U}_L M_u U_R$

ohne Details: M_u, M_d können diagonalisiert werden durch unitäre Matrizen.

$$\begin{aligned} D_L &= V_L^d D'_L, & D_R &= V_R^d D'_R \\ U_L &= V_L^u U'_L, & U_R &= V_R^u U'_R \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Massen}}^{\text{Quarks}} = -\bar{D}'_L \underbrace{(V_L^d)^\dagger M_d V_R^d}_{=M'_d} D'_R - \bar{U}'_L \underbrace{(V_L^u)^\dagger M_u V_R^u}_{=M'_u} U'_R$$

$$=M'_d = \begin{pmatrix} m_d & & \\ & m_s & \\ & & m_b \end{pmatrix} \quad M'_u = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_c & \\ & & m_t \end{pmatrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix} \text{ Masseneigenzustände.}$$

Übergang von U,D-Basis zu U',D'-Basis, alles durch Masseneigenzustände ausdrücken: was ändert sich?

(i) Propagatoren für $u, d, \dots \rightarrow u', d', \dots$ aus quadratischen Termen in \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} &\bar{u} \not{\partial} u + \dots \\ &= \sum_i \bar{u}_L^i \not{\partial} u_L^i + \bar{u}_R^i \not{\partial} u_R^i + \bar{d}_L^i \not{\partial} d_L^i + \bar{d}_R^i \not{\partial} d_R^i \\ &\equiv \bar{U}_L \not{\partial} U_L + \bar{U}_R \not{\partial} U_R + \bar{D}_L \not{\partial} D_L + \bar{D}_R \not{\partial} D_R \\ &= \bar{U}'_L \not{\partial} U'_L + \bar{U}'_R \not{\partial} U'_R + \bar{D}'_L \not{\partial} D'_L + \bar{D}'_R \not{\partial} D'_R \end{aligned}$$

Da $(V_L^u)^\dagger V_L^u = 1$, $(V_L^d)^\dagger V_L^d = 1$ wegen Unitarität.

(ii) ebenso alle NC-WW-Terme: $\bar{U}_L \gamma^\mu U_L, \bar{U}_R \gamma^\mu U_R, \bar{D}_L \gamma^\mu D_L, \bar{D}_R \gamma^\mu D_R = \bar{U}'_L \gamma^\mu U'_L, \dots$ das bedeutet: NC verursachen *keinen* Generationswechsel der Art $u \leftrightarrow c, c \leftrightarrow t$

keine FCNC \equiv Flavour Changing Neutral Currents

(jedoch in höherer Ordnung, Schleifen \Rightarrow unterdrückt)

(iii) WW-Terme mit CC:

$$\begin{aligned} \bar{U}_L \gamma^\mu D_L, \bar{D}_L \gamma^\mu U_L &\rightarrow \bar{U}'_L \underbrace{(V_L^u)^\dagger V_L^d}_{=: V_{CKM}} \gamma^\mu D'_L, \bar{D}'_L \underbrace{(V_L^d)^\dagger V_L^u}_{V_{CKM}^\dagger} \gamma^\mu U'_L \\ &= (\bar{u}'_L, \bar{c}'_L, \bar{t}'_L) \gamma^\mu V_{CKM} \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix} \text{ mit } (V_{CKM}: \text{unitäre } 3 \times 3\text{-Matrix}) \\ &= (u', c', t') \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} V_{CKM} \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Von jetzt ab: ausschließlich die Massen-Eigenzustände verwenden, wieder ohne ' bezeichnet, d.h. u, d, ...

$V_{CKM} \neq 1$ ist die einzige physikalisch messbare Konsequenz der Quarkmischung in der Yukawa-WW.

Komplexe 3×3 -Matrix: $9 \cdot 2 = 18$ reelle Parameter.

Unitarität: 9 Bedingungen \Rightarrow 9 reelle Parameter = 3 Winkel + 6 Phasen.

Von den 6 Phasen können 5 mit 5 der 6 Quarkfelder absorbiert werden (durch Redefinition $\psi \rightarrow e^{i\phi}\psi$), nur 1 Phase bleibt physikalisch messbar, daher freie Parameter von V_{CKM} :

3 Winkel $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$

1 Phase δ bzw. $e^{i\delta}$ ($\delta \neq 0 \Rightarrow$ CP-Verletzung).

Allgemein gilt für unitäre $N \times N$ -Matrix:

$$\frac{N(N-1)}{2} \text{ Winkel, } \quad \frac{N(N+1)}{2} \text{ Phasen}$$

$2N - 1$ Phasen sind unbeobachtbar (Absorption)

bleiben

$$\frac{N(N+1)}{2} - (2N-1) = \frac{N^2 + N - 4N + 2}{2} = \frac{N^2 - 3N + 1}{2}$$

Bei 2×2 -Matrix:

$$\frac{N(N-1)}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} \text{ Winkel}$$

$$\frac{N(N+1)}{2} - (2N-1) = \frac{2 \cdot 3}{2} - (2 \cdot 2 - 1) = 3 - 3 = 0 \text{ Phasen}$$

Daher bei nur 2 Quark-Generationen:

Mischung = Drehung (**Cabibbo-Winkel**) $\delta = 0$, keine CP-Verletzung.

Historisch: CP-Verletzung im K^0 -System bekannt vor 3. Quark-Generation.

Leptonen: mit Erweiterung des SM um massive ν ist ebenfalls Generationenmischung möglich.

ν -Masse durch Yukawa-WW erfordert ein ν_R :

$$g^\nu (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \frac{v+H}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \nu_R + h.c. = \bar{\nu}_L \underbrace{\frac{v}{\sqrt{2}} g^\nu}_{m_\nu} \nu_R + h.c.$$

mit m_ν : Dirac-Masse ($m_\nu = m_D$).

ν_R ist SU(2)-Singlett, $I = 0$.

Außerdem: $Q = 0 = I_3 + \frac{Y}{2} \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow$ keine Eich-WW für ν_R , nur winzige Yukawa-WW, da $m_\nu \ll m_e$.

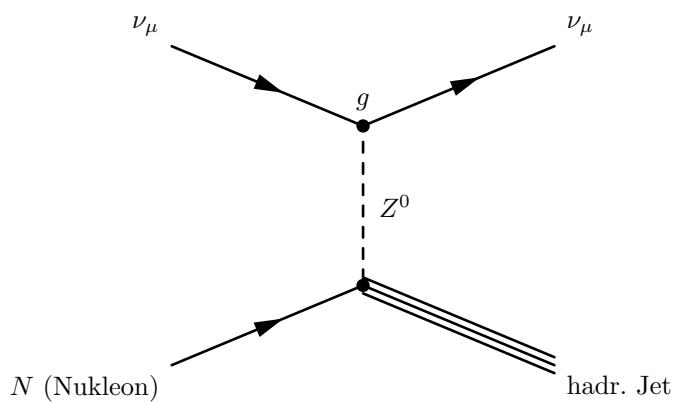
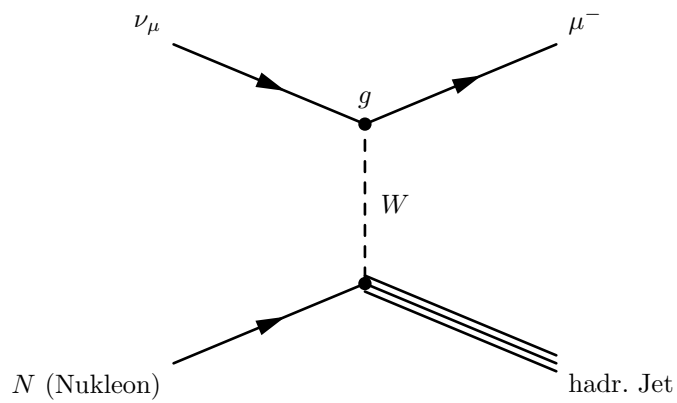
Jedoch weiterer Masseterm möglich, mit $\nu_R^c = C\bar{\nu}_R^T$, ladungskonjugiertes ν_R -Feld ($C = -i\gamma^0\gamma^2$).

$\mathcal{L}_M = \bar{\nu}_R^c M \nu_R$, ($M \gg m_f$), **Majorana-Term**, M : Majorana-Masse

Kapitel 7

Neutrale Ströme

Entdeckung 1973 (Hasert et. al.); ν_μ -WW:



$$R(Z^0)/R(W^\pm) \simeq 0,25$$

$\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu + \text{Hadronen}$ ist ähnlich zu $e^- N \rightarrow e^- + \text{Hadronen}$

(hier: elektromagnetische WW mit γ -Austausch)

Elektroschwache Theorie:

Verknüpfung der W^\pm, Z^0 -Kopplung g mit der γ -Kopplung an geladene Leptonen

und Quarks.

