Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik II

Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik

Sommersemester 2013/14

Blatt Nr. 3 24. April 2014

Aufgabe 1 : Topquark-Erzeugung in Elektron-Positron-Annihilation

Das Topquark hat eine Masse $m = 172$ GeV. An einem zukünftigen e^+e^- Linear Collider mit je 250 GeV Strahlenergie im CMS können Paare von Top-Antitop-Quarks über die Vernichtung in ein Photon und ein Z-Boson erzeugt werden. Hier soll nur der Photon-Beitrag betrachtet werden: $e^-(p) + e^+(k) \to \gamma \to t(p') + \bar{t}(k')$.

a. Zeigen Sie, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt im CMS geschrieben werden kann in der Form (wobei die Elektronmasse = 0 gesetzt wird)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}|\mathcal{M}|^2$$

mit $s = (p + k)^2$ [außerdem wie üblich $t = (p - p')^2$, $u = (p - k')^2$]. Der Streuwinkel θ ist der Winkel zwischen $\vec{p}$ und $\vec{p}'$.

b. Berechnen Sie den unpolarisierten differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ mit Hilfe des Matrixelements $\mathcal{M}$ aus dem zugehörigen Feynmangraphen, sowie den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^+e^- \to t\bar{t})$ durch Integration uber $d\Omega$ und diskutieren Sie die Energieabhängigkeit.

Aufgabe 2 : Topquark-Erzeugung in Proton-Antiproton-Kollisionen

Am Proton-Antiproton-Collider Tevatron erfolgt die Erzeugung von Top-Antitop-Paaren vorrangig über den Parton-Prozess der Quark-Antiquark-Annihilation via Gluon-Austausch,
$q(p) + \bar{q}(k) \to G \to t(p') + \bar{t}(k')$.
Berechnen Sie den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ im CMS für den angegebenen Parton-Prozess gemäß den Feynman-Regeln für die QCD (mit masselosen q, $\bar{q}$), sowie den zugehörigen totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma(q\bar{q} \to t\bar{t})$, Dabei ist zu beachten, dass über die Colour der Gluonen und der t, $\bar{t}$-Quarks zu summieren und über die Colour der q, $\bar{q}$-Quarks zu mitteln ist.
Diskutieren Sie die Größenordnung im Vergleich zur Topquark-Erzeugung in Elektron-Positron-Annihilation (mit $\alpha_s \simeq 0.1$).

Aufgabe 3 : Experimentelle Bestimmung des Ladungsradius von Mesonen

Pionen und Kaonen sind instabile Teilchen mit Lebensdauern im Bereich von $\sim 10^{-8}$ s. Mit einer Masse von $m_\pi \cong 140$ MeV bzw. $m_K \cong 500$ MeV sind sie leichter als Proton oder Neutron. Im Standardmodell werden die Mesonen (zu denen auch Pion und Kaon gehören) als Quark-Antiquark-Paare interpretiert, die durch die starke Wechselwirkung aneinander gebunden sind.
Mitte der 80er Jahre wurden am SPS Beschleunigerring am CERN die Ladungsradien von Mesonen vermessen. Im Experiment wird ein hochenergetischer Pion bzw. Kaon-Strahl auf ein Target aus Wasserstoff-Atomen gerichtet. Die Energie der Teilchen im Strahl beläuft sich auf $E_\pi = 300$GeV bzw. $E_K = 250$ GeV. Die Mesonen wechselwirken dabei mit den Hüllenelektronen der Target-Atome.

Aus der Winkelverteilung der Ruckstoßelektronen läßt sich dann der Formfaktor und damit auch der Ladungsradius der gestreuten Mesonen bestimmen.

a. Warum wird in diesem Experiment das Meson als Projektil und das Elektron als Target verwendet? Berechnen Sie die Kinematik des Streuprozesses, und leiten Sie einen Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel γ des Rückstoßelektrons zur Strahlrichtung, der Strahlenergie E_M und dem Impulsubertrag $q^2 := -Q^2$ her. Geben Sie auch den maximalen Q^2 -Wert an, bei dem der Formfaktor des Mesons gemessen werden kann.

b. Zeigen Sie, dass zwischen dem gemessenen Formfaktor $F(Q^2)$ und dem mittleren Ladungsradius $\langle r^2 \rangle$ folgender Zusammenhang gilt:

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left(\frac{dF(Q^2)}{dq^2} \right)_{Q^2=0}$$

Tipp: Beginnen Sie mit der Fouriertransformation des ortsabhängigen Formfaktors $f(\vec{x})$,

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} f(\vec{x}) d^3x$$

c. Die experimentellen Ergebnisse fur die Formfaktoren der Mesonen sind in Abb. 1 gezeigt. Beide lassen sich mit einer Gleichung der Form

$$F(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{a^2\hbar^2} \right)^{-1}$$

einem Monopolformfaktor, wiedergeben. Lesen Sie den Parameter a aus den Daten ab und bestimmen Sie daraus die mittleren Ladunsgradien von Pion und Kaon.

d. Wie erklären Sie das Verhältnis der ermittelten Ladungsradien der beiden Mesonen, $\langle r^2 \rangle_K < \langle r^2 \rangle_\pi$?

