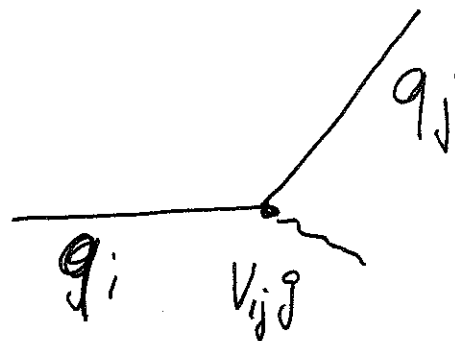


CKM Matrix

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 0,974 & 0,227 & 0,00396 \\ 0,227 & 0,973 & 0,04 \\ 0,008 & 0,041 & 0,999 \end{pmatrix}$$

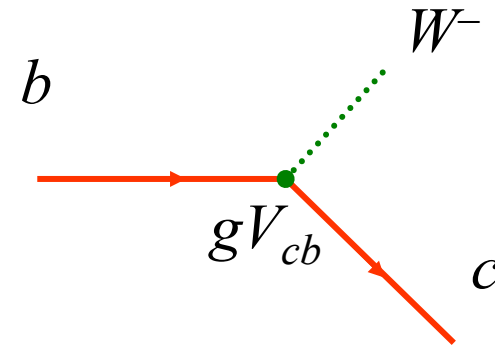


$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}$$

- N.B. diagonal Elemente ≈ 1
d.h. - top Quarks zerfallen bevorzugt (95%) in bottom Quarks
- charmed Mesonen zerfallen bevorzugt in strange Mesonen
- nicht diagonal Elemente sind klein

The Weak Interaction Couplings of Quarks

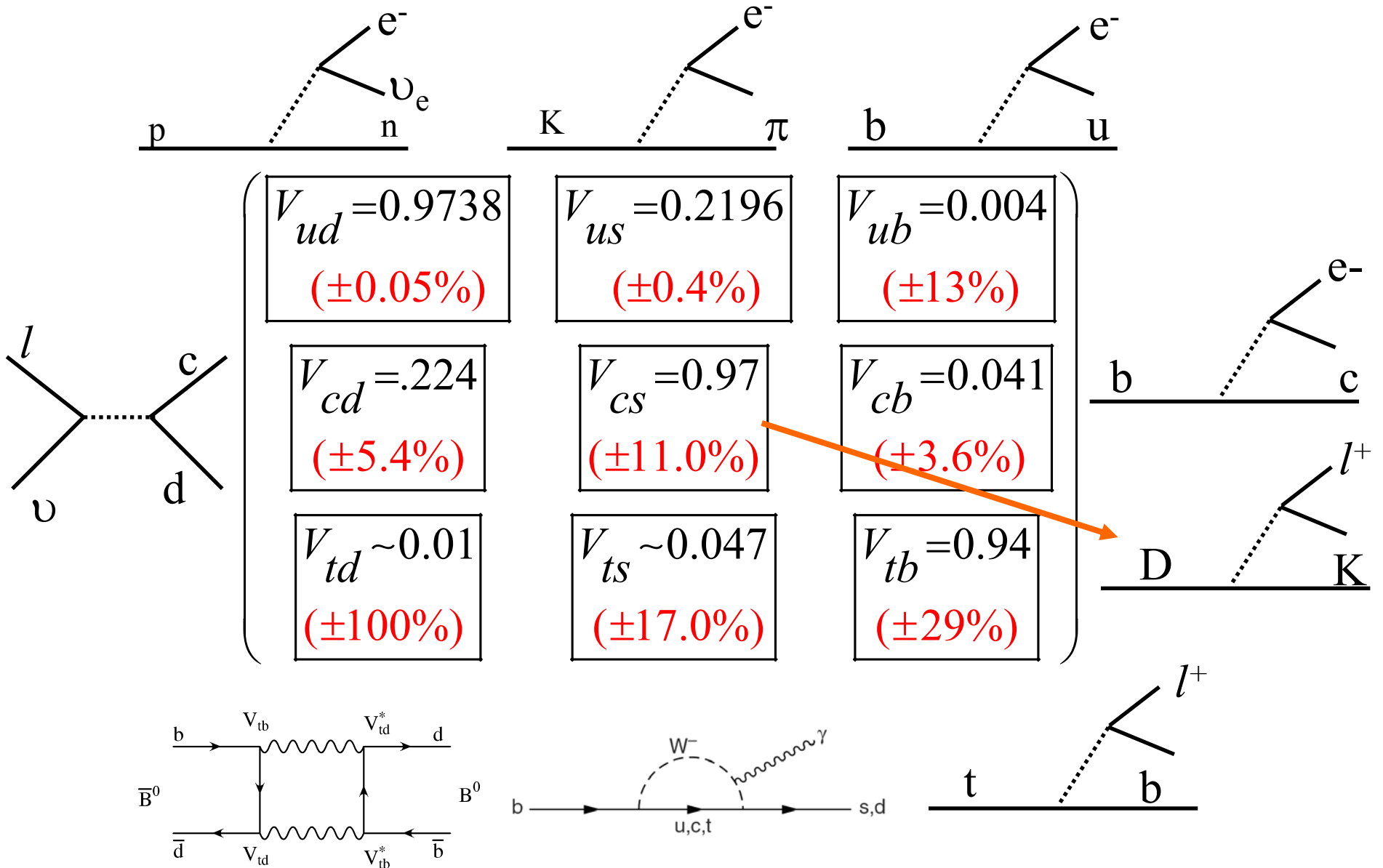
- The coupling strength at the weak vertex is given by gV_{ij}
 - g is the universal Fermi weak coupling
 - V_{ij} depends on which quarks are involved
 - For leptons, the coupling is just g
- For 3 generations, the V_{ij} can be written as a 3x3 complex unitary matrix (CKM)
- View this matrix as rotating the quark states from a basis in which they are mass eigenstates to one in which they are Weak eigenstates



