„Fermis zweite Goldene Regel" (Einschub)

Hamiltonoperator $\hat{H}_{int}$ beschreibt Art und Stärke des Wechselwirkungspotentials.

ψ_i : WF des Anfangszustandes (i: initial)

ψ_f : " " Endzustandes (f: final)

Übergangsmatrixelement (Wahrscheinlichkeitsamplitude)

$$M_{fi} = \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* H_{int} \psi_i \, dV$$

Reaktionsrate hängt ab, wieviele Endzustände für Reaktionen offen stehen. Jedes Teilchen besetzt aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation im Phasenraum (sechdimensionaler Raum $(\vec{x}, \vec{p})$ Impuls-Ortsraum) das Volumen $h^3 = (2\pi\hbar)^3$. Teilchen das im Volumen V und im Impulsbereich p' und $p'+dp'$ gestreut wird. Impulsraum entspricht einer Kugelschale mit vol $4\pi p'^2 dp$

$$dn(p') = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{(2\pi\hbar)^3} dp'$$

Energie und Impuls sind (nicht relativ.) durch Beziehung verknüpft $\quad dE' = v'\,dp'$

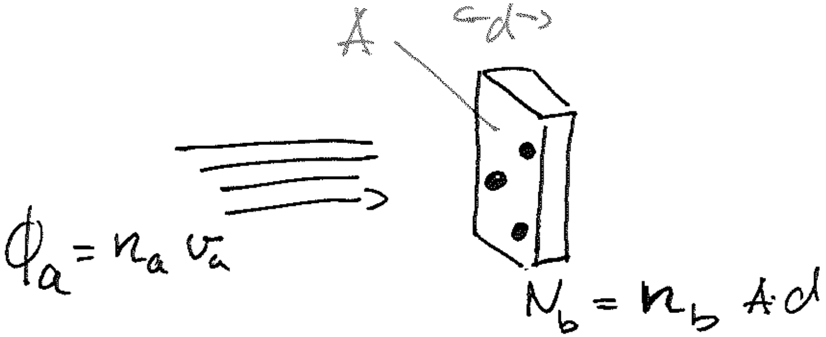
$$\left(\begin{array}{l} E = \frac{1}{2} m v^2 \\ \frac{dE}{dv} = m v \\ \frac{dE}{dp} = v \end{array} \right)$$

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{v' (2\pi\hbar)^3}$$

Fermis G.R. verknüpft <u>Reaktionsrate</u> mit Übergangsmatrixelement und Dichte der <u>Endzustände</u>

$$\boxed{W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(E')}$$

W: Reaktionsrate pro Targetteilchen und pro einfallendem Teilchen



Reaktionsrate

$$\dot{N} = \phi_a N_b \sigma_b = n_a N_b v_a \sigma_b$$

$$\phi_a = n_a v_a$$

$$\underline{W} = \frac{\dot{N}}{N_b N_A} = \frac{n_a N_b}{N_b N_a} v_a \sigma_b = \frac{v_a \sigma_b}{V}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{2\pi}{\hbar\, v_a} \, |M_{fi}|^2 \, \varrho(E') \, V$$

Ende Einschub

---

mit Green'schem Theorem

$$\int (u \Delta v - v \Delta u) \, d^3x = 0 \qquad ; \; \Delta = \nabla^2$$

und $$e^{iqx/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{|q|^2} \cdot \Delta e^{iqx/\hbar}$$

ist

$$\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle = -\frac{e\,\hbar^2}{V\,|q|^2} \int \Delta \phi(x) \, e^{iqx/\hbar} \, d^3x$$

Poissongleichung $\Delta \phi(x) = -\frac{\varrho(x)}{\varepsilon_0}$, $\varrho(x) = Ze\, f(x)$

Normierte Ladungsverteilung $\int f(x)\, d^3x = 1$

$$\Rightarrow \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle = \frac{Z\, 4\pi \alpha \hbar^3}{|q|^2\, V} \underbrace{\int f(x)\, e^{iqx/\hbar}\, d^3x}$$