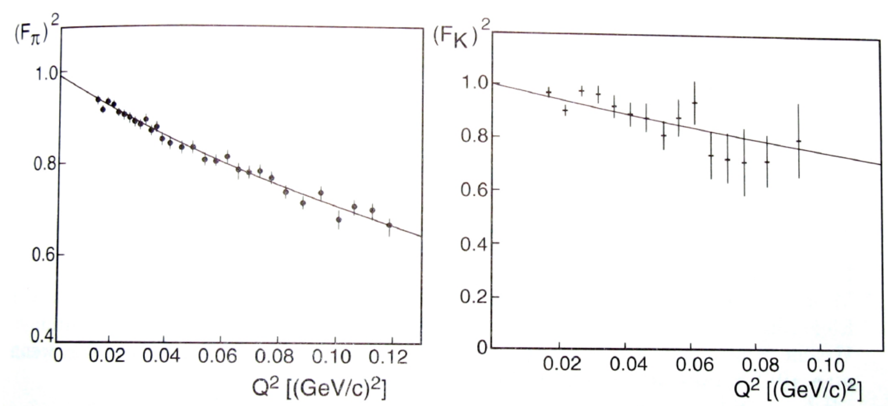

Abbildung 1: Pion- und Kaon-Formfaktor als Funktion von Q^2 . Die durchgezogenen Linien entsprechen einem Monopolformfaktor $(1 + Q^2/a^2\hbar^2)^{-1}$. S. Amendolia et al., Phys. Lett. B146 (1984) 116, Phys. Lett. B178 (1986) 435

Aufgabe 4 : Callan-Gross-Beziehung

Für die tiefinelastische Streuung von Elektronen am Proton ergibt sich für die Strukturfunktionen des Protons der Zusammenhang

$$2xF_1(x,Q^2) = F_2(x,Q^2)\,,$$

der als Callan-Gross-Beziehung bekannt ist. Dabei beschreiben $F_2(x,Q^2)$ und $F_1(x,Q^2)$ den elektrischen bzw. magnetischen Anteil der Wechselwirkung. Q^2 gibt das Quadrat des Impulsübertrags an.

a. Die *Bjorken'sche Skalenvariable* ist als $x := \frac{Q^2}{2M\nu}$ definiert, mit M als Masse des Protons. $\nu = E - E'$ entspricht dem Energieübertrag vom Projektil auf das Target. Zeigen Sie, dass x ein Maß für die Inelastizität eines Streuprozesses ist.

b. Wie muss der Rutherford-Streuquerschnitt modifiziert werden, um den für die Streuung zweier punktformiger Spin-1/2-Teilchen gültigen Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\left[1 + 2\tau(Q^2,\nu)\tan^2\frac{\theta}{2}\right]$$

zu erhalten? Dabei gibt der Faktor $\tau = \frac{Q^2}{4m^2c^2}$ den Anteil des magnetischen Moments des Targets (der Masse m) an der Wechselwirkung an.

c. Leiten Sie aus dem Vergleich des Ergebnisses der letzten Teilaufgabe mit dem für die tiefinelastische Streuung gültigen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\left[W_2(Q^2,\nu) + 2W_1(Q^2,\nu)\tan^2\frac{\theta}{2}\right]$$

die Callan-Gross-Beziehung her. Welche Annahmen müssen dabei über die Substruktur des Protons gemacht werden? Wie läßt sich x dann interpretieren?

Hinweis: Die dimensionsbehafteten Strukturfunktionen $W_{1/2}$ sind über

$$F_1(x,Q^2) = Mc^2 2W_1(Q^2,\nu),\;\; F_2(x,Q^2) = \nu W_2(Q^2,\nu)$$

mit den dimensionslosen Strukturfunktionen $F_{1/2}$ verknüpft.

d. Wie würde eine vergleichbare Beziehung für die Formfaktoren von Spin-0-Teilchen (Bosonen) aussehen?