$$\mathbf{V}_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

Measurement of CKM Element Magnitudes



CKM matrix

$$\frac{-g}{\sqrt{2}}(\overline{u}_L, \overline{c}_L, \overline{t}_L)\gamma^\mu W_\mu^+ V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \quad V_{\text{CKM}} \equiv V_L^u V_L^{d\dagger} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (11.2)$$

This Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) matrix [1,2] is a 3×3 unitary matrix. It can be parameterized by three mixing angles and the CP -violating KM phase [2]. Of the many possible conventions, a standard choice has become [3]

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (11.3)$$

where $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, and δ is the phase responsible for all CP -violating phenomena in flavor-changing processes in the SM. The angles θ_{ij} can be chosen to lie in the first quadrant, so $s_{ij}, c_{ij} \geq 0$.

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 0.97427 \pm 0.00015 & 0.22534 \pm 0.00065 & 0.00351^{+0.00015}_{-0.00014} \\ 0.22520 \pm 0.00065 & 0.97344 \pm 0.00016 & 0.0412^{+0.0011}_{-0.0005} \\ 0.00867^{+0.00029}_{-0.00031} & 0.0404^{+0.0011}_{-0.0005} & 0.999146^{+0.000021}_{-0.000046} \end{pmatrix},$$

- Elemente in V_{CKM} sind experimentell bestimmte Parameter des SM. Es gibt keine schlüssige Theorie, die Vorhersagen über die Werte von V_{CKM} macht. (2)

Gibt es eine Cabibbo-artige Winkel bei Leptonen?

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

Solange Neutrinos masselos sind, ist Leptonmischung nicht beobachtbar!
Im SM: $m_\nu = 0$

Ist Winkel 90° ist klar, dass Neutrinos eine nicht-verschränkte Masse haben

Flavor-Eigenzustände $|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle$ sind Eigenzustände der schwachen WW und diese sind nicht identisch mit sogenannten Masseneigenzuständen $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle$

