
Übung zur Kern- Teilchen- und Astrophysik II
Prof. Dr. S. Schönert, Prof. Dr. W. Hollik
Sommersemester 2011/12

Blatt Nr. 5

16. Mai 2012

Aufgabe 1 Cabibbo-Mischungswinkel

Die Kopplungskonstanten G_F für Fermiübergänge im Zerfall von Hadronen und Leptonen sind nicht exakt identisch. Ein Modell, das diesen Unterschied erklärt, geht davon aus, dass die Quarkzustände, an welche die Austauschbosonen der schwachen Wechselwirkung ankoppeln, nicht die Flavour- oder Masseneigenzustände der starken Wechselwirkung sind. Für die ersten zwei Quarkfamilien kann man dies mit dem Cabibbo-Mischungswinkel θ_C formulieren:

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}$$

Die Konvention ist so, dass die Quarkzustände mit Ladung $Q = \frac{2}{3}$ unverändert bleiben, während diejenigen mit Ladung $Q = \frac{1}{3}$ miteinander mischen. Alle drei Quarkfamilien werden über die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) miteinander verbunden.

Die schwache Wechselwirkung ist nun so, dass die W^\pm -Bosonen nur Übergänge innerhalb von Quarkfamilien vermitteln können, also z.B. $|d'\rangle \leftrightarrow |u\rangle$ und $|s'\rangle \leftrightarrow |c\rangle$, aber nicht $|d'\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ oder $|s'\rangle \leftrightarrow |u\rangle$. Soweit bisher bekannt, kann das Z^0 -Boson keine Flavour ändern.

- Empirisch stellte man fest, dass hadronische Zerfälle von Teilchen mit Strangeness durch die Auswahlregeln $\Delta S = 1$ und $\Delta I = \frac{1}{2}$ gekennzeichnet sind. In semileptonischen Zerfällen ohne definiertem Gesamtisospin im Endzustand lautet die Auswahlregel $\Delta Q = \Delta S$. Zeigen sie, dass dies gleichbedeutend mit $\Delta I_3 = \frac{1}{2}$ ist (Strangeness S , Ladung Q , Isospin: I und I_3). Entsprechend der Regel existiert der Kanal $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$, aber $\Sigma^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ nicht. Finden sie anhand dieses Beispiels im Quarkbild eine einfache Erklärung für die Auswahlregeln.
- Berechnen sie nun den Cabibbo-Winkel θ_C aus den Fermikonstanten für den β -Zerfall von Kernen $G_{F;\beta\text{-Zerfall von Kernen}} = 8.729 \cdot 10^{10}$ sowie dem rein leptonischen Zerfall des Myons $G_{F;\mu} = 8.942 \cdot 10^{10}$.
- Während der Effekt auf den β -Zerfall von Nukleonen klein ist, hat die Quarkmischung einen grossen Effekt auf den Zerfall von Teilchen mit Strangeness. Demonstrieren sie dies, indem sie das folgende Verzweigungsverhältnis näherungsweise (ohne Phasenraumfaktor) reproduzieren:

$$\frac{\Gamma(\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 + e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e)} = 17.75.$$

- Überlegen sie sich, ob im Zerfall des D-Mesons ($c\bar{d}$) die Kanäle $K^-\pi^+\pi^+$ oder $K^+\pi^-\pi^+$ häufiger auftreten.
Hinweis: Auch hier sind Quarkflussdiagramme nützlich!
- Eine ähnliche Mischungsmatrix verbindet auch die drei Leptonenfamilien. Falls alle drei Neutrinos masselos wären, kann man eine besonders einfache Darstellung dieser Matrix finden. Wie sieht sie aus? Was hat das für Konsequenzen für die Erhaltung der Leptonen(familien)zahl?