In etwa. $e \simeq g$. Da $G = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{g^2}{q^2 + M_W^2} = \frac{g^2}{M_W^2} \Rightarrow$

$$M_W \simeq \frac{e}{\sqrt{G}} \simeq 1 \cdot 10^2 \text{ GeV}$$

und ebenso M_Z

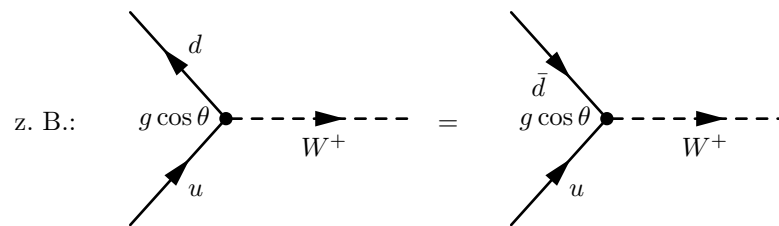
7.1 Nachweis W^\pm, Z^0

$p\bar{p}$ -Collider mit $E_{p,\bar{p}} > 10^2 \text{ GeV}$

W-Erzeugung:

$$u + \bar{d} \rightarrow W^+$$

$$\bar{u} + d \rightarrow W^-$$



Zerfall:

$$W^+ \rightarrow \begin{matrix} e^+ + \nu_e \\ \mu^+ + \nu_\mu \\ \tau^+ + \nu_\tau \\ u + \bar{d} \\ s + \bar{d} \\ \vdots \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} e^+ + \nu_e \\ \mu^+ + \nu_\mu \\ \tau^+ + \nu_\tau \\ u + \bar{d} \\ s + \bar{d} \\ \vdots \end{matrix}} \right\} \text{Hadronen}$$

Z^0 -Erzeugung:

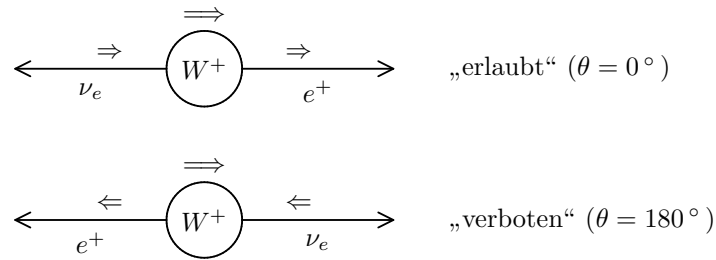
$$u + \bar{u} \rightarrow Z^0$$

$$d + \bar{d} \rightarrow Z^0$$

Z^0 -Zerfall:

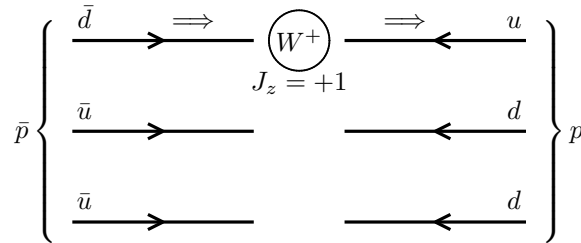
$$Z^0 \rightarrow \begin{matrix} e^+e^- \\ \mu^+\mu^- \\ \tau^+\tau^- \\ \text{Hadronen (aus } q\bar{q}) \end{matrix}$$

Zerfall:

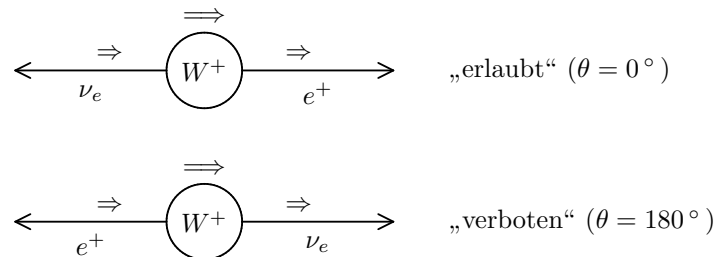


$\Rightarrow W^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ erfolgt mit einer Winkelverteilung $\sim (1 + \cos \theta)^2$. Exp. Resultate:
 $M_{W^\pm} = (80,33 \pm 0,15) \frac{\text{GeV}}{c^2}$; $M_{Z^0} = (91,187 \pm 0,007) \frac{\text{GeV}}{c^2}$.
 Exp. Signatur: Rein leptoniche Signale (z. B. e^+, ν_e). Rate gegenüber $p\bar{p} \rightarrow$
 Hadronen (durch starke WW) um $\sim 10^9$ unterdrückt!

W^\pm : Ein geladener Lepton mit großem „Transversalimpuls“



die W-Bosonen sind polarisiert (P-Verletzung!)



Kinematik $\rightarrow m_W = 80,2 \text{ GeV}$.

Nachweis Z^0 in e^+e^- -Collidern:

$$e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow f\bar{f}$$

f = (Fermi-)Elementarteilchen. Zerfallsbreite $\Gamma_Z = \frac{1}{\tau_Z} = \sum_f \Gamma_f$

i) Hadronen:

$$\Gamma_h = \Gamma_n + \Gamma_d + \Gamma_s + \Gamma_c + \Gamma_b$$

$$(m_\tau \simeq 180 \text{ GeV} > \frac{m_Z}{2})$$

ii) geladene Leptonen:

$$\Gamma_l = \Gamma_e + \Gamma_\mu + \Gamma_\tau \simeq 3 \cdot \Gamma_e$$

$$(m_t \ll \frac{m_Z}{2})$$

iii) Neutrinos

$$\Gamma_{invis} = N_\nu \cdot \Gamma_\nu$$

$$N_\nu = \text{Anzahl der Neutrinfamilien} \Rightarrow N_\nu = \underbrace{\frac{1}{\Gamma_\nu}}_{\text{Theorie}} \underbrace{\Gamma_z - \Gamma_h - 3\Gamma_e}_{\text{Experiment}} \Rightarrow$$

$N_\nu = 2,991 \pm 0,016$ $m_z = 91,2 \text{ GeV}/c^2$. Direkter Nachweis von Neutrinos: über geladene Strom-WW:

$$\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow e^- + {}^{71}\text{Ge} \quad \text{oder}$$

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$$

$$\nu_\mu + {}_Z\text{A} \rightarrow \text{Hadronen} + \mu^-$$

$$\bar{\nu}_\mu + {}_Z\text{A} \rightarrow \text{Hadronen} + \mu^+$$

$$\begin{aligned} \nu_\tau + {}_Z\text{A} &\rightarrow \tau^- + \text{Hadronen} \\ &\rightarrow \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e \sim 18\% \\ &\nu_\tau + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \sim 18\% \\ &\nu_\tau + \text{Hadronen} \sim 64\% \end{aligned}$$

\Rightarrow 3 Familienbild der elementaren Fermiteilchen

$$\begin{array}{l} \text{Quarks:} \\ \text{Leptonen:} \end{array} \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_l & \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_l & \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_l \end{array} + \text{Antiteilchen}$$

$e_r \quad \mu_r \quad \tau_r$

7.2 Zerfall neutraler K^0 -Mesonen

Erzeugung K^0 :

$$\begin{array}{cccc} \pi & + & p & \rightarrow & \Lambda^0 & + & K^0 \\ \text{s:} & & 0 & & 0 & & -1 & & +1 \end{array}$$

Erzeugung \bar{K}^0 :

$$\begin{array}{cccc} \pi^+ & + & p & \rightarrow & K^+ \bar{K}^0 p \\ \text{s:} & & 0 & & 0 & & +1-1 \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{cccccc} \pi^- & + & p & \rightarrow & \bar{\Lambda}^0 & + & \bar{K}^0 & + & n & + & n \\ \text{s:} & & 0 & & 0 & & +1 & & -1 & & 0 & & 0 \end{array}$$

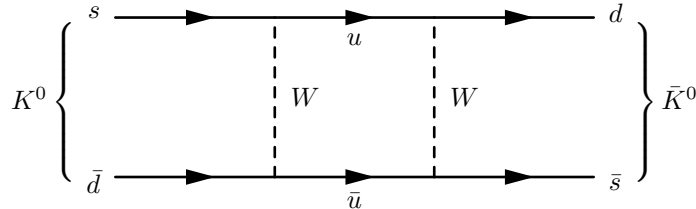
aber nicht:

$$\begin{array}{cccc} \pi^- & + & p & \rightarrow & \Lambda^0 & + & \bar{K}^0 \\ \text{s:} & & 0 & & 0 & & -1 & & -1 \end{array}$$