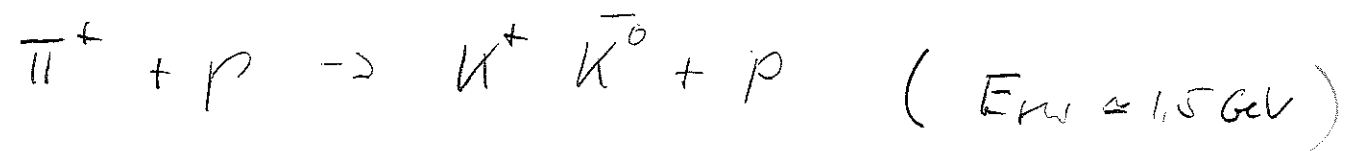
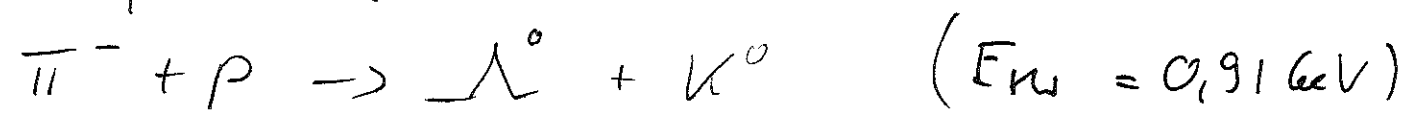
In Analogie zu CKM Matrix wird die Pontecorvo-Rabi-Nakajawa-Saki (PMNS) Matrix eingeführt.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

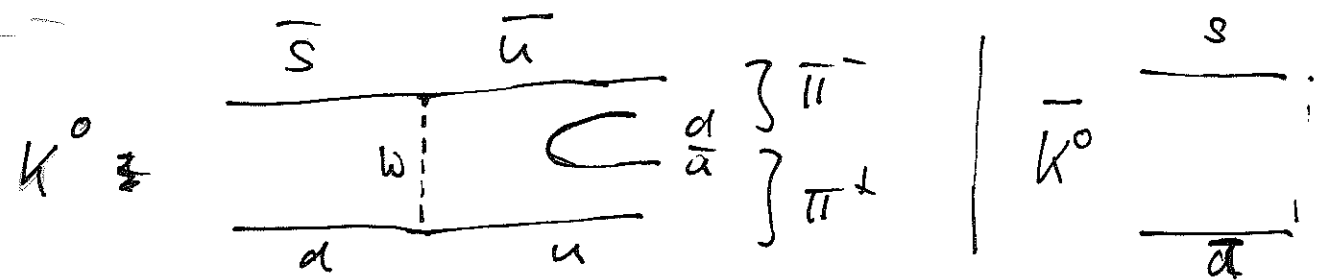
\uparrow Flavor-Eigenzustände PMNS-Matrix \uparrow Masse-Eigenzustände

Neutrale K-Mesone

Erzeugung von K^0, \bar{K}^0 über str. WW



Zerfall $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$



PMNS Matrix

$$\mathcal{L}_{\text{CC}} = - \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{l}_L(x) \gamma_\alpha \nu_{lL}(x) W^{\alpha\dagger}(x) + h.c. ,$$

$$\nu_{lL}(x) = \sum_{j=1}^3 U_{lj} \nu_{jL}(x), \quad (13.78)$$

where U is the 3×3 unitary neutrino mixing matrix [17,18]. The mixing matrix U can be parameterized by 3 angles, and, depending on whether the massive neutrinos ν_j are Dirac or Majorana particles, by 1 or 3 CP violation phases [40,41]:

$$U = \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}$$

$$\times \text{diag}(1, e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}}, e^{i\frac{\alpha_{31}}{2}}) . \quad (13.79)$$

where $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, the angles $\theta_{ij} = [0, \pi/2]$, $\delta = [0, 2\pi]$ is the Dirac CP violation phase and α_{21} , α_{31} are two Majorana CP violation phases. Thus, in the case of massive Dirac neutrinos, the neutrino mixing matrix U is similar, in what concerns the number of mixing angles and CP violation phases, to the CKM quark mixing matrix. The presence of two additional physical CP violation phases in U if ν_j are Majorana particles is a consequence of the special properties of the latter (see, *e.g.*, Refs. [39,40]) .