Das Integral

$$F(q) = \int e^{iqx/\hbar} f(x)\, d^3x$$

ist die Fouriertransformierte der normierten Ladungsverteilung.
Enthält alle Informationen über räumliche Verteilung der Ladung des untersuchten Objektes

Rutherford: ⊙ Ladungsverteilung wird durch eine δ-Funktion beschrieben $\Rightarrow F(q) = 1$

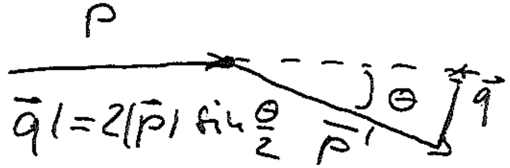
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2(\hbar c)^2} \left|\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle\right|^2$$

Einsetzen des Matrixelements

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4 z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{|qc|^4} \qquad \propto \frac{1}{q^4}$$

⊙ Rückstoß wird vernachlässigt

$\Rightarrow E = E' \;;\; |\vec{p}| = |\vec{p}\,'|$



$|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \sin\frac{\theta}{2}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z\,\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4\frac{\theta}{2}} \qquad \text{(rel. Rutherford Streuformel)} \qquad E \approx pc$$

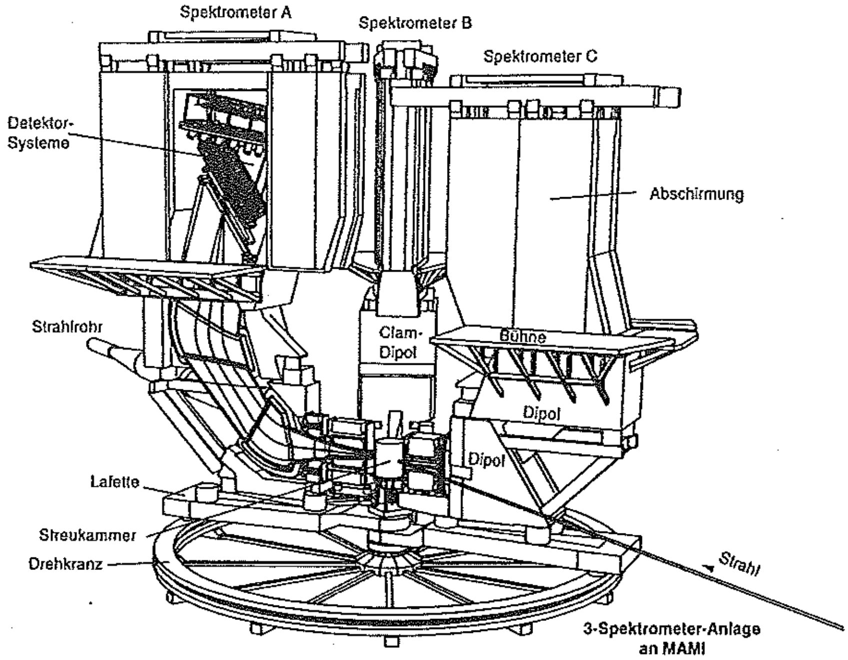


Abb. 5.4. Experimenteller Aufbau zur Messung der Elektronstreuung an Protonen und Kernen am Elektronenbeschleuniger MAMI-B (Mainzer Mikrotron). Die höchste erreichbare Elektronenenergie beträgt 820 MeV. In diesem Bild sind drei Magnetspektrometer gezeigt, die separat zum Nachweis elastischer Streuung und in Koinzidenz zum detaillierten Studium der inelastischen Kanäle dienen. Das Spektrometer A ist aufgeschnitten gezeigt. Die gestreuten Elektronen werden durch zwei Dipolmagnete und mit Hilfe eines aus Drahtkammern und Szintillationszählern bestehenden Detektorsystems impulsanalysiert. Zum Größenmaßstab: der Duchmesser des Drehkranzes beträgt ca. 12 m. *(Dieses Bild wurde von Arnd P. Liesenfeld (Mainz) hergestellt und uns freundlicherweise zur Veröffentlichung überlassen.)*