Strangeness ist in der starken WW eine Erhaltungsgröße. Schwellenenergie für K^0 : 0,9 GeV, für \bar{K}^0 : 1,5 GeV \Rightarrow Erzeugung eines reinen K^0 -Strahls möglich. Beobachtung K^0 -Zerfall:

$$\begin{array}{l} K^0 \rightarrow 2\pi \\ K^0 \rightarrow 3\pi \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \bar{K}^0 \rightarrow 2\pi \\ \bar{K}^0 \rightarrow 3\pi \end{array}$$

$\Rightarrow K^0 - \bar{K}^0$ Oszillationen im Quarkbild (Bsp.):



Übergang mit $\Delta s = 2$ und 2. Ordnung in der schwachen WW.

$$\Psi_K(t=0) = |K^0\rangle \quad \text{aber}$$

$$\Psi_K(t) = \alpha(t) |K^0\rangle + \beta(t) |\bar{K}^0\rangle$$

Teilchen, die schwach zerfallen, sind Eigenzustände von CP (Sharpness ist verletzt).

$$CP |K^0\rangle = \eta |\bar{K}^0\rangle$$

und

$$CP |\bar{K}^0\rangle = \eta' |K^0\rangle$$

Offensichtlich sind $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ keine CP-Eigenzustände. Mit $\eta = \eta' = 1$ (per Definition) bilden wir folgende CP-Eigenzustände:

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

$$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

mit $CP |K_1\rangle = +|K_1\rangle$ und $CP |K_2\rangle = -|K_2\rangle$: K^0 und \bar{K}^0 werden durch Produktionsprozesse (S-Erhaltung) unterschieden. K_1 und K_2 sind die relevanten Zustände im (schwachen) Zerfall.

Zerfallsmoden:

a) $\pi^0\pi^0$ und $\pi^+\pi^-$

$$CP |\pi^0\pi^0\rangle = + |\pi^0\pi^0\rangle$$

$$CP |\pi^+\pi^-\rangle = + |\pi^+\pi^-\rangle$$

CP=+1

b) $\pi^+\pi^-\pi^0$

$$\left. \begin{array}{l} CP(\pi^+\pi^-) = +1 \\ C(\pi^0) = +1 \\ P(\pi^0) = -1 \end{array} \right\} CP = -1$$

$$c) \pi^0 \pi^0 \pi^0$$

$$CP(\pi^0 \pi^0 \pi^0) = -1$$

⇒ Zerfälle in 2 Pionen: $CP = +1$; in 3 Pionen: $CP = -1$.

2-Körperzerfall erfolgt schneller als der in 3 Pionen (wegen Phasenraum)

$$\tau_1(K_1 \rightarrow 2\pi) = 9 \cdot 10^{-10} \text{ sec}$$

$$\tau_2(K_2 \rightarrow 3\pi) = 5 \cdot 10^{-8} \text{ sec.}$$

Amplitude des $|K_1\rangle$ -Zustands

$$a_1(t) = a_1(0) \cdot e^{-(iE_1/\hbar)t} e^{-\Gamma_1 t/2\hbar}$$

mit

- E_1 : Gesamtenergie (ebene Welle-Ansatz)
- $E_1/\hbar = \omega_1$
- $\Gamma_1 = \frac{\hbar}{\tau_1}$: Zustandsbreite

so dass gilt:

$$\begin{aligned} J_{K_1}(t) &= |a_1(t)|^2 = a_1 a_1^* = a_1(0) a_1^*(0) e^{-\Gamma_1 t/\hbar} = \\ &= J_{K_1}(0) e^{-t/\tau_1} \quad (\text{radioaktives Zerfallsgesetz}) \end{aligned}$$

Sei $\hbar = c = 1 \Rightarrow E_1 = m_1$ (Ruhesystem)

$$a_1(t) = a_1(0) \exp(-(\Gamma_1/2 + im_1)t)$$

und für K_2 :

$$a_2(t) = a_2(0) \exp(-(\Gamma_2/2 + im_2)t)$$

Zur Zeit t_0 : reiner K^0 -Strahl $\Rightarrow a_1(0) = a_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ weil $\frac{1}{\sqrt{2}} |K_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |K_2\rangle = |K^0\rangle$. Nach einer Zeit t :

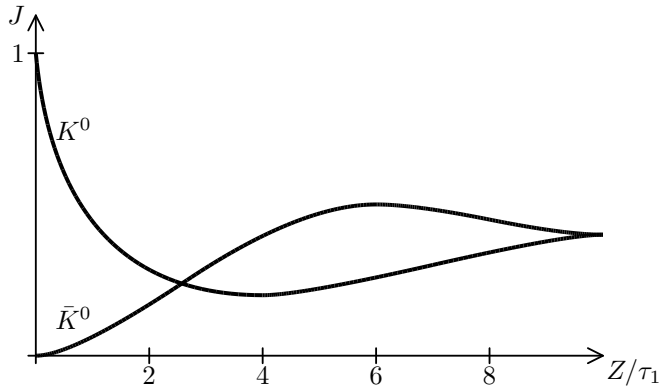
$$J(K^0) = \frac{a_1(t) + a_2(t)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a_1^*(t) + a_2^*(t)}{\sqrt{2}}$$

$$J(K^0) = \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-[(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2]t} \cos(\Delta m t) \right]$$

mit $\Delta m = m_1 - m_2$.

K_1 und K_2 haben unterschiedliche Massen. Grund: Unterschiedliche schwache Kopplungen. $\rightarrow K^0 - \bar{K}^0$ Oszillationen ($\cos(\Delta m t)$).

$$J(\bar{K}^0) = \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - 2e^{-[(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2]t} \cos(\Delta m t) \right]$$



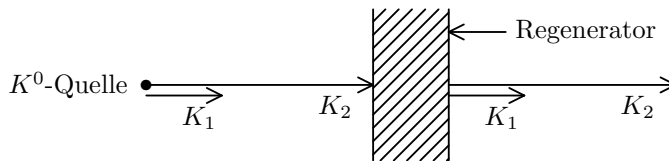
Exp. Ergebnisse: $\Delta m = 3,52 \cdot 10^{-6}$ eV, so dass $\frac{\Delta m}{m} = 7 \cdot 10^{-15}$. K^0 und \bar{K}^0 haben keine festen Masseneigenwerte. Sie sind Mischungen der Masseneigenzustände K_1 und K_2 .

K_1 -Regeneration

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad (\tau_1 = 9 \cdot 10^{-11} \text{ s})$$

$$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad (\tau_2 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ s})$$

Nach einer Laufstrecke $x \simeq c \cdot t \gg c\tau_1$ ist im wesentlichen nur noch $|K_2\rangle$ vorhanden.



Beim Austritt aus dem „Regenerator“ (Materiestück):

K^0 -Amplitude: f

\bar{K}^0 -Amplitude \bar{f} mit $f < 1$, $\bar{f} < 1$ und $f \neq \bar{f}$

(K^0 und \bar{K}^0 wechselwirken unterschiedlich) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(f|K^0\rangle + \bar{f}|\bar{K}^0\rangle) = \\ &= \frac{f - \bar{f}}{2\sqrt{2}} \underbrace{(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)}_{\sqrt{2} \cdot |K_1\rangle} + \frac{f + \bar{f}}{2\sqrt{2}} \underbrace{(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)}_{\sqrt{2} |K_2\rangle} = \\ &= \frac{1}{2}(f - \bar{f})|K_1\rangle + \frac{1}{2}(f + \bar{f})|K_2\rangle \end{aligned}$$

\Rightarrow wegen $f \neq \bar{f}$: Wiederholte Beobachtung kurzlebiger K_1 -Zustände!