Values of PMNS Matrix from neutrino oscillation experiments

Based on less current data (28 June 2012) mixing angles are:^[7]

$$s_{12}^2 = 0.307, \quad s_{23}^2 = \begin{cases} 0.386 & \text{(NH)} \\ 0.392 & \text{(IH)} \end{cases}, \quad s_{13}^2 = \begin{cases} 0.0241 & \text{(NH)} \\ 0.0244 & \text{(IH)} \end{cases}, \quad \delta = \begin{cases} 1.08\pi & \text{(NH)} \\ 1.09\pi & \text{(IH)} \end{cases}$$

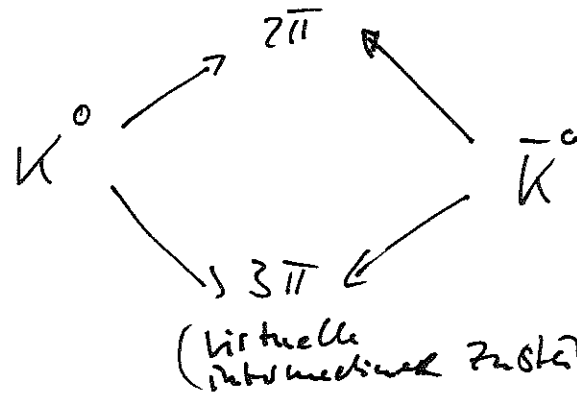
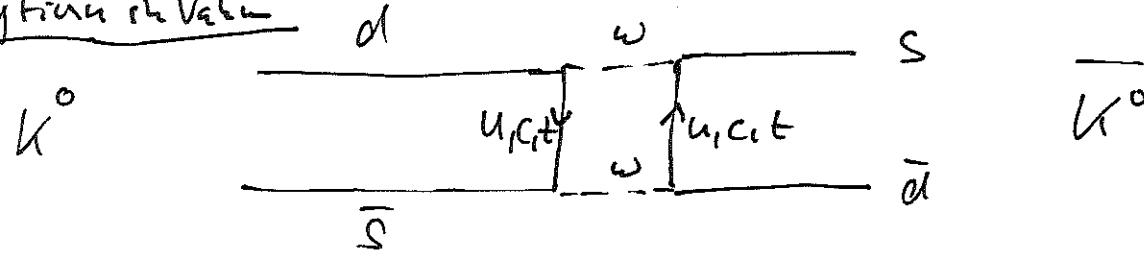
where NH indicates $\Delta m^2 > 0$ normal hierarchy and IH $\Delta m^2 < 0$ inverted hierarchy in the mass spectrum with $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2 > 0$ and $\Delta m^2 = m_3^2 - (m_1^2 + m_2^2)/2$.

These values lead to following PMNS matrices:

$$\mathbf{U}_{\text{NH}} = \begin{bmatrix} 0.822 & 0.547 & -0.150 + 0.0381i \\ -0.356 + 0.0198i & 0.704 + 0.0131i & 0.614 \\ 0.442 + 0.0248i & -0.452 + 0.0166i & 0.774 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{U}_{\text{IH}} = \begin{bmatrix} 0.822 & 0.547 & -0.150 + 0.0429i \\ -0.354 + 0.0224i & 0.701 + 0.0149i & 0.618 \\ 0.444 + 0.0278i & -0.456 + 0.0186i & 0.770 \end{bmatrix}.$$

Beobachtet: Produktion eines reines K^0 -Strahls durch geeignete Wahl der Pion-Energie. Nach einiger Zeit wird er durch aus K^0 und \bar{K}^0 beobachtet

Propagierung im Vakuum



Mischung von K^0 und \bar{K}^0 durch virtuelle (intermediäre) Pionen Zustände

(virtuelle intermediäre Zustände)

$\Delta S = 2$ (Prozess zweiter Ordnung d. schw. WW)

$$|K(t)\rangle = \alpha(t) |K^0\rangle + \beta(t) |\bar{K}^0\rangle$$

Teilchen, die über die schw. WW zerfallen, sind Eigenzustände von CP (Verstärkt)

$$\begin{array}{l}
 CP |K^0\rangle = \eta |K^0\rangle \\
 CP |\bar{K}^0\rangle = \eta' |\bar{K}^0\rangle
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l}
 \text{sind orthogonal} \\
 \text{hence Eigenzustände von CP!}
 \end{array}
 \quad (5)$$