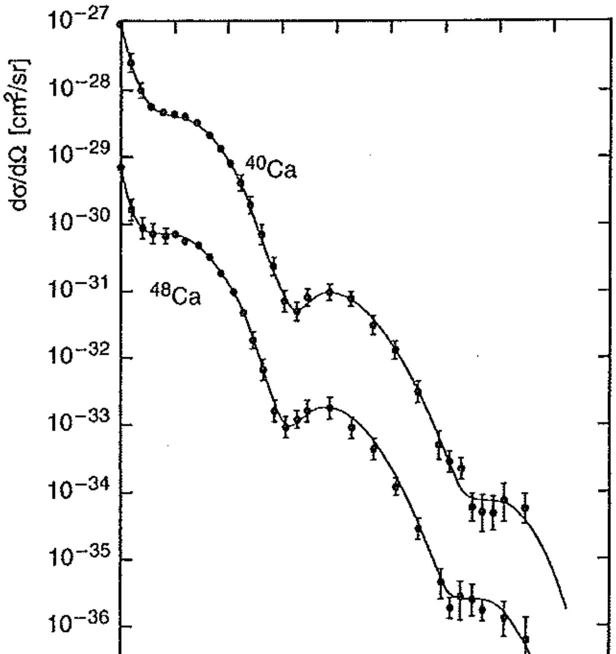


Abb. 5.7. Differentielle Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Elektronen an den Kalziumisotopen ^{40}Ca und ^{48}Ca [Be67]. Zur besseren Darstellung wurde der Wirkungsquerschnitt für ^{40}Ca und ^{48}Ca mit 10 bzw. 10^{-1} multipliziert. Die durchgezogenen Linien entsprechen Ladungsverteilungen, die man an die Daten angepasst hat. Aus der Lage der Minima kann man sehen, dass der Radius von ^{48}Ca größer ist als der von ^{40}Ca.

aus Povh

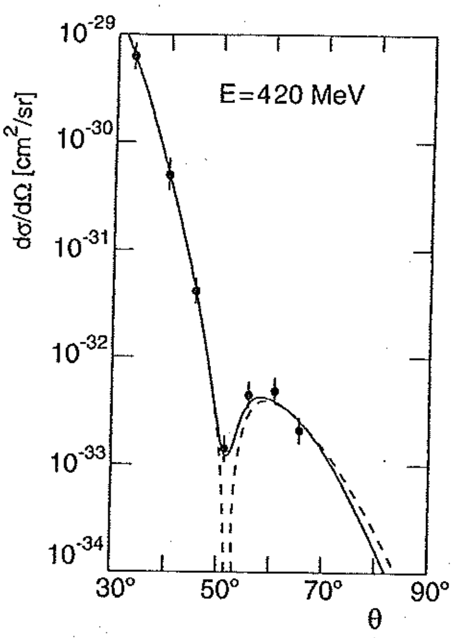


Abb. 5.5. Messung des Formfaktors von ^{12}C durch Elektronenstreuung (nach [Ho57]). Gezeigt ist der differentielle Wirkungsquerschnitt, der bei einer festen Strahlenergie von 420 MeV unter 7 verschiedenen Streuwinkeln gemessen wurde. Die gestrichelte Kurve entspricht dem Verlauf, der sich ergibt, wenn eine ebene Welle an einer homogenen Kugel mit diffusem Rand gestreut wird (Born'sche Näherung); die durchgezogene Kurve entspricht einer exakten Streuphasenanalyse, die an die Messdaten angepasst wurde.