Aufgabe 2 Z^0

Das neutrale Z -Boson hat die Masse $m_{Z^0} = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$

- (a) Machen Sie sich diese Masse plausibel, indem Sie voraussetzen, dass die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung die gleiche intrinsische Stärke besitzen und dass auch neutrale und geladene Ströme ungefähr gleich stark sind.
- (b) Die Zerfallsbreite des Zerfalls $Z^0 \rightarrow \text{Fermionen}$ ist

$$\Gamma_f = \frac{G_F M_Z^3 c^6 n}{24\pi \sqrt{2} (\hbar c)^3} \left[(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2 \right],$$

wobei n den Farbbeitrag darstellt,

$$g_V^f = T_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_W \quad \text{und} \quad g_A^f = T_3^f$$

die Vektor- und Axialvektorkopplungen des Fermions f sind, die durch den schwachen Isospin T_3^f und die Ladung q_f des Fermions f sowie den Weinbergwinkel $\sin^2 \theta_W$ bestimmt sind. Schätzen Sie die Breite der Z^0 -Resonanz und deren Lebensdauer ab.

Hinweis: $M_Z = 91.19 \text{ GeV}/c^2$, $\sin^2 \theta_W = 0.232$, $G_F/(\hbar c)^3 = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

- (c) Kann man die Z^0 -Produktion an einem e^+e^- -Collider benutzen um das Verzweigungsverhältnis $B_{\nu\nu}$ von Z^0 in Neutrinos zu bestimmen? Wenn ja, was muss man messen und wie berechnet sich dann $B_{\nu\nu}$?

Aufgabe 3 β -Zerfall

- a. In der Vorlesung wurde der β -Zerfall unter der Annahme behandelt, dass $m_\nu = 0$. Berechnen Sie nun ausgehend von Fermis Goldener Regel das Energiespektrum $N(E_e)dE_e$ der Elektronen bei nichtverschwindender Neutrinomasse. Wie verändert sich das β -Spektrum in der Kurie-Darstellung im Vergleich zum Fall $m_\nu = 0$?
- b. Die in einem Zerfallsexperiment bestimmte beste Grenze für die Neutrinomasse stammt aus dem Mainz-Experiment mit $m_e < 2.3 \text{ eV}$. Hierfür wurde der Zerfall von Tritium untersucht:



Weshalb wurde Tritium gewählt? Wie hängt der Endpunkt des β -Spektrums von der Neutrinomasse ab? Überlegen Sie sich, wo experimentelle Schwierigkeiten liegen.

- c. Zeigen Sie, dass in der hochrelativistischen Näherung die sogenannte Sargent-Regel gilt, die besagt, dass die Lebensdauer τ umgekehrt proportional zu E_0^5 ist. Hierbei ist E_0 der Q -Wert der Reaktion.

Aufgabe 4 : Supernova 1987a

Am 23. Februar 1987 wurde die Explosion des Sterns Sanduleak-69 202 (Entfernung $1.8 \cdot 10^5$ Lichtjahre) beobachtet. Dabei wurden in einigen Neutrinodetektoren Elektron-Antineutrinos nachgewiesen. Das Kamiokande-Experiment registrierte 11 Ereignisse mit Energien zwischen 8.8 MeV und 36.7 MeV innerhalb eines Zeitintervalls von 12.4 s. Daraus lässt sich ein zeitintegrierter $\bar{\nu}_e$ -Fluss $F_{\bar{\nu}_e} \simeq 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ am Ort der Erde abschätzen.

-
- a. Geben Sie die beim Gravitationskollaps insgesamt in Form von Neutrinos freigesetzte Energie an, wenn die mittlere Neutrinoenergie etwa 10 MeV beträgt. Nehmen Sie dabei an, dass die Neutrinos isotrop abgestrahlt wurden, und Neutrinos und Antineutrinos aller 3 Flavours gleich häufig produziert werden. (Wie lässt sich diese Annahme begründen?)
 - b. Welche Masse muss (von $R \simeq \infty$ kommend) auf Kerndichte $\rho = 10^{15} \text{ g/cm}^3$ zusammenstürzen, damit diese Energie in Form von Gravitationsenergie frei wird?
 - c. Aus der Dauer des Neutrinosignals konnte damals eine Massengrenze für Neutrinos abgeleitet werden. Wie groß ist m_ν unter der Annahme, dass die Neutrinos alle gleichzeitig emittiert wurden? Welche Aussage kann man über m_ν machen, wenn die Emission während eines Zeitintervalls von 15 s erfolgt ist?