

---

**Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik II**  
**Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik**  
**Sommersemester 2012/13**

---

Blatt Nr. 3

26. April 2013

### Aufgabe 1 : Mesonen-Multipletts

Im Konstituentenquarkmodell sind Mesonen aus einem Quark  $q$  und einem Antiquark  $\bar{q}$  aufgebaut. Aus den drei leichtesten Flavours  $u, d, s$  lassen sich neun Quark-Antiquark-Paare bilden, die sich in ein Oktett und ein Singulett aufteilen lassen. Das bringt man mit der Schreibweise  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$  zum Ausdruck. Das Oktett lässt sich weiterhin in 1 (Isospin-) Triplett, 2 Dubletts und 1 Singulett aufspalten. Die orthonormalen Wellenfunktionen lassen sich dabei durch SU(3)-Transformationen ineinander umwandeln, das Singulett nicht. Je nach Kopplung der Spins erhält man Zustände mit Spin 0 (pseudoskalare Mesonen) oder Spin 1 (Vektormesonen).

- Das Konstituentenquarkmodell besagt, dass die Quantenzahlen der Mesonen aus den Quantenzahlen der Konstituentenquarks folgen. Führen Sie folgende Größen der Mesonen auf die Quarks zurück: Spin, Parität, Isospin, Strangeness und Baryonenzahl.
- Wie lauten die Flavour-Wellenfunktionen des Pion-Tripletts  $\pi^0, \pi^\pm$ ? Wie sind diese miteinander verknüpft?
- Neben  $\pi^0$  gibt es noch 2 weitere Teilchen mit  $I_z = 0$ , nämlich die Isospin-Singulett  $\eta$  und  $\eta'$ . Geben Sie deren Wellenfunktionen an, so dass sie untereinander sowie zu  $\pi^0$  orthogonal sind. Welches Teilchen gehört zum Oktett, welches ist das Singulett? ( $\langle u\bar{u} | u\bar{u} \rangle = 1, \langle u\bar{u} | d\bar{d} \rangle = 0$  und analog für die anderen Flavours).
- Vergleichen Sie nun die Massen der pseudoskalaren  $\pi$ -Mesonen mit den entsprechenden  $\rho$ -Mesonen. Wie erklären Sie sich den Massenunterschied?
- Die Mesonenmassen können gut beschrieben werden, wenn man die Spin-Spin-Wechselwirkung der Quarks berücksichtigt:

$$m_{q\bar{q}} = m_q + m_{\bar{q}} + \Delta m_{ss}$$
$$\text{mit } \Delta m_{ss} = a \frac{\vec{S}_q \cdot \vec{S}_{\bar{q}}}{m_q m_{\bar{q}}}.$$

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Operators der beiden Quarkspins  $\vec{S}_q \cdot \vec{S}_{\bar{q}}$  den Wert  $-3/4\hbar^2$  für die pseudoskalaren und  $1/4\hbar^2$  für die Vektormesonen hat.

- Im Gegensatz zu den Massen der Konstituentenquarks sind die Mesonenmassen experimentell direkt zugänglich. Bestimmen Sie, durch Vergleich entsprechender pseudoskalarer und Vektormesonen die Konstante  $a$  und weiterhin die Massen der Konstituentenquarks. Nehmen Sie dazu an, dass  $m_u = m_d$ . Wodurch wird diese Annahme motiviert?
- Welche experimentellen Hinweise gibt es für die Richtigkeit des Quark-Modells der Mesonen?  
 $m_{\pi^\pm} = 140 \text{ MeV}, m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}, m_{\rho^\pm} = 775 \text{ MeV}, m_{\rho^0} = 775 \text{ MeV}, m_{K^\pm} = 494 \text{ MeV}$  Weitere, experimentell gefundene Mesonenmassen findet man z.B. bei der Particle Data Group unter <http://pdg.lbl.gov/>.

---

## Aufgabe 2 : Baryonen-Multipletts

Die Baryonen sind im Konstituentenquarkbild aus 3 Quarks aufgebaut, ihre Antiteilchen entsprechend aus drei Antiquarks. Aus den drei verschiedenen Flavours  $u, d, s$  lassen sich im Prinzip 27 Zustände mit Spin 1/2 bzw. 3/2 konstruieren. Allerdings sind nur jeweils 8 bzw. 10 vollständig symmetrisch unter Vertauschung von zwei beliebigen Quarks: Das Baryonen-Oktett bzw. das Baryonen-Dekuplett.

- Wie erklärt man sich die Existenz von  $\Delta^{++}$  trotz Pauli-Verbot? Warum gibt es keinen Zustand  $|uuu\rangle$  mit Spin 1/2 aber dafür mit Spin 3/2?
- Die Gesamtwellenfunktion der Baryonen  $\psi_B$  lässt sich zerlegen in das Produkt aus Orts-, Spin-, Flavour- und Colour-Wellenfunktion:

$$\psi_B = \phi_{Ort} \phi_{Spin} \phi_{Flavour} \phi_{Colour}$$

Welche Bedingung muss die Gesamtwellenfunktion erfüllen? Was kann man über  $\phi_{Ort}$  und  $\phi_{Colour}$  aussagen?

- Das Proton besteht aus 2 u-Quarks und einem d-Quark. Geben sie dessen vollständig symmetrisierte Spin-Flavour-Wellenfunktion an. Wie lautet diese für das Neutron?
- Berechnen Sie das Verhältnis der magnetischen Momente von Proton und Neutron. Das magnetische Moment eines Nukleons  $|N\rangle$  ist dabei nicht anderes als der Erwartungswert des Spinoperators:

$$\mu_N = \frac{e}{2m_q} \langle N | \sum_{u,d} Q_i \sigma_3 | N \rangle,$$

wobei  $\sigma_3$  für die 3. Paulische Spinmatrix steht.