Aus Povh

Tabelle 5.1. Zusammenhang zwischen Ladungsverteilung und Formfaktor für einige kugelsymmetrische Ladungsverteilungen in Born'scher Näherung

Ladungsverteilung $f(r)$		Formfaktor $F(q^2)$	
Punkt	$\delta(r)/4\pi$	1	konstant
exponentiell	$(a^3/8\pi)\cdot\exp(-ar)$	$(1+q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2}\cdot\exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$	Gauß
homogene Kugel	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{für } r \le R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$ mit $\alpha = \lvert q\rvert R/\hbar$	oszillierend

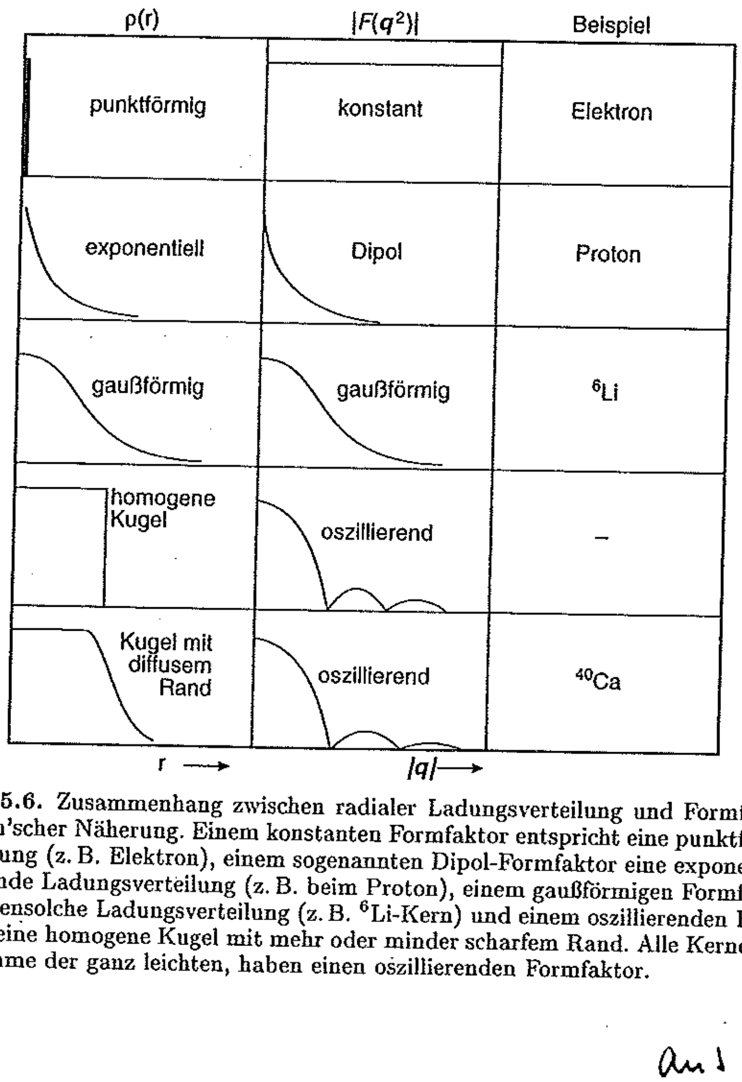


Abb. 5.6. Zusammenhang zwischen radialer Ladungsverteilung und Formfaktor in Born'scher Näherung. Einem konstanten Formfaktor entspricht eine punktförmige Ladung (z. B. Elektron), einem sogenannten Dipol-Formfaktor eine exponentiell abfallende Ladungsverteilung (z. B. beim Proton), einem gaußförmigen Formfaktor eine ebensolche Ladungsverteilung (z. B. ^{6}Li-Kern) und einem oszillierenden Formfaktor eine homogene Kugel mit mehr oder minder scharfem Rand. Alle Kerne, mit Ausnahme der ganz leichten, haben einen oszillierenden Formfaktor.