7.3 CP-Verletzung im K^0 -Zerfall

Christensen, Cronin, Fitch, Turley 1964

Beobachtung $K_2 \rightarrow 2\pi$ $B_{K_2}(\frac{2\pi}{3\pi} \simeq 10^{-3})$. Ersetzung:

$$K_1 \rightarrow K_s \quad (\text{„short“})$$

$$K_2 \rightarrow K_l \quad (\text{„long“})$$

Maß der CP-Verletzung (Def.)

$$|\eta_{\pm}| = \frac{\text{Ampl.}(K_l \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\text{Ampl.}(K_s \rightarrow \pi^+\pi^-)} = (2,27 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}$$

K_s : Dominanter $CP = +1$ Anteil, kleine $CP = -1$ Beimischung

K_l : Dominanter $CP = -1$ Anteil, kleine $CP = +1$ Beimischung

Die Größe der Beimischung ist $|\eta_{\pm}|$. Mit dieser Modifizierung wird die Intensität der 2π -Zerfälle:

$$I_{2\pi} \sim e^{-\Gamma_s t} + |\eta_{\pm}|^2 e^{-\Gamma_l t} \quad (\text{Beiträge von } K_s \text{ und } K_l) \\ + 2|\eta_{\pm}| \exp\{-t(\Gamma_s + \Gamma_l)/2\} \cos(\Delta m \cdot t + \phi_{\pm}) \quad (\text{Interferenzterm})$$

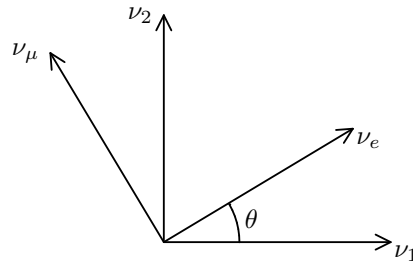
Interferenz („Schwebung“) zwischen K_s und K_l , da beide Zustände über 2π zerfallen können. Exp. Wert: $\phi_{\pm} = 44,6^\circ \pm 1,2^\circ$

7.4 Neutrinooszillationen

Theoretische Fragestellung: $m_\nu = 0$? Exp. Hinweise: „Solares ν -Problem“, Anomalien „atmosphärischer“ ν 's. Maki, Pontecorvo (1968): $\nu_{e,\mu,\tau}$ sind Linearkombinationen von Masseneigenzuständen $\nu_{1,2,3}$ (\rightarrow Mischungsmatrix). Betrachten wir 2 ν -Flavours (z. B. $\nu_{e,\mu}$)

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nu_e = \nu_1 \cos \theta + \nu_2 \sin \theta$$



$\nu_{e,\mu}$: Eigenzustände der schwachen WW

$\nu_{1,2}$: Masseneigenzustände

Propagation im Raum (=Vakuum) wird durch ν_1 und ν_2 bestimmt.

$$\nu_1(t) = \nu_1(0)e^{-iE_1 t} \quad (\hbar = c = 1)$$

$$\nu_2(t) = \nu_2(0)e^{-iE_2 t}$$

mit $|\nu_i(t)|^2 = \text{const}$, ($i = 1, 2$).

Wie ist $|\nu_e(t)|^2$?

Sei bei $t = 0$ $\nu = \nu_e$ (z. B. durch die Reaktion $pp \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$)

$\Rightarrow \nu_e(t) = \nu_1(t) \cos \theta + \nu_2(t) \sin \theta$ mit $\nu_1(0) = \nu_e \cos \theta$ und $\nu_2(0) = \nu_e \sin \theta$, so dass $\nu_e(0) = \nu_e(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \nu_e$

$$\Rightarrow \nu_e(t) = \nu_e (\cos^2 \theta \cdot e^{-iE_1 t} + \sin^2 \theta \cdot e^{-iE_2 t})$$

Nun ist $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$ und für $m_i \ll p$ ist $E_i \simeq p + \frac{m_i^2}{2p}$

Die Wahrscheinlichkeit, das Neutrino zur Zeit t im Zustand ν_e zu detektieren, ist:

$$P_{ee} = \left| \frac{\nu_e(t)}{\nu_e(0)} \right|^2 = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + \underbrace{\sin^2 \theta \cos^2 \theta \left\{ e^{i(E_2 - E_1)t} + e^{-i(E_2 - E_1)t} \right\}}_{\text{Interferenzterm, der für } E_2 \neq E_1 \text{ bzw. } m_2^2 \neq m_1^2 \text{ zu periodischen Oszillationen führt.}}$$

$$P_{ee} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left[\frac{\Delta m^2 \cdot t}{4E} \right]$$

mit $\Delta m^2 := m_2^2 - m_1^2$ und $E = p$ (ν -Energie).

$$P_{e\mu} = 1 - P_{ee} \quad (\text{Wahrscheinlichkeit für Oszillation})$$

Allgemein:
$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

$$U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \vdots & c & s \\ \vdots & -s_{13} & c \end{pmatrix}}_{\theta_{23} \simeq 45^\circ} \begin{pmatrix} c & \vdots & s \\ \dots & 1 & \dots \\ -s & \vdots & c \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} c & s_{12} & \vdots \\ -s & c & \vdots \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\theta_{12} \simeq 32^\circ}$$

- Atmosphäre
- Beschleuniger-
Experimente

- Solare ν - und
Reaktor ν -Exp.

($c = \cos \theta_{ij}$; $s = \sin \theta_{ij}$). θ_{13} ? Obergrenze, $\theta_{13} \lesssim 12^\circ$

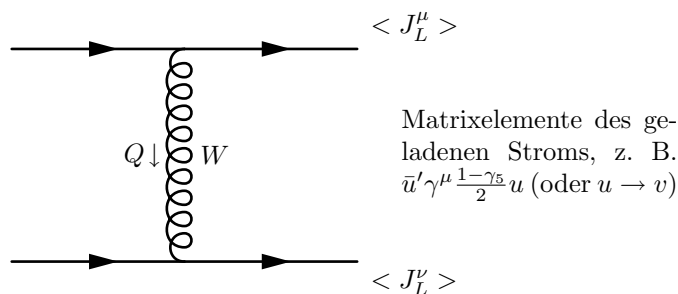
Kapitel 8

Status des Standardmodells, Perspektiven

8.1 Vorhersagen und Tests

8.1.1 Niederenergie-Limes

Betrachte CC-Reaktionen zwischen leichten Fermionen ($m_f \ll M_W$) durch W^\pm -Austausch.



Matrixelement (bis auf Faktoren i):

$$M_{cc} = \left(\frac{g_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \langle J_L^\mu \rangle \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{Q_\mu Q_\nu}{M_W^2}}{Q^2 - M_W^2} \langle J_L^\nu \rangle$$

wobei $|Q^2| \ll M_W^2$, $\frac{Q_\mu Q_\nu}{M_W^2} \rightarrow \mathcal{O}\left(\frac{m_f^2}{M_W^2}\right)$ vernachlässigbar für kleinen Fermionen.
Daher:

$$M_{cc} \simeq \underbrace{\frac{g_2^2}{2M_W^2}}_{= \frac{4G_F}{\sqrt{2}}} \langle J_L^\mu \rangle \langle J_{\mu,L} \rangle$$

effekt. Koppl.
für $|Q^2| \ll M_W^2$

Wichtige Relation:

$$\frac{g_2^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

Mit $M_W^2 = \frac{1}{2}g_2^2v^2$ (siehe Kap. 6.4) erhält man: $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2v^2}$ und damit

$$v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} = 246 \text{ GeV} \quad \text{Fermi-Skala}$$

Weitere Beziehung: $g_2 = \frac{e}{\sin\theta_W}$, $\cos\theta_W = \frac{M_W}{M_Z}$

$$\frac{G_2}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8M_W^2 \sin^2\theta_W} = \frac{e^2}{8M_W^2 (1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2})} \quad (1)$$

Beziehung zwischen Niederenergiegrößen $G_{F,\alpha}$ und M_W, M_Z

historisch:

G_F (μ -Lebensdauer) und $\sin^2\theta_W$ (ν -Streuung) $\rightarrow M_W, M_Z$ Vorhersage. Entdeckung 1983, CERN

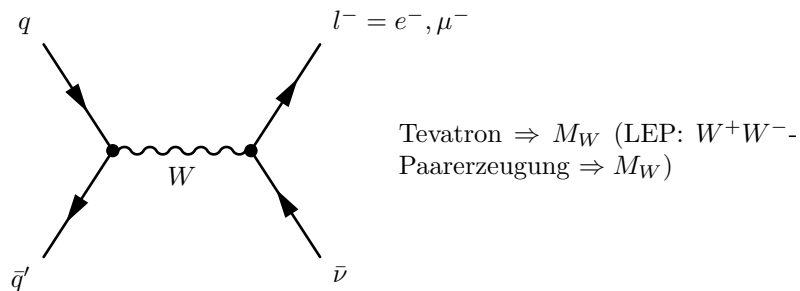
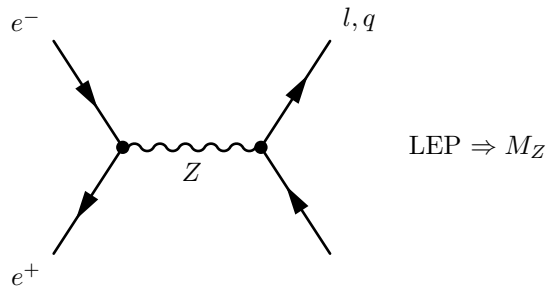
Exp. Daten:

$$M_Z = 91,1876 \pm 0,00021 \text{ GeV} \quad [\text{LEP}]$$

$$M_W = 80,398 \pm 0,0025 \text{ GeV} \quad [\text{LEP, Tevatron}]$$

$$G_F = 1,16637(1) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad [\text{Muon-Lebensdauer}]$$

$$\alpha = \frac{1}{137,0359\dots} \quad [\text{siehe QED, WS 07/08}]$$



ergibt mit (1):

