Streuung an Kernen und Nukleonen

Ziel: Verständnis der Kernbausteine

zur Erinnerung:

Viererimpuls $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \vec{x})$

$p = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E/c; \vec{p})$

Skalarprodukt zweier Vierervektoren a, b

$a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$ (Lorentz-Invariant)

Gilt auch für Quadrat des Impulses p

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \qquad (1)$$

Quadrat ist gleich der Ruhemasse $m c^2$, weil sich ein Bezugssystem findet in dem das Teilchen ruht, d.h. $\vec{p} = 0$ und $E = mc^2$

$$\Rightarrow \text{ Invariante Masse: } m = \frac{\sqrt{p^2}}{c} \qquad (2)$$

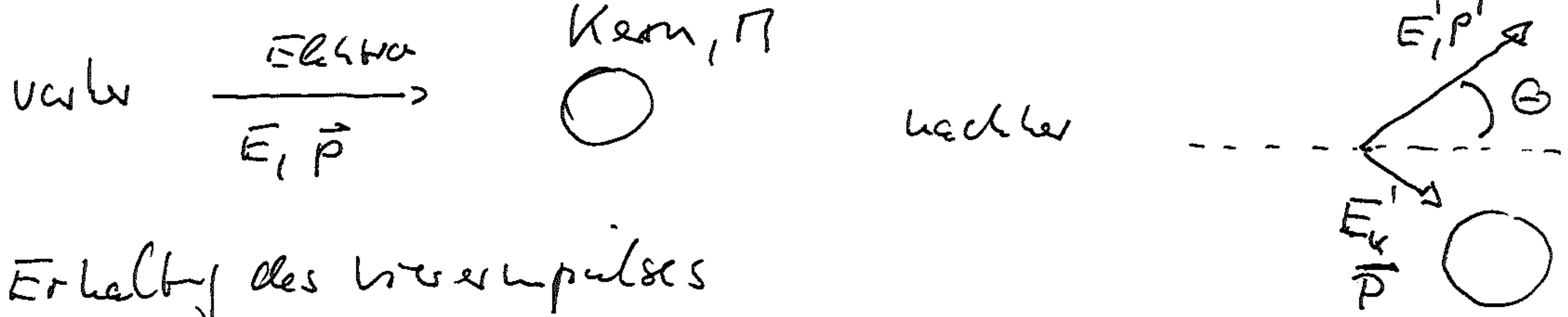
(1) + (2) ⇒ ergibt bekannte Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

für $E \gg mc^2 \Rightarrow E \simeq |\vec{p}|\, c$

für Elektronen von einigen MeV bereits gültig.

Kinematik elastischer Streuung von e^- N



Erhaltung des Viererimpulses

$$p + P = p' + P'$$

quadrieren $\quad p^2 + 2pP + P^2 = p'^2 + 2p'P' + P'^2$

<u>elastische</u> Streuung $\quad$ Massen m_e, M der Stoßpartner bleiben unverändert:

$$\Rightarrow p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2 \quad \text{und} \quad P^2 = P'^2 = M^2 c^2$$

$$\Rightarrow pP = p'P'$$

Rückgestreute Teilchen wird (üblicherweise) nicht nachgewiesen, sondern nur das gestreute Elektron

③

$$p \cdot P = p'(p + P - p') = p'p + p'P - \underset{(= m_e^2 c^2)}{p'^2}$$

im Laborsystem in dem Teilchen mit Viererimpuls P vor Stoß in Ruhe war:

$$p = (E/c, \vec{p}) \quad , \quad p' = \left(\frac{E'}{c}, \vec{p}\,'\right)$$

$$P = (Mc, 0) \quad ; \quad P' = \left(E_P'/c, P'\right)$$

$$E M c^2 = E'E - \vec{p}\cdot\vec{p}\,' c^2 + E' M c^2 - m_e^2 c^2$$

bei hohen Energien kann $m_e^2 c^4$ vernachlässigen und $E \simeq |\vec{p}|c$

$$\Rightarrow \quad E M c^2 = E'E(1 - \cos\theta) + E' M c^2$$

messy!

