Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

6. Übungsblatt - 29.November 2010

Musterlösung

Franziska Konitzer (franziska.konitzer@tum.de)

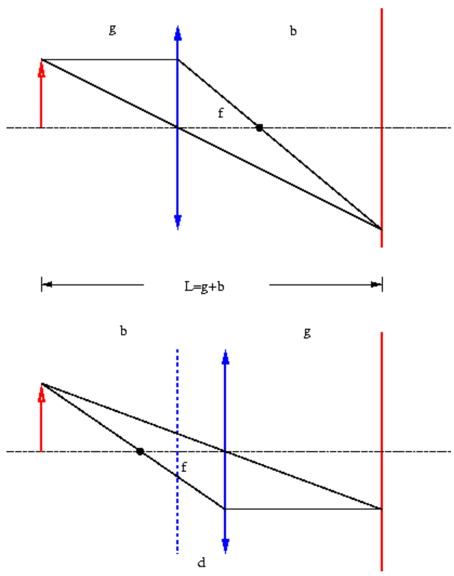
Aufgabe 1 (★★) (6 Punkte)

Um die Brennweite f einer Sammellinse zu bestimmen, können Sie z.B. so vorgehen: Sie bilden ein Objekt durch die Linse auf einen Schirm ab und messen den Abstand L zwischen Objekt und Schirm. Dürfen Sie dafür den Abstand zwischen Objekt und Linse willkürlich wählen? Indem Sie nun den Schirm an seinem Ort lassen und die Linse um die Strecke d verschieben, können Sie eine zweite Position finden, die ein scharfes Bild erzeugt. Bestimmen Sie daraus f. Fertigen Sie eine Zeichnung der Anordnung an.

Lösung:

Der Abstand zwischen Objektiv und Linse ist nicht willkürlich zu wählen. Da man ein reelles Bild erhalten möchte, muss $g > f$ gelten.

[1]



[3]

Aus der Zeichnung kann man den Zusammenhang für den Abstand d

$$d = b - g \tag{1}$$

und für die Gesamtlänge

$$L = g + b \tag{2}$$

ablesen. Auflösen nach b und g und gegenseitiges Einsetzen ergibt

$$b = \frac{L+d}{2}, g = \frac{L-d}{2} \tag{3}$$

[**1**]

Unter Verwendung der Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \Rightarrow f = \frac{bg}{b+g} \tag{4}$$

und den Ergebnissen für die Bild- und Gegenstandsweite, folgt für die Brennweite

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \tag{5}$$

[**1**]

Aufgabe 2 (★) (5 Punkte)

Eine dünne bikonvexe Linse aus Glas (n_g=1.5) hat Kurvenradien von 30 cm und 60 cm. Wenn diese Linse eine Deckenlampe mit der Hälfte ihrer Originalgröße auf einem Schirm abbildet, was ist der Abstand zwischen der Lampe und der Linse? Was ist der Abstand zwischen der Linse und dem Schirm? Konstruieren Sie den Strahlengang.

Lösung:

Um die Brennweite zu bestimment, benutzt man die Gleichung

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.5-1)\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{-60}\right) \tag{6}$$

$$f = 40\text{cm} \tag{7}$$

[**1**]

Die Vergrößerung ist mit $\frac{1}{2}$ angegeben, allerdings muss das Bild seitenverkehrt sein, da es reel ist:

$$V_T = -\frac{b}{g} \rightarrow b = \frac{1}{2}g \tag{8}$$

[**1**]

Dies kann man einsetzen in

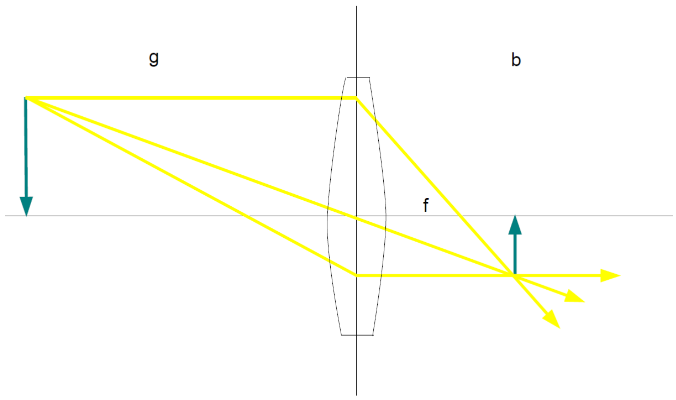
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{3}{g} \tag{9}$$

und erhält somit

$$g = 3f = 120\text{cm} \quad , \quad b = 60\text{cm} \tag{10}$$

[**1**]