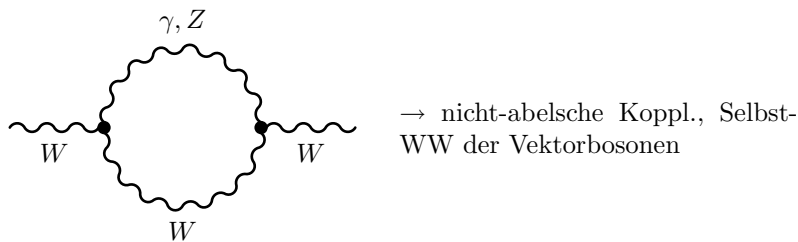
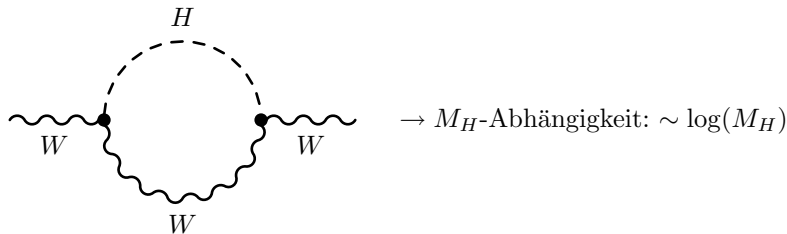
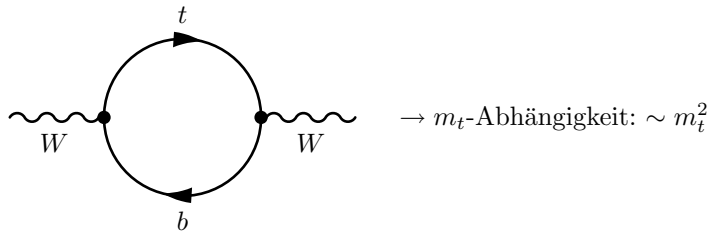
$$M_W^2 \left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}\right) = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} = (37,2805 \text{ GeV})^2$$

nicht erfüllt, wenn $M_{W,Z}^{exp}$ eingesetzt werden, signifikante Abweichung

Erklärung:

höhere Ordnungen, Schleifenbeiträge \rightarrow Präzisionstests der elektroschwachen Theorie (in Analogie zur QED)

- (i) $\alpha \rightarrow \alpha(M_Z) = \frac{1}{129}$ laufende Kopplung genügt nicht
- (ii) alle Loop-Beiträge des SM, u. a.



Gesamte Struktur des SM wird benötigt

Berechnung liefert:

$$\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} = M_W^2 \left(1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}\right) \cdot (1 - \Delta r)$$

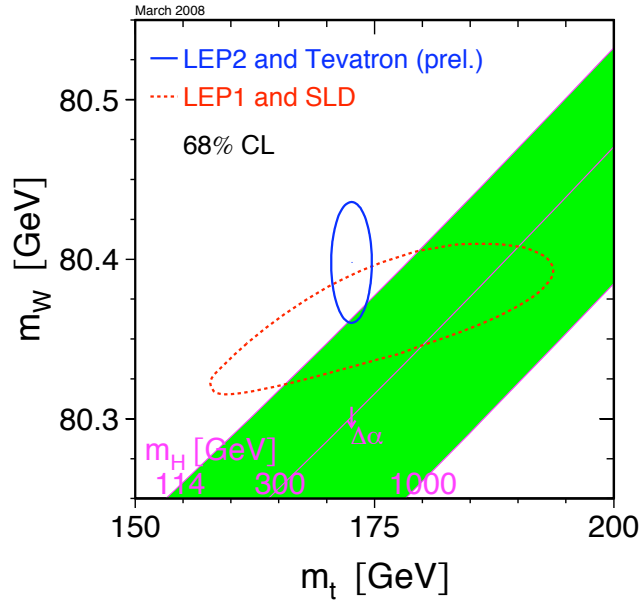
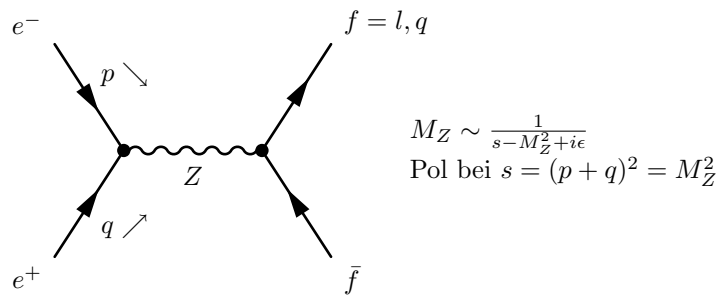


Abbildung 8.1: Einschränkungen an die Higgsmasse M_H

$\Delta r = \Delta r(m_t, M_H)$: Schleifenkorrektur, $\sim 0,03$

Durch Vergleich mit den Daten \Rightarrow Einschränkung an die Higgsmasse M_H , niedrige Werte bevorzugt (nahe 114 GeV, Ausschlussgrenze durch direkte Suche)

8.1.2 Z-Boson-Observable



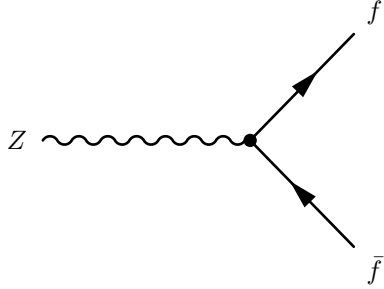
benötigt *Breite* $\Gamma_Z \Leftrightarrow$ endliche Lebensdauer des Z , $\tau_Z \cdot \Gamma_Z (= \hbar) = 1$

$$\frac{1}{s - M_Z^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{s - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z} \quad \text{Breit-Wigner-Form, Resonanz}$$

$$|M_Z|^2 \sim \frac{1}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2}$$

Breite $\Gamma_Z = \sum_f \underbrace{\Gamma(z \rightarrow f\bar{f})}_{\equiv \Gamma_f \text{ partielle Breite}}, f \neq t$

$$\Gamma_f = \frac{1}{64\pi^2 M_Z} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2}} |M_Z|^2 \simeq \frac{1}{64\pi^2 M_Z} |M|^2 \quad \text{für } m_f \ll M_Z$$



$$M = \frac{g_2}{2c_W} \epsilon_{(\lambda)}^\mu \cdot \bar{u} \gamma_\mu (v_f - a_f \gamma_5) v$$

$\epsilon_{(\lambda)}^\mu$: Polarisationsvektor des Z
($\lambda = 1, 2, 3$)

über die 3 Polarisationen mitteln mit Polarisationssumme:

$$\frac{1}{3} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{(\lambda)}^\mu \epsilon_{(\lambda)}^\nu = \frac{1}{3} (-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2})$$

ergibt (kurze Rechnung)

$$\Gamma(z \rightarrow f\bar{f}) = \Gamma_0 (v_f^2 + a_f^2) \cdot N_c^f$$

$$N_c^f = \begin{cases} 1 & \text{für } f = l \\ 3 & \text{für } f = q \end{cases}$$

$$\Gamma_0 = \frac{M_Z}{48\pi} \left(\frac{g_2}{2c_W} \right)^2 = \frac{\sqrt{2} G_F M_Z^3}{12\pi}$$

(mit Relation 1): $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8M_W^2} = \frac{g_2^2}{8c_W^2 M_Z^2}$

$$\Gamma_Z = \underbrace{\sum_{l=e,\mu,\tau} \Gamma(z \rightarrow l^+ l^-)}_{\Gamma_{\text{lept.}}} + \underbrace{\sum_{q \neq t} \Gamma(z \rightarrow q\bar{q})}_{\Gamma_{\text{hadr.}}} + \underbrace{\sum_{\nu} \Gamma(z \rightarrow \nu\bar{\nu})}_{\Gamma_{\text{invisible}}}$$

unsichtbare Breite

$\Gamma_Z, \Gamma_{\text{lept.}}$ und $\Gamma_{\text{hadr.}}$ sind direkt messbar. Aus der Differenz: Zahl der Neutrinos:
 $N_\nu = 3$

Vorhersagen:

- $\Gamma_Z, \Gamma_{\text{lept.}}, \Gamma_{\text{hadr.}}, \sigma(e^+ e^- \rightarrow f\bar{f})$
- Asymmetrien: $\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+ e^- \rightarrow f\bar{f}) = A(1 + \cos^2 \theta) + \underbrace{B \cos \theta}_{\text{antisymm. in } \theta}$

ergibt Vorwärts-Rückwärtsasymmetrie, für $s = M_Z^2$:

$$\left. \begin{aligned} A_{FB}^{(f)} &= \frac{3}{4} A_l A_f \\ A_f &= \frac{2v_f a_f}{v_f^2 + a_f^2} \\ A_e \text{ durch } f \rightarrow e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2 \theta_W$$