η, η' sind willkürliche Phase $\Rightarrow \eta = \eta' = 1$

Aber: Linearkombinationen sind Eigenzustände von CP

$$\begin{array}{l}
 |K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \\
 CP |K_S\rangle = + |K_S\rangle
 \end{array}
 \quad \underline{CP = +1}$$

$$\begin{array}{l}
 |K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \\
 CP |K_L\rangle = - |K_L\rangle
 \end{array}
 \quad CP = -1$$

K_S : "s" für "short" - kurze Lebensdauer

K_L : "l" für "long" - lange Lebensdauer

K^0, \bar{K}^0 : EZ d. st. UV (Produktion)

K_S, K_L : EZ d. schw. UV (Propagation und Zerfall)

Zerfalls modi

$$\begin{aligned}
K_S &\rightarrow \pi^0 \pi^0 \\
&\rightarrow \pi^+ \pi^- \\
&\quad (CP = +1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P |\pi^0\rangle &= -1 |\pi^0\rangle \\
C |\pi^0\rangle &= +1 |\pi^0\rangle \\
CP |\pi^0, \pi^0\rangle &= +1 |\pi^0, \pi^0\rangle \\
\text{Parastatistik} &\Rightarrow \text{VF symmetrisch} \\
&\text{unter Austausch zweier Teilchen} \\
&\Rightarrow CP = +1 \quad (\text{Spin } 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_L &\rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \\
&\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{CP = -1}
\end{aligned}$$

(siehe vorher)

Der Zerfall von drei Pionenfall hat unterschiedliche Q-Werte und damit auch unterschiedliche Phasenfähne
 \Rightarrow unterschiedliche Zerfallsraten

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \rightarrow |\pi, \pi\rangle \quad (CP = +1)$$

$$\tau_S = 0,893 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \rightarrow |\pi, \pi, \pi\rangle \quad (CP = -1)$$

$$\tau_L = 0,517 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

Strommess (Seltsamer-L) Oszillation

6
7

Amplitude des $|K_S\rangle$ -Zustandes

$$a_S(t) = a_S(0) e^{-iE_S t/\hbar} \cdot e^{-\Gamma_S t / 2\hbar}$$

E_S : Gesamtenergie (Ehren-Welleansatz)

$$\frac{E_S}{\hbar} = \omega_S$$

$\Gamma_S = \frac{\tau}{\tau_S}$: Zustandsbreite

so dass gilt:
$$J_{K_S}(t) = |a_S(t)|^2 = a_S a_S^* = a_S(0) a_S^*(0) \cdot e^{-\Gamma_S t / \hbar}$$
$$= J_{K_S}(0) e^{-t/\tau_S} \quad (\text{radioaktives Zerfallsgesetz})$$

Im Pulsesystem des Teilchens ist $E_S = \hbar \omega_S$

$$a_S(t) = a_S(0) e^{-\left(\Gamma_S/2 + i\omega_S\right)t}$$

äquivalent für K_L

$$a_L(t) = a_L(0) e^{-\left(\Gamma_L/2 + i\omega_L\right)t}$$

Da K_L und K_S unterschiedliche Lebensdauern \Rightarrow gibt unterschiedliche Masse möglich ⑦
⑧

Betrachten reine K^0 Strahl in einem stabilen Prozess zur Zeit $t=0$
Produziert (Intensität normiert = 1)

$$a_S(0) = a_L(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{weil } |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |K_S\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |K_L\rangle$$

Nach einer Zeit t ist die Intensität von K^0

$$I(K^0) = \frac{a_S(t) + a_L(t)}{\sqrt{2}} \cdot a_S^*(t) + a_L^*(t)$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t/2} \cdot \underbrace{\cos(\Delta n t)} \right]$$

$$\Delta n := n_L - n_S$$

$$I(\overline{K^0}) = \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t/2} \cdot \underbrace{\cos(\Delta n t)} \right]$$

K^0 \bar{K}^0 -bar oscillations