Der Strahlengang sieht folgendermaßen aus:



[**2**]

Aufgabe 3 (★) (4 Punkte)

Eine bikonkave Linse mit Brennweite f =-60 mm befindet 120 mm vor einer plankonvexen Linse mit Radius 60 mm und Brechzahl n =1.5. Bestimmen Sie das Bild (d.h. Position und Vergrößerung), das durch eine 3mm große Ameise entsteht, die sich 180 mm vor der bikonkaven Linse befindet.

Lösung:

Die Aufgabe kann über die Berechnung des Strahlengangs durch die zwei Linsen gelöst werden. Alternativ kann man die beiden Linsen auch als Linsensystem betrachten. Im ersten Fall betrachtet man zuerst nur die bikonkave Linse. Dann ist:

$$b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{-60} - \frac{1}{180}\right)^{-1} = -45\text{mm} \tag{11}$$

[**1**]

und die Vergrößerung:

$$V_T = -\frac{b}{g} = \frac{1}{4} \tag{12}$$

[**1**]

Nun betrachtet man den Strahlengang durch die plankonvexe Linse; hier ist nun $g = 120$ mm + 45 mm. Die Brennweite ist gegeben durch

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right) = 120\text{mm} \tag{13}$$

$$b = \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{165}\right)^{-1} = 440\text{mm} \tag{14}$$

[**1**]

Das Bild befindet sich also 440 mm zur Rechten der plankonvexen Linse. Die Vergrößerung beträgt dann

$$V_T = -\frac{1}{4}\frac{440}{165} = -\frac{2}{3} \tag{15}$$

Also ist die Ameise verkleinert und seitenverkehrt.

[**1**]

Aufgabe 4 (★) (5 Punkte)

a) Zur Korrektur der Kurzsichtigkeit eines Auges (hervorgerufen durch Verlängerung des Augapfels) ist ein Brillenglas mit einer Dioptrienzahl von $D = 1/f = -2$ erforderlich. Bestimmen Sie die maximale Entfernung s_{max}, auf die das Auge ohne Brille akkomodieren kann.

Lösung:

Die Brille für Kurzsichtige (Zerstreuungslinse) entwirft von einem Gegenstand im Unendlichen ein virtuelles Bild in der Entfernung s_{max}, in der ein Kurzsichtiger gerade noch scharf sehen kann (entspanntes Auge):

[**1**]

$$D = \frac{1}{f} = -2 \Rightarrow f = -0.5\text{m} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \text{ mit } g \to \infty \text{ folgt } b = f$$

Die Bildweite entspricht genau der Brennweite der Linse, also 50 cm.

[**1**]

b) Ein altersweitsichtiges Auge (normale Länge des Augapfels) kann nur noch bis minimal $s_{min} = 40\text{cm}$ akkomodieren. Bestimmen Sie die erforderliche Dioptrienzahl einer Brille, die scharfes Sehen bis $s_0 = 20\text{cm}$ ermöglicht. Bis zu welcher maximalen Entfernung kann das Auge mit Brille noch akkomodieren?

Lösung:

Die Brille muss ein $40cm$ entferntes Bild von einem $20cm$ entfernten Gegenstand erzeugen:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{17}$$

[**1**]

mit $g = 20\text{cm}$ und $b = -40\text{cm}$ folgt:

$$f = 40\text{cm} \tag{18}$$

$$\Rightarrow \quad D = 2.5 \tag{19}$$

[**1**]

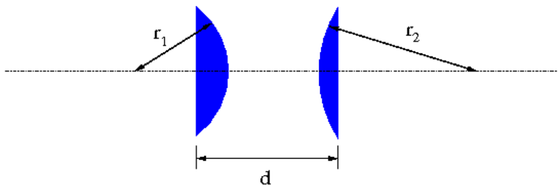
Für $g \to f$ erzeugt die Brille ein unendlich entferntes Bild. s_{max} beträgt also $40cm$. Liegt der Gegenstand weiter als der Brennpunkt der Linse entfernt, so entsteht ein reeles Zwischenbild durch die Linse hinter dem Auge, welches nicht mehr scharf abgebildet werden kann.