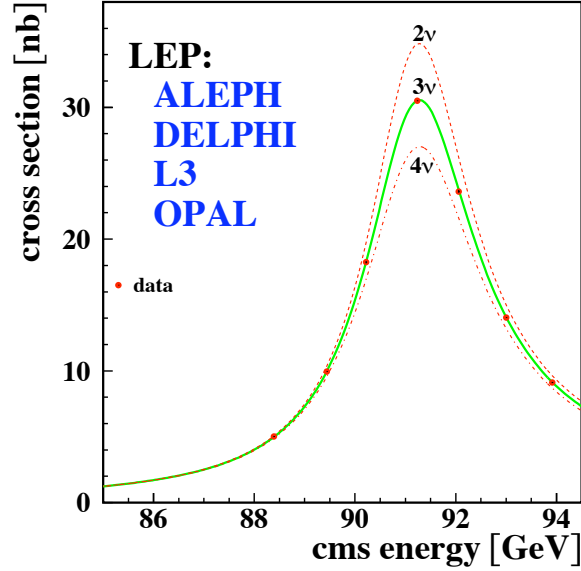


Abbildung 8.2: Zahl der Neutrinos aus Zerfallsbreite Γ_Z

Rechts-Links-Asymmetrie:

$$A_{LR} = \frac{\sigma(e_L^-) - \sigma(e_R^-)}{\sigma(e_L^-) + \sigma(e_R^-)} = A_e$$

gemessen am SLAC Linear Collider, Stanford (SLD-Experiment)

Daten (Beispiele):

Mittelwerte von LEP und SLC:

$$\Gamma_Z = 2,4952 \pm 0,0023 \text{ GeV}$$

$$\sin^2 \theta_W = 0,23153 \pm 0,00016$$

auch hier: Präzisionstests, höhere Ordnungen erforderlich,
 z. B. $\Gamma_Z^{theo} = \Gamma_Z^{theo}(m_t, M_H)$, $\sin^2 \theta_W^{theo} = \sin^2 \theta_W^{theo}(m_t, M_H)$ \rightarrow Sensitivität
 auf M_H (alle Z -Observablen mit 1- und 2-Schleifenbeiträgen berechnet, teilweise
 auch 3- und 4-Schleifen)

8.1.3 W^+W^- -Paarerzeugung in e^+e^- (LEP)

$$e^+e^- \rightarrow W^+W^- \text{ für } s = (p+q)^2 > 4M_W^2$$

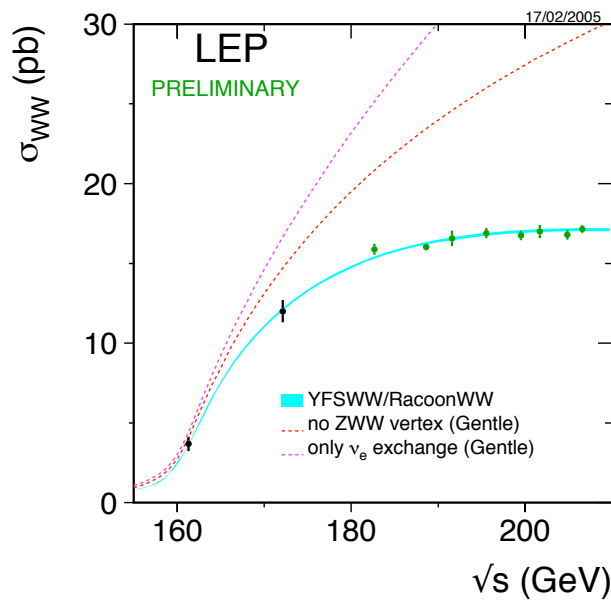
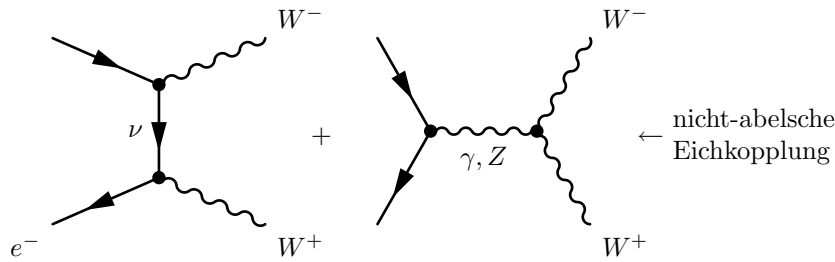


Abbildung 8.3: W^+W^- -Paarerzeugung im LEP

8.1.4 Globale Analyse

alle Observablen $\mathcal{O}_{SM} = \underbrace{\mathcal{O}(m_t, M_H)}_{\text{wg. Schleifen}}$. Globaler Fit an alle Daten: einziger freier

Parameter ist $M_H \Rightarrow$ ergibt obere Grenze an M_H .

(Erinnerung: untere Grenze $M > 114$ GeV)

$M_H \lesssim 190$ GeV mit 95% C.L. unter Berücksichtigung der exp-Grenze $M_H > 114$ GeV ($\Delta\chi^2 = 2,7 \Rightarrow$ 95% C.L. einseitiger oberer Grenzwert)

Fazit:

Bei Gültigkeit des SM wird ein leichtes Higgsboson $\lesssim 200$ GeV erwartet. Alle Observablen werden gut von SM beschrieben, außer $A_{FB}^{(b)}$, knapp 3σ Abweichung (und g-2 für Muon, Niederenergie-Observable)

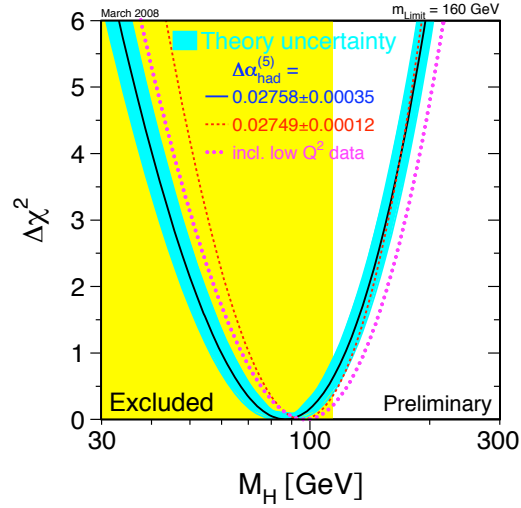


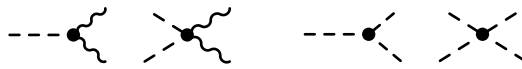
Abbildung 8.4: Einschränkungen an M_H

8.2 Higgs-Bosonen

8.2.1 Eigenschaften

aus Kap. 6.4:

$$L_{Higgs} = \underbrace{(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)}_{M_W, M_Z} - \underbrace{V(\Phi)}_{M_H, \text{Selbst-WW}}$$



$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{in unitärer Eichung} \\ H: \text{neutrales Skalarfeld} \\ \rightarrow \text{Spin-0-Teilchen} \end{array}$$

$$V = -\mu^0(\Phi^\dagger \Phi) + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger \Phi)^2 \equiv V(H)$$

$$\text{Minimum für } H = 0, v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \lambda = \frac{4\mu^2}{v^2} = \frac{2M_H^2}{v^2}$$

$$V = \mu^2 H^2 + \frac{\mu^2}{v} H^3 + \frac{\mu^2}{4v^2} H^4$$

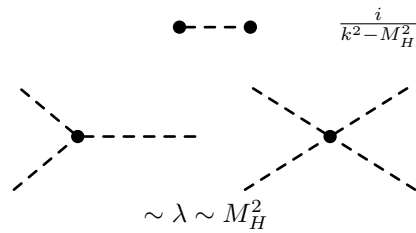
$$\mathcal{L}_{Higgs} = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - \frac{1}{2} \underbrace{(2\mu^2)}_{=M_H^2} H^2 - \frac{\mu^2}{v} H^3 - \frac{\mu^2}{4v^2} H^4$$

$$M_H = \mu\sqrt{2}$$

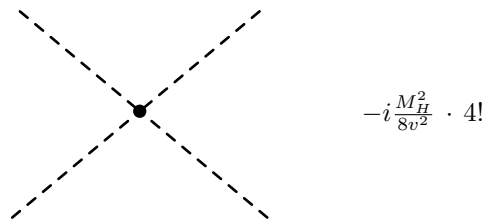
alles durch M_H ausgedrückt, ergibt:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) - \frac{M_H^2}{2}H^2 - \frac{M_H^2}{2v}H^3 - \frac{M_H^2}{8v^2}H^4$$

