
Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik II
Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik
Sommersemester 2012/13

Blatt Nr. 5

16. Mai 2013

Aufgabe 1 Chiralität und Helizität

Ein e^- -Spinor $u_{\pm}(p)$ zu Impuls $p^{\mu} = (E, \vec{p})$ und Helizität $\pm\frac{1}{2}$ kann geschrieben werden in der Form (ohne auf die Normierung zu achten)

$$u_{\pm}(p) = \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_{\pm} \end{pmatrix}$$

wobei die 2-komponentigen Spinoren χ_{\pm} Lösungen der Eigenwertgleichung $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi_{\pm} = \pm\chi_{\pm}$ sind, mit $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ (siehe Kap. 1.3 aus Kern- und Teilchenphysik I).

a. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{1}{2}\gamma_5 \not{s} u_{\pm}(p) = \pm \frac{1}{2} u_{\pm}(p)$$

wobei

$$\not{s} = \gamma_{\mu} s^{\mu}, \quad (s^{\mu}) = \frac{1}{m}(p, \vec{n}p^0), \quad \text{mit } p \equiv |\vec{p}|$$

d.h. $\frac{1}{2}\gamma_5 \not{s}$ ist die kovariante Form des Helizitätsoperators $\frac{1}{2}\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}$.

b. Zeigen Sie, dass für hochenergetische Teilchen ($p \gg m$) gilt:

$$\frac{1}{2}\gamma_5 u_{\pm}(p) = \pm \frac{1}{2} u_{\pm}(p)$$

d.h. Chiralität = Helizität.

Aufgabe 2 : Massive Vektorfelder

Ein freies, massives Vektorfeld hat die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^{\mu}A_{\mu}$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$.

a. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für A^{ν} gemäß Euler-Lagrange auf,

$$\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} = 0$$

Berechnen Sie die Divergenz der Bewegungsgleichung und benutzen Sie das Ergebnis, um die Bewegungsgleichung in eine Klein-Gordon-Gleichung für die Feldkomponenten A^{ν} umzuformen.

b. Zeigen Sie, dass der Feynman-Propagator für massive Vektorteilchen die Form hat:

$$\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Lösen Sie dazu die Differentialgleichung für die Greensche Funktion $D^{\nu\rho}$,

$$\left[g_{\mu\nu}(\square + m^2) - \partial_\mu \partial_\nu \right] D^{\nu\rho}(x - y) = g_\mu{}^\rho \delta^4(x - y)$$

im Impulsraum für die Fourier-Transformierte $D^{\nu\rho}(k)$ mit Hilfe des Ansatzes

$$D^{\nu\rho}(k) = a(k^2)g^{\mu\rho} + b(k^2)k^\nu k^\rho$$

Aufgabe 3 : Gluonen

- Überlegen Sie sich (in Analogie zur Konstruktion der Flavour-Wellenfunktionen der Mesonen) wie die Farbwellenfunktionen der Gluonen dargestellt werden können. Welche Bedeutung kommt dem total symmetrischen Zustand zu?
- Was kann man aus den 3-Jet-Ereignissen über die Gluonen lernen?

Aufgabe 4 : Universalität der schwachen Wechselwirkung

Die Theorie der schwachen Wechselwirkung besagt, dass alle Quarks und Leptonen die gleiche schwache Ladung g tragen, d.h. W- und Z-Bosonen koppeln an alle Quarks und Leptonen gleichermaßen. Eine Folge ist, dass, wenn ein Teilchen auf mehrere Arten schwach zerfallen kann, die verschiedenen Kanäle alle gleich häufig auftreten, sofern der Phasenraum dabei vernachlässigt wird.

- Geben Sie die möglichen Zerfallskanäle für das μ - und das τ -Lepton an. Beachten Sie hierbei die Massen der Zerfallsprodukte. Skizzieren Sie jeweils die Feynman-Diagramme.
- Die Zerfallsbreite des Myons ergibt sich zu

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

Leiten Sie damit die Lebensdauer des τ -Leptons aus der Lebensdauer des Myons ab.

$$m_\mu = 105.7 \text{ MeV}, \tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}, m_\tau = 1776.9 \text{ MeV}$$

Aufgabe 5 : Pionen-Zerfall

Geladene Pionen können als leichteste geladene Hadronen nur in einem semileptonischen Prozess zerfallen. Die beobachtete Lebensdauer ist $\tau_\pi = 2.603 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Die Messung des Verzweigungsverhältnisses R ergab

$$R = \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = 1.23 \cdot 10^{-4}.$$

- Warum treten die energetisch möglichen Zerfälle $\pi^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma$ oder $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \gamma$ nicht auf?

-
- b. Zeichnen Sie das Feynman-Diagramm für den Zerfall des Pions und überlegen Sie sich wie sich Spin und Impuls der Zerfallsprodukte im Schwerpunktsystem des Pions verhalten. Wie würden die geladenen Pionen zerfallen, wenn Elektron und Myon masselos wären?
 - c. Welches Verzweigungsverhältnis R für den Zerfall von geladenen Pionen würden Sie aufgrund von Phasenraumbetrachtungen erwarten?
 - d. Zeigen Sie, dass der experimentelle Wert für das Verzweigungsverhältnis R erklärt werden kann, wenn das W -Boson nur an linkshändige Teilchen und rechthändige Antiteilchen koppelt.
 - e. Die schwache Wechselwirkung hat keine Symmetrie unter Paritätstransformation (P) und Ladungskonjugation (C). Überlegen Sie sich, dass beides gleichbedeutend ist mit der Helizitätsabhängigkeit der Kopplung der W/Z -Bosonen. Wie verhält sich die schwache Wechselwirkung unter einer CP -Transformation?