
Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik II
Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik
Sommersemester 2011/12

Blatt Nr. 4

10. Mai 2012

Aufgabe 1 : Mesonen-Multipletts

Im Konstituentenquarkmodell sind Mesonen aus einem Quark q und einem Antiquark \bar{q} aufgebaut. Aus den drei leichtesten Flavours u, d, s lassen sich neun Quark-Antiquark-Paare bilden, die sich in ein Oktett und ein Singulett aufteilen lassen. Das bringt man mit der Schreibweise $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ zum Ausdruck. Das Oktett lässt sich weiterhin in 1 (Isospin-) Triplett, 2 Dubletts und 1 Singulett aufspalten. Die orthonormalen Wellenfunktionen lassen sich dabei durch SU(3)-Transformationen ineinander umwandeln, das Singulett nicht. Je nach Kopplung der Spins erhält man Zustände mit Spin 0 (pseudoskalare Mesonen) oder Spin 1 (Vektormesonen).

- Das Konstituentenquarkmodell besagt, dass die Quantenzahlen der Mesonen aus den Quantenzahlen der Konstituentenquarks folgen. Führen Sie folgende Größen der Mesonen auf die Quarks zurück: Spin, Parität, Isospin, Strangeness und Baryonenzahl.
- Wie lauten die Flavour-Wellenfunktionen des Pion-Tripletts π^0, π^\pm ? Wie sind diese miteinander verknüpft?
- Neben π^0 gibt es noch 2 weitere Teilchen mit $I_z = 0$, nämlich die Isospin-Singulets η und η' . Geben Sie deren Wellenfunktionen an, so dass sie untereinander sowie zu π^0 orthogonal sind. Welches Teilchen gehört zum Oktett, welches ist das Singulett? ($\langle u\bar{u} | u\bar{u} \rangle = 1, \langle u\bar{u} | d\bar{d} \rangle = 0$ und analog für die anderen Flavours).
- Vergleichen Sie nun die Massen der pseudoskalaren π -Mesonen mit den entsprechenden ρ -Mesonen. Wie erklären Sie sich den Massenunterschied?
- Die Mesonenmassen können gut beschrieben werden, wenn man die Spin-Spin-Wechselwirkung der Quarks berücksichtigt:

$$m_{q\bar{q}} = m_q + m_{\bar{q}} + \Delta m_{ss}$$
$$\text{mit } \Delta m_{ss} = a \frac{\vec{S}_q \cdot \vec{S}_{\bar{q}}}{m_q m_{\bar{q}}}.$$

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Operators der beiden Quarkspins $\vec{S}_q \cdot \vec{S}_{\bar{q}}$ den Wert $-3/4\hbar^2$ für die pseudoskalaren und $1/4\hbar^2$ für die Vektormesonen hat.

- Im Gegensatz zu den Massen der Konstituentenquarks sind die Mesonenmassen experimentell direkt zugänglich. Bestimmen Sie, durch Vergleich entsprechender pseudoskalarer und Vektormesonen die Konstante a und weiterhin die Massen der Konstituentenquarks. Nehmen Sie dazu an, dass $m_u = m_d$. Wodurch wird diese Annahme motiviert?
- Welche experimentellen Hinweise gibt es für die Richtigkeit des Quark-Modells der Mesonen?
 $m_{\pi^\pm} = 140 \text{ MeV}, m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}, m_{\rho^\pm} = 775 \text{ MeV}, m_{\rho^0} = 775 \text{ MeV}, m_{K^\pm} = 494 \text{ MeV}$ Weitere, experimentell gefundene Mesonenmassen findet man z.B. bei der Particle Data Group unter <http://pdg.lbl.gov/>.

Aufgabe 2 : Baryonen-Multipletts

Die Baryonen sind im Konstituentenquarkbild aus 3 Quarks aufgebaut, ihre Antiteilchen entsprechend aus drei Antiquarks. Aus den drei verschiedenen Flavours u, d, s lassen sich im Prinzip 27 Zustände mit Spin $1/2$ bzw. $3/2$ konstruieren. Allerdings sind nur jeweils 8 bzw. 10 vollständig symmetrisch unter Vertauschung von zwei beliebigen Quarks: Das Baryonen-Oktett bzw. das Baryonen-Dekuplett.