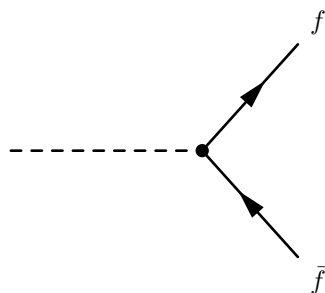
M_H : einziger freier Parameter



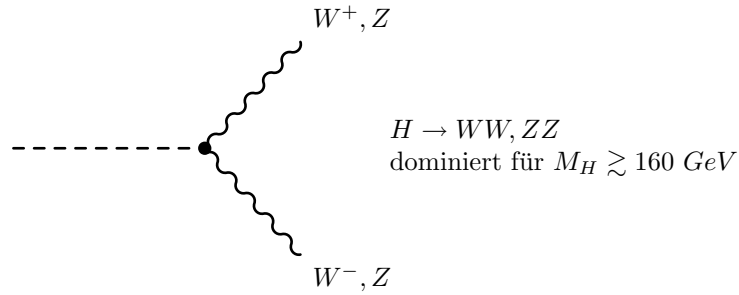
Feynman-Regeln:



Zerfälle:



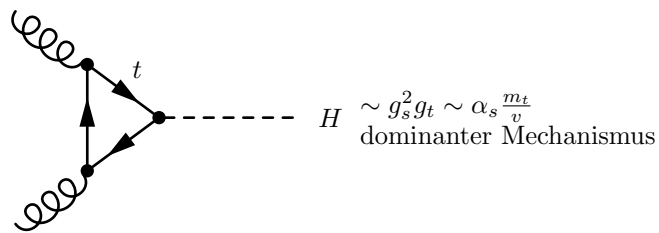
$H \rightarrow f\bar{f} \sim g_f^2 \sim \frac{m_f^2}{v^2}$
 bevorzugt in
 schwere Fermionen ($b\bar{b}$, $\tau^+\tau^-$)
 Für $M_H > 2m_{top}$: $H \rightarrow t\bar{t}$



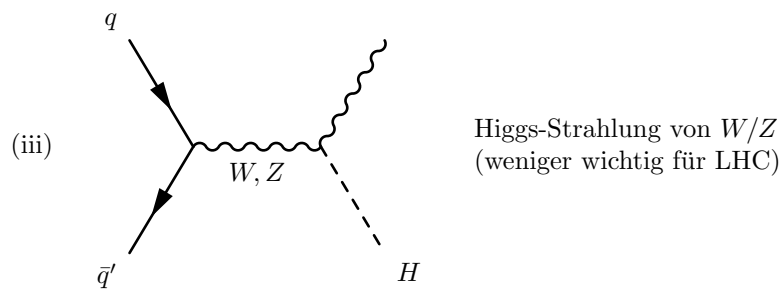
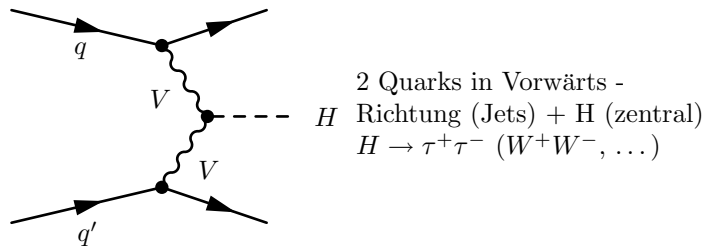
8.2.2 Erzeugung und Nachweis am LHC

Partonische Prozesse zur H-Erzeugung

(i) Gluon-Fusion (1-Schleifen-Ordung)



(ii) VV -Fusion ($V = W, Z$)



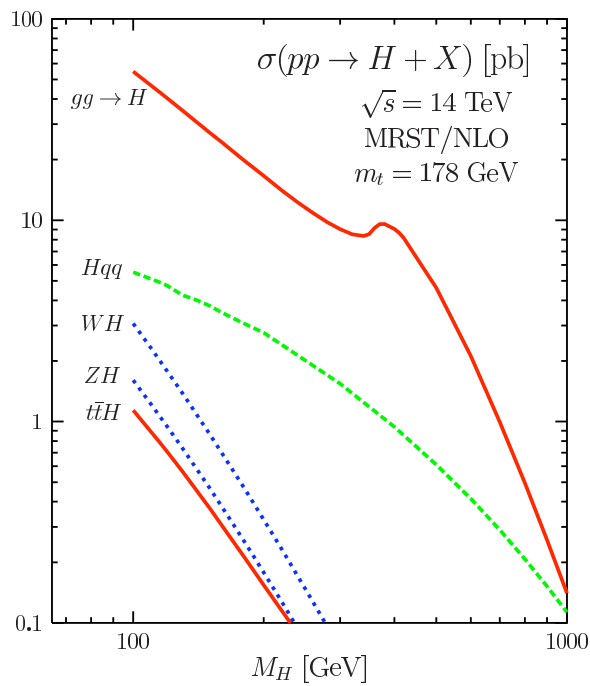
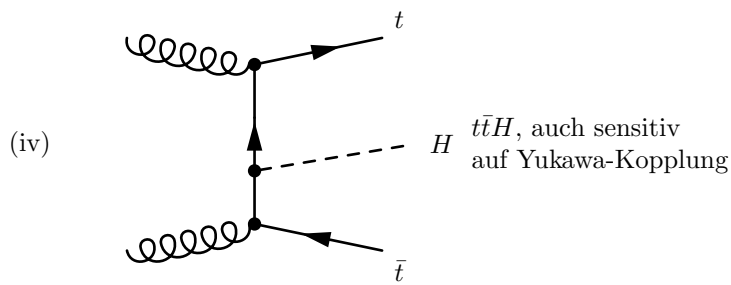
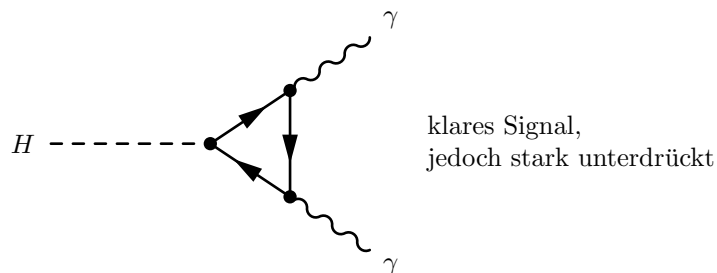


Abbildung 8.5: Produktion des Higgs-Bosons am LHC

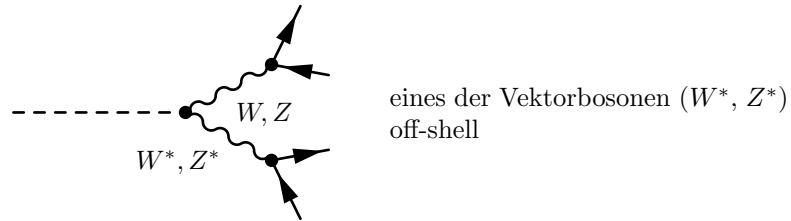
Nachweis durch Zerfallsprodukte:

$H \rightarrow b\bar{b}$: keine Chance wegen QCD-Untergrund

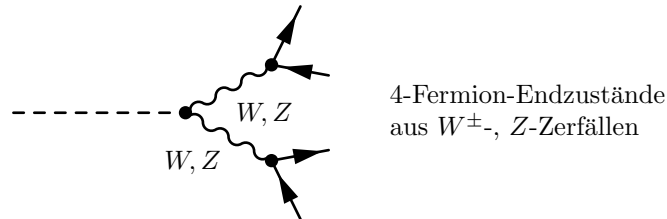
Für $M_H \lesssim 120$ GeV: $H \rightarrow \gamma\gamma$



$120 \text{ GeV} \lesssim M_H \lesssim 160 \text{ GeV}$:



$M_H > 160 \text{ GeV}$:



allgemein gilt:

$$\text{Nachweisrate} \sim \sigma_{\text{Produktion}} \cdot BR(H \rightarrow x)$$

$$BR = \frac{\Gamma(H \rightarrow x)}{\Gamma_{\text{total}}} \quad \text{Verzweigungsverhältnis (Branching Ratio) für den Zerfall des } H \text{ in einen Endzustand } x$$

$$\Gamma_{\text{total}} = \sum_x \underbrace{\Gamma(H \rightarrow x)}_{\text{part. Breite}} \quad \text{totale Breite}$$

Eine große Erzeugungsrate kann durch ein kleines BR stark reduziert werden

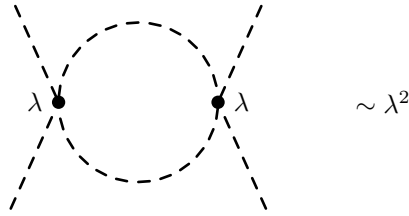
(spezifisches Problem für LHC wegen des großen hadronischen Untergrunds).
An einem e^+e^- -Collider sind die Endzustände einfacher zu identifizieren, genauere Messungen der verschiedenen BRs möglich.