aus Povh

Inelastische Streuung

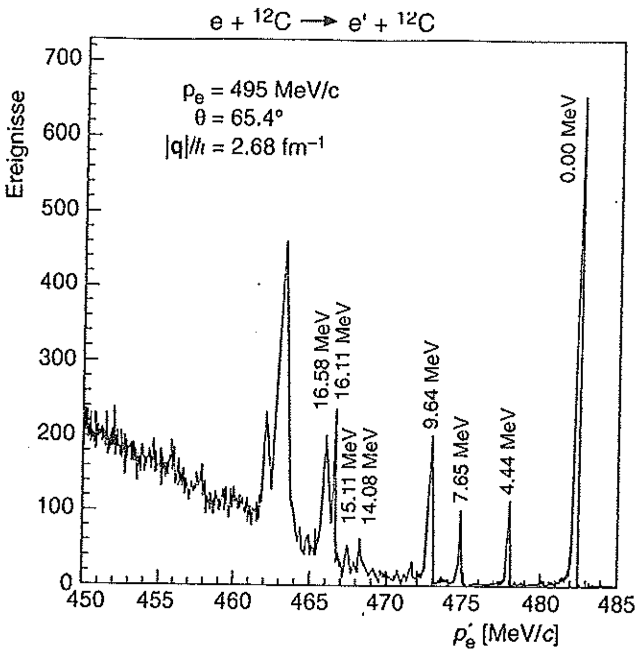


Abb. 5.9. Spektrum aus der Streuung von Elektronen an ^{12}C. Die scharfen Maxima entsprechen der elastischen Streuung bzw. der Anregung diskreter Energieniveaus im ^{12}C-Kern durch inelastische Streuung. Die Anregungsenergie des Kerns ist an den einzelnen Maxima angegeben. Die Elektronen wurden mit dem Linearbeschleuniger MAMI-B in Mainz auf 495 MeV beschleunigt und mit einem hoch auflösenden Magnetspektrometer (vgl. Abb. 5.4) unter einem Streuwinkel von 65.4° nachgewiesen. *(Dieses Bild wurde uns freundlicherweise von Th. Walcher und G. Rosner, Mainz, zur Veröffentlichung überlassen.)*

Formfaktoren des Nukleons (Elastische Streuung des Nukleon)

Radiale Ausdehnung eines Nukleon $\sim 0{,}8$ fm

100 MeV $\sim$ 1 GeV benötigt, Nukleonmasse 938 MeV/c^2

liegt in gleicher Größenordnung

$\Rightarrow$ Targetrückstoß kann nicht mehr vernachlässigt werden, Phasenraumdichte muß modifiziert werden

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{*}_{Mott} \cdot \frac{E'}{E}$$

~~Außerdem~~ Energieverlust des Elektron bei Streuung nicht vernachlässigt werden. $\Rightarrow$ Daher 3-Impulsübertrag muß 4-Impuls

$$q^2 = (p-p')^2 = \underset{(m_e c^2)}{p^2} - 2pp' + \underset{(m_e c^2)}{p'^2}$$

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \qquad = 2m_e c^2 - 2\left(\frac{EE'}{c^2} - |\vec{p}|\,|\vec{p}'|\cos\theta\right)$$

$$|p| \simeq \frac{E}{c} \qquad \approx -\frac{4EE'}{c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Um mit positiven Größen zu arbeiten $Q^2 := -q^2$

Magnetische Moment: Zusätzlich zur WW zwischen Ladung des Elektrons und Ladung des Kerns, muß WW zwischen Strom des Elektrons und dem magnetischen Moment des Nukleons berücksichtigt werden.

Magn. Moment eines geladenen Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens (ohne innere Struktur) (Dirac-Teilchen) ist

$$\mu = g \frac{e}{2m} \frac{\hbar}{2}$$

m = Masse des Teilchens

$g = 2$ aus rel. QM (Dirac Gleichung)

Analog bei Target mit Spin (Nukleon): Bei Streuung um 0° sind Drehimpuls- und Helizitätserhaltung mit einander nicht vereinbar, da magn WW mit Umklappen des Nukleonspins verbunden ist

$\Rightarrow$ Streuung um 180° wird favorisiert

$\Rightarrow$ magn. WW wird zusätzlich ein Term in WQ beschrieben, der $\sin^2\frac{\theta}{2}$ enthält

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}\,\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\substack{\text{Punkt}\\ \text{Spin-}\frac{1}{2}}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[1 + 2\tau \tan^2\frac{\Theta}{2}\right]$$

magnetischer Term

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2}$$

Matrixelement d. WW $\sim \mu \sim \frac{1}{M}$

Rückwärtsstreuung favorisiert $\longrightarrow$ Impulsübertrag $\to Q$