- Wie erklärt man sich die Existenz von Δ^{++} trotz Pauli-Verbot? Warum gibt es keinen Zustand $|uuu\rangle$ mit Spin $1/2$ aber dafür mit Spin $3/2$?
- Die Gesamtwellenfunktion der Baryonen ψ_B lässt sich zerlegen in das Produkt aus Orts-, Spin-, Flavour- und Colour-Wellenfunktion:

$$\psi_B = \phi_{Ort} \phi_{Spin} \phi_{Flavour} \phi_{Colour}$$

Welche Bedingung muss die Gesamtwellenfunktion erfüllen? Was kann man über ϕ_{Ort} und ϕ_{Colour} aussagen?

- Das Proton besteht aus 2 u-Quarks und einem d-Quark. Geben sie dessen vollständig symmetrisierte Spin-Flavour-Wellenfunktion an. Wie lautet diese für das Neutron?
- Berechnen Sie das Verhältnis der magnetischen Momente von Proton und Neutron. Das magnetische Moment eines Nukleons $|N\rangle$ ist dabei nicht anderes als der Erwartungswert des Spinoperators:

$$\mu_N = \frac{e}{2m_q} \langle N | \sum_{u,d} Q_i \sigma_3 | N \rangle,$$

wobei σ_3 für die 3. Paulische Spinmatrix steht.

Aufgabe 3 : Gluonen

- Überlegen Sie sich (in Analogie zur Konstruktion der Flavour-Wellenfunktionen der Mesonen) wie die Farbwellenfunktionen der Gluonen dargestellt werden können. Welche Bedeutung kommt dem total symmetrischen Zustand zu?
- Was kann man aus den 3-Jet-Ereignissen über die Gluonen lernen?

Aufgabe 4 : Universalität der schwachen Wechselwirkung

Die Theorie der schwachen Wechselwirkung besagt, dass alle Quarks und Leptonen die gleiche schwache Ladung g tragen, d.h. W- und Z-Bosonen koppeln an alle Quarks und Leptonen gleichermaßen. Eine Folge ist, dass, wenn ein Teilchen auf mehrere Arten schwach zerfallen kann, die verschiedenen Kanäle alle gleich häufig auftreten, sofern der Phasenraum dabei vernachlässigt wird.

- Geben Sie die möglichen Zerfallskanäle für das μ - und das τ -Lepton an. Beachten Sie hierbei die Massen der Zerfallsprodukte. Skizzieren Sie jeweils die Feynman-Diagramme.

b. Die Zerfallsbreite des Myons ergibt sich zu

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

Leiten Sie damit die Lebensdauer des τ -Leptons aus der Lebensdauer des Myons ab.

$$m_\mu = 105.7 \text{ MeV}, \tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}, m_\tau = 1776.9 \text{ MeV}$$

Aufgabe 5 : Pionen-Zerfall

Geladene Pionen können als leichteste geladene Hadronen nur in einem semileptonischen Prozess zerfallen. Die beobachtete Lebensdauer ist $\tau_\pi = 2.603 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Die Messung des Verzweigungsverhältnisses R ergab

$$R = \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = 1.23 \cdot 10^{-4}.$$

- Warum treten die energetisch möglichen Zerfälle $\pi^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma$ oder $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \gamma$ nicht auf?
- Zeichnen Sie das Feynman-Diagramm für den Zerfall des Pions und überlegen Sie sich wie sich Spin und Impuls der Zerfallsprodukte im Schwerpunktssystem des Pions verhalten. Wie würden die geladenen Pionen zerfallen, wenn Elektron und Myon masselos wären?
- Welches Verzweigungsverhältnis R für den Zerfall von geladenen Pionen würden Sie aufgrund von Phasenraumbetrachtungen erwarten?
- Zeigen Sie, dass der experimentelle Wert für das Verzweigungsverhältnis R erklärt werden kann, wenn das W-Boson nur an linkshändige Teilchen und rechthändige Antiteilchen koppelt.
- Die schwache Wechselwirkung hat keine Symmetrie unter Paritätstransformation (P) und Ladungskonjugation (C). Überlegen Sie sich, dass beides gleichbedeutend ist mit der Helizitätsabhängigkeit der Kopplung der W/Z-Bosonen. Wie verhält sich die schwache Wechselwirkung unter einer CP-Transformation?