[**1**]

Aufgabe 5 (★★) (8 Punkte)

Ein Okular bestehe aus zwei dünnen Plankonvexlinsen mit den Krümmungsradien r_1 und r_2 im Abstand $d = 2.604$ cm voneinander (s. Skizze).

a) Das Okular soll als Lupe die Vergrößerung $V = 10$ besitzen. Wie groß muss dann die Brennweite f gewählt werden (deutliche Sehweite ≈ 25 cm)?



Lösung:

Die Vergrößerung einer Lupe ist gegeben durch $v = s/f$, mit f als Brennweite und s als Entfernung bei der man mit normalen Auge noch scharf sehen kann (deutliche Sehweite). Somit folgt für die gesuchte Brennweite des Okulars:

$$f = \frac{s}{v} = 2.5\text{cm} \tag{20}$$

[**1**]

b) Die Brennweite f des Okulars soll bei der Wellenlänge λ_0 unabhängig von kleinen Wellenlängenänderungen sein (Achromat). Bei λ_0 habe das Material beider Linsen den Brechungsindex $n = 1.4$. Berechnen Sie die Krümmungsradien r_1 und r_2 der beiden Linsen.

Lösung:

Für die Brennweite einer dünnen Linse gilt allgemein:

$$\frac{1}{f_i} = (n-1)\left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}}\right). \tag{21}$$

Betrachtet man nun die hier vorliegenden plankonvexen Linsen, d.h setzt man für die linke Linse $r_{11} = \infty$, $r_{12} = r_1$ und für die rechte Linse dementsprechend $r_{21} = r_2$, $r_{22} = \infty$, so erhält man folgende Brennweiten:

[**1**]

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{n-1}{r_1} \text{ und } \frac{1}{f_2} = \frac{n-1}{r_2} \tag{22}$$

[**1**]

Somit ergibt sich die Brennweite des Linsensystems zu:

$$\frac{1}{f} = -\frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + \frac{(n-1)^2 d}{r_1 r_2} \tag{23}$$

$$\Rightarrow f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)[r_1 - r_2 + (n-1)d]} \tag{24}$$

[1]

Da die Brennweite unabhängig von kleinen Änderungen in der Wellenlänge sein soll, muß die Beziehung $\frac{df}{d\lambda} = 0$ gelten, wobei $n = n(\lambda)$. D.h.

$$\frac{df}{d\lambda} = -\frac{r_1 r_2}{\text{Nenner}^2}\left\{\frac{dn}{d\lambda}[r_1 - r_2 + (n-1)d] + (n-1)d\frac{dn}{d\lambda}\right\} \overset{!}{=} 0 \tag{25}$$

$$\Rightarrow \quad r_1 - r_2 + 2(n-1)d = 0 \tag{26}$$

[1]

Formt man Gleichung (24) in folgender Art um

$$r_1 r_2 = (n-1)fr_1 - (n-1)fr_2 + (n-1)^2 fd \tag{27}$$

und ersetzt r_2 durch Gleichung (26)

$$r_1(r_1 + 2(n-1)d) = -(n-1)^2 fd \tag{28}$$

kann man nach r_1 auflösen:

$$r_1^2 + 2r_1(n-1)d + (n-1)^2 fd = 0 \tag{29}$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = -(n-1)d \pm \sqrt{(n-1)^2 d^2 - (n-1)^2 fd} \tag{30}$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = (n-1)d\left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{f}{d}}\right] \tag{31}$$

[1]

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt die zwei Lösungen

$$r_1 = 0.4 \cdot 2.604\left[-1 + \sqrt{1 - \frac{2.5}{2.604}}\right] cm = -0.83cm \tag{32}$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = 2(n-1)d + r_1 = 1.25cm \tag{33}$$

[1]

bzw.

$$r_1 = 0.4 \cdot 2.604\left[-1 - \sqrt{1 - \frac{2.5}{2.604}}\right] cm = -1.25cm \tag{34}$$

$$\Rightarrow \quad r_2 = 0.83cm \tag{35}$$

was einer Vertauschung der beiden Linsen im Okular entspricht.

[1]