$$\boxed{E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos\theta)}} \quad (*)$$

θ: Streuwinkel

$E - E'$: Rückstoß, der auf Target übertragen wird

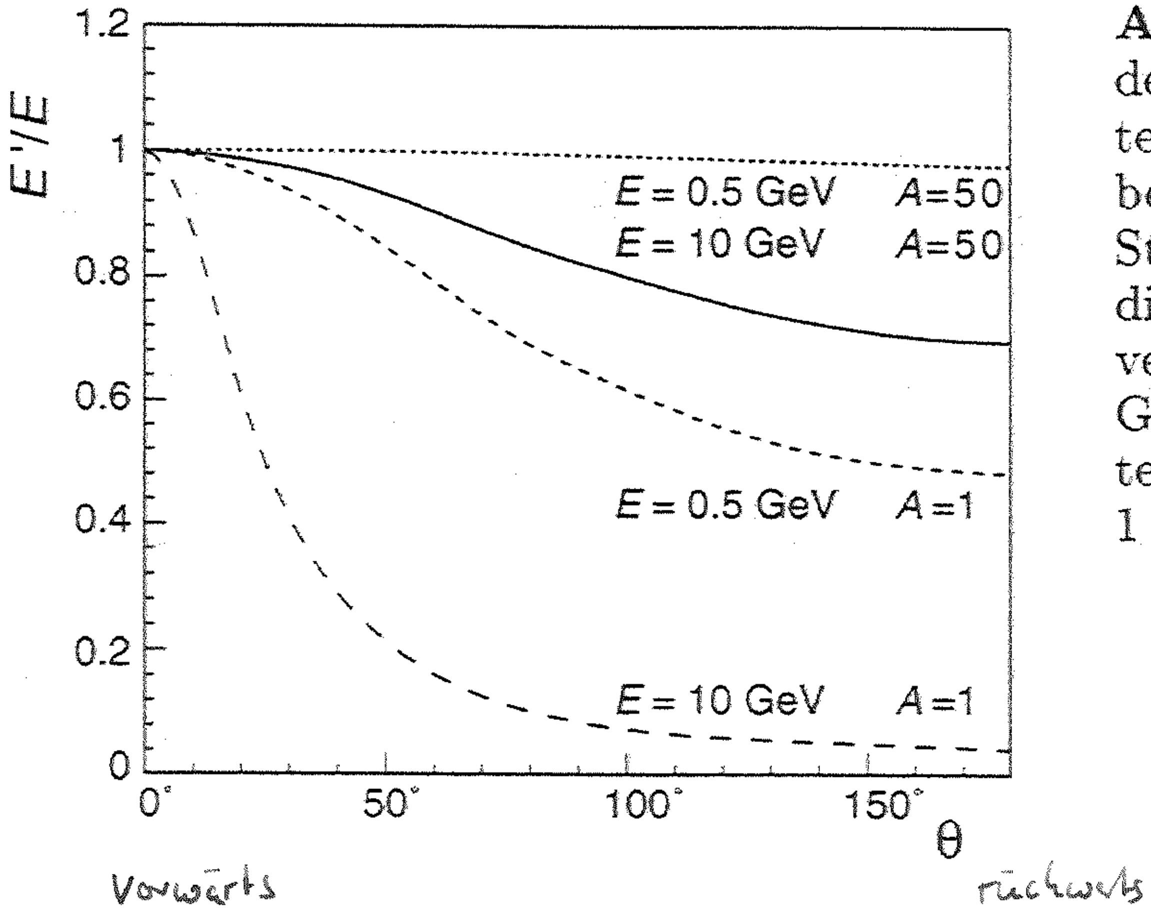


Abb. 5.2. Winkelabhängigkeit der auf die Strahlenergie normierten Elektronstreuenergie E'/E bei elastischer Elektron-Kern-Streuung. Die Kurven zeigen diesen Zusammenhang für zwei verschiedene Strahlenergien (0.5 GeV und 10 GeV) und zwei unterschiedlich schwere Kerne ($A = 1$ und $A = 50$).