8.2.3 Hochenergieverhalten

Betrachte Energien \gg Fermi-Skala (246 GeV). Higgs-Selbstkopplung λ als laufende Kopplung $\lambda(Q)$, abh. von Energieskala Q , wird bestimmt durch die RGE (Evolutionsgleichung, siehe QCD)

$$Q^2 \frac{d\lambda}{dQ^2} = \beta(\lambda) = \frac{3}{16\pi^2} \lambda^2$$

in 1-Schleifen-Ordnung ist $\beta(\lambda)$ bestimmt durch



Lösung mit Anfangsbedingung $\lambda(v) = \frac{2M_H^2}{v^2}$:

$$\boxed{\lambda(Q) = \frac{\lambda(v)}{1 - \frac{3}{16\pi^2} \lambda(v) \log \frac{Q^2}{v^2}}} \quad \text{Kopplung wächst mit } Q^2$$

$\lambda(Q)$ divergiert für $Q = \Lambda_c$ mit

$$1 - \frac{3}{16\pi^2} \lambda(v) \log \frac{\Lambda_c^2}{v^2} = 0 \quad (\text{Landau-Pol})$$

Wegen $\lambda(v) = \frac{2M_H^2}{v^2}$ ist Λ_c M_H -abhängig.

Für große M_H wird $\Lambda_c < M_H$, das ist physikalisch nicht sinnvoll.

Damit $\Lambda_c \gtrsim M_H$ gilt, muss M_H die Massengrenze $M_H \lesssim 800 \text{ GeV}$ erfüllen. (perturbative Betrachtung, wird jedoch durch nicht-perturbative Studien, z. B. Gitter, bestätigt).

Für kleine M_H , $M_H \lesssim 180 \text{ GeV}$, ist $\Lambda_c \lesssim 10^{19} \text{ GeV} = M_P = (\sqrt{G_N})^{-1}$

Planck-Masse (Planck-Skala), G_N : Gravitationskonstante.

Bei M_P ist eine mikroskopische Theorie der Gravitation erforderlich (spätestens dann). $M_H \lesssim 190 \text{ GeV}$ folgt aus dem Fit an die Präzisionsdaten \Rightarrow SM gültig bis zu M_P ?

Zusammenfassung:

Das SM enthält bei hohen Energien ($Q \sim \Lambda_c$) einen stark-wechselwirkenden Sektor, wo die übliche auf Störungstheorie basierende Phänomenologie nicht mehr gültig ist.

Da das SM ohnehin unvollständig ist (Gravitation), ist das kein grundsätzliches Problem, wenn $\Lambda_c \sim M_P$, d.h. wenn M_H leicht ist.

Andernfalls ist Λ_c deutlich niedriger, so dass das SM durch „neue Physik“ zu modifizieren ist.

Entscheidend ist zunächst der Nachweis des Higgs-Bosons und die Bestimmung seiner Masse.

Kapitel 9

Beyond the Standard Modell

9.1 Massive Neutrinos

$m_\nu = 0$ im minimalen Standardmodell. Mit zusätzlichem ν_R ($I = 0, Y = 0$)

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{g_\nu v}{\sqrt{2}} \right)}_{m_0 \text{ Dirac-Masse}} (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R)$$

analog zu u-Quarks. Nur bei ν möglich ist ein weiterer Massenterm $M \bar{\nu}_R^c \nu_R$ (Majorana-Term, Teilchen = Antiteilchen), mit M : Majorana-Masse.

$$\begin{pmatrix} 0 & m_0 \\ m_0 & M \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$m_1 = \frac{m_0^2}{M}$, $m_2 \simeq M$ für $M \gg m_0$. $M \sim 10^9 - 10^{14} \text{ GeV}$: $m_1 \ll m_f$ für alle Generationen: $m_\nu^{1,2,3}$ + Mischung (wie CKM)

9.2 Grand Unification

Vereinigung von starker und elektrischer WW. Grand Unified Theories GUT.

Idee: $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset G$. G : einfache Gruppe.

G : mit einziger Kopplung $g \equiv g_U$ einfachste Möglichkeit: $SU(5)$. Generatoren:

T_a , $a = 5^2 - 1 = 24$, 5×5 -Matrizen.

$$T_a = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\lambda_a}{2} & (neu) \\ \hline (neu) & \frac{\sigma_a}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} 3 \times 3 \\ 2 \times 2 \end{array}$$

neu: T_a mit neuen Eichbosonen X_a , zusätzlich zu G_a, W_a, B .

Hyperladung: $diag, T^{(Y)} = \sqrt{\frac{3}{5}} Y$.

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_u T_a Z_\mu^a = \partial_\mu - i g_3 \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a - i \frac{g_2}{2} \sigma_a W_\mu^a + i \frac{g_1}{2} Y B_\mu \quad (a = 1, \dots, 24)$$

Vergleich: $g_3 = g_2 = g_u$, $g_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}g_u$ bei einer hohen Energie - Skala $M_{GUT} = M_G$ bei Skala M_Z : $g_3(M_Z) = g_2(M_Z)$

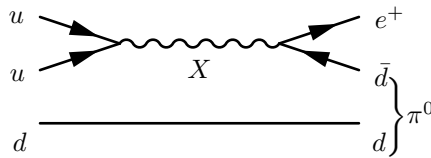
Input: $\alpha_s(M_Z) = \frac{g_s^2(M_Z)}{4\pi} = 0,12$

$$\alpha(M_Z) = \frac{1}{129}$$

$\alpha_i(M_Z) \rightarrow \alpha_i(M_G)$ durch RGE (β -Strahlen) ergibt:

$$M_G \simeq 10^{15} \text{ GeV}$$

$\Rightarrow \sin^2 \theta_w(M_Z) = 0,207$ im Widerspruch zum Experiment (0,2315). Weitere Vorhersagen: Proton - Zerfall: $p \rightarrow e^+ + \pi^0$, durch X_a - Bosonen (verletzen Baryonen- und Leptonen Zahl: Quarks \leftrightarrow Leptonen).



$\tau_p \simeq 10^{31} \text{ y}$ im Widerspruch zum Experiment: ($\tau_p > 10^{33} \text{ y}$). Andere Gruppe: $G = SO(10)$

9.3 Supersymmetrie (SUSY)

Symmetrie zwischen Fermionen \leftrightarrow Bosonen \Rightarrow Spin: $\pm \frac{1}{2}$ Unterschied. Multiplets: (e_L, \tilde{e}_L) . \tilde{e}_L : Spin 0. Seletron.

Allgemein: $(f_L, \tilde{f}_L), (f_R, \tilde{f}_R)$ Sfermions.

$(\gamma, \tilde{\gamma}), (Z, \tilde{Z}), (W^\pm, \tilde{W}^\pm), (g, \tilde{g})$. $\tilde{\gamma}, \tilde{Z}, \tilde{W}^\pm, \tilde{g}$: Gauginos, Spin: $\frac{1}{2}$

Massen von \tilde{f}_L, \tilde{f}_R Gauginos: freie Parameter. QZ und Kopplungen wie SM-Teilchen \Rightarrow

1. RGE $\alpha_i(M_Z) \xrightarrow{neu} \alpha_i(M_G)$ in $SU(5)$ ok.
2. 2-Higgs-Doublets, $H_1, H_2 \rightarrow 5$ Skalare H^\pm, H^0, A^0, h^0

$$M_{h^0} \lesssim 140 \text{ GeV}$$

$M_{H^\pm} \sim M_{H^0} \sim M_{A^0}$ schwer, entkoppeln

Anhang A

Literaturverzeichnis &
Index

Literaturverzeichnis

- [1] Bogdan Povh, Klaus Rith *Teilchen und Kerne*, Springer Verlag, Berlin, 6. Auflage, 2006, ISBN 3-540-65928-5
- [2] Theo Mayer-Kuckuk, *Kernphysik - Eine Einführung*, Teubner Verlag, 7. Auflage, 2002, ISBN 3-519-13223-0
- [3] Hans Frauenfelder, Ernest M. Henley *Teilchen und Kerne. Die Welt der subatomaren Physik*, Oldenbourg Verlag, 4. Auflage, 1999, ISBN 3-486-24417-5

Index

$\Delta^+(1232)$ -Resonanz, 5

lorentzinvariante Masse, 6

Nukleoresonanzen, 5

Rosenbluth-Formel, 9