Aus Povh et al.

- für elastische Streuung besteht eindeutige Beziehung zwischen Streuwinkel Θ und der Energie E' des gestreuten Elektrons
- Bei inelastischer Streuung (Anregung von inneren Freiheitsgraden) ist (*) nicht erfüllt
- Winkelabhängigkeit wird durch $(1-\cos\Theta)$ beschrieben $\left(= 2\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)$

Rutherford WQ

- WQ unter Vernachlässigung des Spins
- räumliche Ausdehnung des Streuzentrums wird vernachlässigt (δ-Fkt.)
- Atomkern schwer und Energie des Projektils nicht zu groß $\Rightarrow$ Vernachlässigung des Rückstoßes

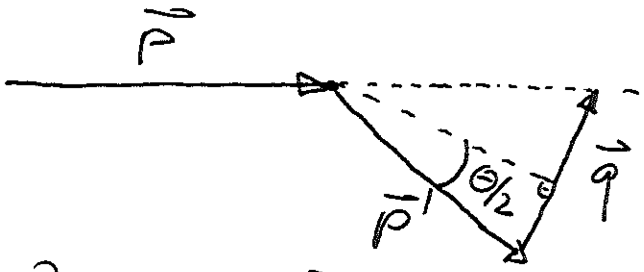
Herleitung ist klassisch möglich

ebenso mit nicht-rel. QM mit Hilfe Fermi's Goldener Regel

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{4 Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{|\vec{q} c|^4}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \cong \frac{1}{137}$$

Vernachlässigung des Rückstoßes: $E = E'$, $|\vec{p}| = |\vec{p}\,'|$



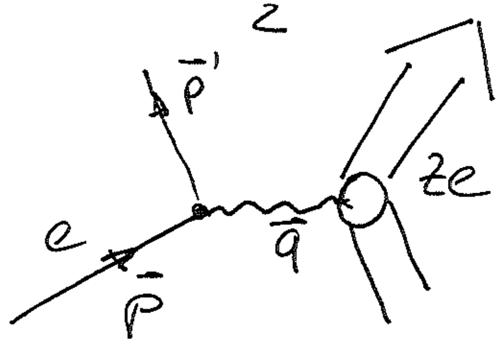
3-Impulsübertrag $\vec{q}$

$$|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$

mit $E \simeq |\vec{p}|c$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4 E^2 \sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Feldtheoretische Betrachtung:



EM WW zwischen Elektron und Ladungsverteilung Ze durch Austausch eines Photons (= Feldquant der EM WW). Das Photon koppelt an die Ladung der beiden Teilchen, was zu einem Beitrag $Ze \cdot e$ im Übergangsmatrixelement und WQ zu $(Zee)^2$

3-Impuls $\vec{q}$ ist der Impuls, den das Photon übermittelt.

reduzierte de-Broglie Wellenlänge des Photons ist

$$\bar{\lambda} = \frac{\hbar}{|\vec{q}|} = \frac{\hbar}{|\vec{p}|} \cdot \frac{1}{2 \sin\frac{\theta}{2}}$$

Wenn $\bar{\lambda}$ >> gegenüber Ausdehnung des Targetteilchens

=> Punktförmig

$$\bar{\lambda} \simeq \frac{\hbar c \, 2\pi}{E} \Rightarrow E = \frac{\hbar c \, 2\pi}{\lambda} = \frac{197 \, \mathrm{MeV\,fm} \; 2\pi}{1 \, \mathrm{fm}} \approx 1 \, \mathrm{GeV}$$

i Allgemein: ausgetauschte Teilchen tragen zum Übergangsmatrixelement ein Propagator-Term bei $\frac{1}{Q^2 + M^2c^2}$

Q^2: Quadrat des übertragenen Viererimpuls

M: Masse des Austauschteilchens

hier (EM) Photon $M = 0$

nicht relativist. Näherung $\frac{1}{Q^2} \to \frac{1}{\vec{q}^{\,2}}$

EM WW: charakteristischer rascher Abfall des WQ mit $\frac{1}{|\vec{q}|^4}$

Mott-WQ

bisher wurde Spin von Elektron und Target nicht berücksichtigt.

Mott-Streuung berücksichtigt Elektronen-Spin

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

(*): Rückstoß noch vernachlässigt

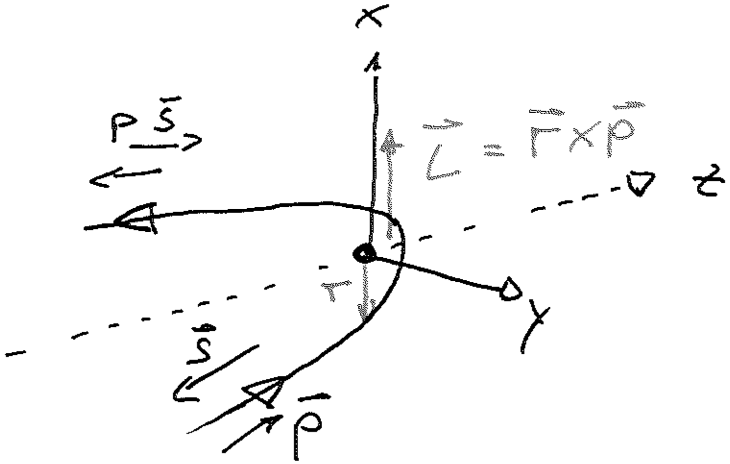
β: $\frac{v}{c}$

für $\beta \to 1$: $$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^*_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \cos^2\frac{\theta}{2}$$

für $\Theta = 180°$ (Rückstreuung) : $\cos^2 \frac{180}{2} = 0$

Plausibilitätsüberlegung:

spinloses Target



Helizität $h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{p}|}$ bleibt für $\beta \to 1$ <u>erhalten</u>

D.h. bei Streuung um 180° muß die Helizität (Spinprojektion auf die z-Achse) das Vorzeichen ändern. Nicht möglich bei spinlosen Target, da Gesamtdrehimpuls des Systems erhalten bleibt.

$\Rightarrow$ Streuung nach 180° ist unterdrückt aufgrund der Drehimpuls-Erhaltung!

Formfaktoren der Kerne

Streuexperimente an Kernen (oder Nukleone) zeigen, dass experimentell gemessene WQ nur im Grenzfall $|\vec{q}| \to 0$ dem Mott-WQ entspricht. Bei größeren $|\vec{q}|$ sind experimentelle Messungen (WQ) systematisch kleiner.

Grund: räumliche Ausdehnung der Kerne bzw. Nukleonen wird „sichtbar" weil ƛ kleiner wird. WW nur noch mit einem Teil der Ladung

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{*}_{Mott} \cdot \left|F(\vec{q}^{\,2})\right|^2$$

$F(\vec{q}^{\,2})$: Formfaktor

$\equiv$ Fouriertransformierte der normierten Ladungsverteilung

Verteilung (Skizze):

Streuung in Born'scher Näherung

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}x/\hbar}$$ einlaufende ebene Welle

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}'x/\hbar}$$ auslaufende ebene Welle

mit Fermis Goldener Regel : Reaktionsrate W

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle \right|^2 \cdot \frac{dn}{dE_f}$$

mit $$dn(|\vec{p}|) = \frac{4\pi |\vec{p}'|^2 \, d|p'| \cdot V}{(2\pi\hbar)^3}$$

für große Elektronenenergie $|\vec{p}'| \approx E'/c$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} \left| \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle \right|^2$$

WW Operator einer Ladung e mit elektr. Potential ϕ

ist $H_{int} = e\phi$

$$\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle = \frac{e}{V} \int e^{-p' x/\hbar} \phi(x) e^{i \vec{p} \vec{x}/\hbar} d^3x$$

mit $q = p - p'$.

$$= \frac{e}{V} \int \phi(x) e^{iqx/\hbar} d^3x$$